ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2011, том 47, № 4, с. 143–165

К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ЛЕОНИДА ВИТАЛЬЕВИЧА КАНТОРОВИЧА

ДВОЙСТВЕННОСТЬ МОНЖА–КАНТОРОВИЧА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ПОЛЕЗНОСТИ*

© 2011 г. **В.Л. Левин**

(Москва)

Обзор посвящен развитию теории двойственности для общей задачи Монжа–Канторовича и ее применению в теории полезности.

Ключевые слова: теория двойственности, двойственность Монжа–Канторовича, теория полезности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача Монжа–Канторовича (ЗМК), известная также как задача о перемещении масс, состоит в следующем. Заданы два распределения (исходное и желаемое) некоторого продукта и функция стоимости, показывающая стоимость перемещения единицы продукта из одного пункта в другой. Требуется перейти от первого распределения ко второму с наименьшими затратами, т.е. составить оптимальный план перемещения масс. Впервые эту задачу рассмотрел Гаспар Монж (1781) в связи с некоторыми прикладными вопросами фортификации ("задача о выемках и насыпях"). Функцией стоимости в задаче Монжа служило расстояние между пунктами, а под планом перемещения масс понималось отображение, сохраняющее объем, так что надо найти план, минимизирующий работу по перемещению масс, связанную с преодолением сил трения. В такой постановке задача была решена П.-Э. Аппелем (1887). В наше время получены решения задачи Монжа для более общих функций стоимости и более общих распределений массы.

В 1942 г. Л.В. Канторович (Канторович, 1942) (см. также (Канторович, 1948; Канторович, Рубинштейн, 1957, 1958; Канторович, Акилов, 1984)) рассмотрел задачу о перемещении масс, в которой под планом перемещения понималась положительная мера на произведении пространств, имеющая своими проекциями (маргинальными мерами) исходное и желаемое распределения, а функцией стоимости, как и у Монжа, служило расстояние между пунктами. Указанная постановка задачи, называемая иногда классической задачей Монжа–Канторовича, является расширением (релаксацией) первоначальной постановки Монжа; решениям Монжа при этом отвечают меры, сосредоточенные на графике соответствующего отображения. Такой вариант классической ЗМК исследуется в публикациях Канторовича 1942 и 1949 г. В более поздних работах (Канторович, Рубинштейн, 1957, 1958) рассматривается другой вариант задачи, когда заданы не сами маргинальные меры, а их разность, т.е. разрешены транзитные перевозки.

Приведем точную математическую формулировку классической ЗМК, рассматривавшейся Л.В. Канторовичем. На метрическом компакте (X, d) заданы две положительные борелевские меры σ_1 и σ_2 с равными общими массами: $\sigma_1 X = \sigma_2 X$. Требуется минимизировать интеграл $\int_{X\times X} c(x, y)d\mu$, где $c(x, y) = d(x, y)$, μ пробегает множество положительных мер на $X \times X$ с проекциями $\mu(B \times X) = \sigma_1 B$ и $\mu(X \times B) = \sigma_2 B$ для каждого борелевского множества $B \subseteq X$ (ЗМК с фиксированными маргинальными мерами) или же μ пробегает множество положительных мер на $X \times X$ с разностью проекций $\mu(B \times X) - \mu(X \times B) = \sigma_1 B - \sigma_2 B$ (ЗМК с фиксированной разностью маргинальных мер). Обозначим через $\mathcal{A}(c, \sigma_1 - \sigma_2)$ оптимальное значение задачи с фиксированной разностью маргинальных мер и через $\mathcal{C}(c, \sigma_1, \sigma_2)$ оптимальное значение задачи с фиксированными маргинальными мерами. Один из важных результатов для классической ЗМК состоит в

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект 10-02-00073а).

эквивалентности обеих постановок, с фиксированными маргинальными мерами и с фиксированной разностью маргинальных мер: $\mathcal{A}(d, \sigma_1, \sigma_2) = \mathcal{C}(d, \sigma_1 - \sigma_2)$ (Канторович, Рубинштейн, 1957, 1958). При этом указанная величина является метрикой на пространстве вероятностных мер на X, топологизирующей их слабую* сходимость (метрика Канторовича–Рубинштейна). Другим фундаментальным результатом является критерий оптимальности Канторовича: для оптимальности данной допустимой меры (плана перемещения масс) необходимо и достаточно существование функции $u(x)$ на исходном пространстве, называемой потенциалом и обладающей тем свойством, что для любых двух пунктов x и y разность потенциалов $u(x)–u(y)$ не превосходит значения функции стоимости в точке (x, y), а на носителе меры имеет место точное равенство.

Классическая ЗМК является бесконечномерной задачей линейного программирования (исторически, одной из первых, если не самой первой); при этом критерий оптимальности Канторовича может быть переформулирован как теорема двойственности, т.е. утверждение о равенстве оптимальных значений исходной и двойственной задач (см., например, (Вершик, 1970; Рубинштейн, 1970)). В случае конечного числа пунктов задача с фиксированными проекциями превращается в обычную транспортную задачу линейного программирования (с расстоянием в качестве функции стоимости), а задача с фиксированной разностью проекций – в транспортную задачу в сетевой постановке. Замечательно, что первая публикация Л.В. Канторовича (1942) появилась раньше соответствующих работ, относящихся к конечномерной транспортной задаче.

Задачи Монжа–Канторовича с более общими функциями стоимости (непрерывными и разрывными), определенными на всевозможных пространствах, рассматриваются в литературе начиная с середины 1970-х годов (Левин, 1974, 1975, 1977, 1978; Левин, Милютин, 1979). В это же время появился и сам термин "задача Монжа–Канторовича" (Левин, 1977, 1978), ставший теперь общепринятым. В общем случае две постановки ЗМК перестают быть эквивалентными, и существование потенциала не является необходимым условием оптимальности. (Заметим в этой связи, что в формулировке задачи в (Канторович, 1948) не предполагается, что функция стоимости является метрикой, однако это предположение неявно используется в доказательстве.) Приведем иллюстративный пример.

Пример 1. Пусть $X = [0, 1]$, $c(x, y) = (x - y)^2$, $\sigma_1 = \epsilon_0$, $\sigma_2 = \epsilon_1$, где ϵ_x – мера Дирака (δ-функция) в точке x, т.е. $\epsilon_x(B) = 1$ при $x \in B$ и $\epsilon_x(B) = 0$ при $x \notin B$. Поскольку $\epsilon_{(0,1)}$ – единственная мера с проекциями ϵ_0 и ϵ_1, то она является оптимальным решением ЗМК с фиксированными проекциями и $\mathcal{C}(c, \sigma_1, \sigma_2) = c(0, 1) = 1$. В то же время для $\mu = \epsilon_{(0,1/n)} + \epsilon_{(1/n,2/n)} + \ldots + \epsilon_{((n-1)/n,1)}$ (перемещение из 0 в 1 через $n - 1$ промежуточный пункт) разность проекций равна $\sigma_1 - \sigma_2$, и, так как интеграл от $c(x, y)$ по этой мере равен $1/n$, то $\mathcal{A}(c, \sigma_1 - \sigma_0) = 0$. Далее, если $u(x) - u(y) \le (x - y)^2$ при всех x, y из $[0, 1]$, то $u(x)$ – константа, стало быть, $u(0) - u(1) = 0 \ne c(0, 1) = 1$, т.е. мера $\epsilon_{(0,1)}$ оптимальна (в задаче с фиксированными проекциями), но критерий Канторовича для нее не выполняется[1].

Несложно показать, что для сохранения эквивалентности обоих вариантов ЗМК при любых σ_1, σ_2 ($\sigma_1 X = \sigma_2 X$) необходимо и достаточно, чтобы функция стоимости удовлетворяла неравенству треугольника $c(x, y) + c(y, z) \ge c(x, z)$. С точки зрения теории двойственности ЗМК с фиксированной разностью маргинальных мер является более трудной. Полная теория двойственности в массовой постановке (т.е. описание всех функций стоимости, для которых верна теорема двойственности) для этой задачи была построена в совместной работе Милютина и автора (Левин, Милютин, 1979) в случае произвольного (не обязательно метризуемого) компактного пространства X. Обобщение этой теории на более широкий класс топологических пространств получено в (Левин, 1984, 1987; Levin, 1990). Дальнейшие (не топологические) обобщения см. в (Левин, 1996; Levin, 1997b; Левин, 1997).

В 1960–1980 гг. интенсивно развивались исследования по классической ЗМК с фиксированными проекциями (некоторые авторы рассматривают только этот вариант задачи) и ее применениям в теории информации и математической статистике (Вассерштейн, Вершик, Судаков, Келлерер, Рачев, Рюшендорф и др.). После появления важных работ (Brenier, Gangbo, McCann) в этой области начался настоящий бум, продолжающийся и сейчас (связь с уравнением

[1] Для оптимальности допустимой меры в общей ЗМК с фиксированными проекциями необходимо и достаточно существование пары непрерывных функций $u(x)$ и $v(y)$ таких, что $u(x) - v(y) \le c(x, y)$ при любых x, y и $u(x) - v(y) = c(x, y)$ на носителе меры.

Монжа–Ампера и другими дифференциальными уравнениями с частными производными, применения в различных разделах естествознания, от метеорологии и океанологии до космологии, гидро- и аэродинамики, и т.д.). В 1998–2003 гг. появилось несколько монографий (Rachev, Rüschendorf; Evans, Grandbo; Villani; Brenier; Ambrosio).

Экономические применения задачи Монжа–Канторовича, отличные от очевидного транспортного аспекта, оказались связаны с теорией двойственности для общей ЗМК с фиксированной разностью проекций. Нами был развит новый метод, позволяющий использовать единый подход при решении самых разных задач как математической экономики (теория полезности; рационализируемость спроса; модели динамики; коррупция, связанная с искажением экономической информации), так и чистой математики (задача наилучшего приближения, циклическая монотонность, абстрактный выпуклый анализ), список литературы в конце статьи[2]. В основе метода лежат теоремы двойственности для общей ЗМК с фиксированной разностью маргинальных мер и специальной (разрывной) функцией стоимости. Важную роль при этом играет множество ограничений двойственной задачи

$$Q(c) := \{u \in C^b(X) : u(x) - u(y) \leq c(x, y) \ \ \forall (x, y) \in X \times X\}$$

($C^b(X)$ – пространство всех ограниченных непрерывных функций на X), аналогичное множество

$$Q_0(c) := \{u \in \mathbf{R}^X(X) : u(x) - u(y) \leq c(x, y) \ \ \forall (x, y) \in X \times X\},$$

являющееся множеством ограничений для абстрактной (нетопологической) версии двойственной ЗМК (если функция стоимости ограничена, непрерывна в некоторой окрестности диагонали $D = \{(x, x) : x \in X\}$ и обращается в нуль на D, то $Q_0(c) = Q(c)$), а также редуцированная функция стоимости $c_*(x, y)$, показывающая минимальную стоимость перемещения единицы продукта из x в y с учетом всевозможных транзитных перемещений через несколько промежуточных пунктов. Оказалось, что решение многих задач из самых разных разделов экономической теории сводится к условиям непустоты (и изучению свойств) множеств $Q(c)$ и $Q_0(c)$ для специальных (как правило, знакопеременных) вспомогательных функций стоимости. Этот метод оказался полезен и при исследовании ЗМК с фиксированными проекциями.

В настоящем обзоре изложены теоремы двойственности для обоих вариантов общей ЗМК и их применение в теории полезности.

2. ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ, УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

2.1. ЗМК с фиксированной разностью маргинальных мер. Напомним постановку задачи Монжа–Канторовича с фиксированной разностью маргинальных мер. Даны: функция стоимости $c\colon X \times X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ и знакопеременная борелевская мера ρ на X, $\rho X = 0$ (разность маргинальных мер). Задача состоит в нахождении оптимального значения

$$\mathcal{A}(c, \rho) := \inf\{c(\mu) : \ \mu \geq 0, \ \pi_1\mu - \pi_2\mu = \rho\},$$

где $c(\mu) := \int\limits_{X \times X} c(x, y)\mu(d(x, y))$, маргинальные меры на X $\pi_1\mu$ и $\pi_2\mu$, определены равенствами $(\pi_1\mu)B = \mu(B \times X)$, $(\pi_2\mu)B = \mu(X \times B)$ для каждого борелевского множества B в X. Это общая ЗМК с заданной разностью маргинальных мер. Разумеется, для того чтобы задача была корректно определена, функция стоимости должна быть универсально измеримой.

Двойственная задача состоит в нахождении оптимального значения

$$\mathfrak{B}(c, \rho) := \sup\left\{\int\limits_X u(x)\rho(dx) : u \in Q(c)\right\},$$

где

$$Q(c) = Q(c, C^b(X)) := \{u \in C^b(X) : u(x) - u(y) \leq c(x, y) \quad \forall x, y \in X\},$$

[2] Первая журнальная заметка по двойственности для общей ЗМК опубликована в Докладах Академии наук (1975) по представлению Л.В. Канторовича; см. (Левин, 1975).

$C^b(X)$ – пространство ограниченных непрерывных вещественных функций на X. Очевидно, всегда справедливо неравенство $\mathcal{A}(c, \rho) \geq \mathcal{B}(c, \rho)$.

Теорема 1 (Левин, Милютин, 1979). *Пусть пространство X метризуемо и компактно. Предположим, что $c(x, y)$ удовлетворяет неравенству треугольника и обращается в нуль на диагонали ($c(x, x) = 0 \ \ \forall x \in X$), а лебеговы множества меньших значений*

$$\{(x, y) : c(x, y) \leq \alpha\}, \ \ \alpha \in \mathbf{R} \tag{1}$$

являются аналитическими (суслинскими). Тогда следующие утверждения равносильны:

а) при всех ρ, $\rho X = 0$, справедливо соотношение двойственности

$$\mathcal{A}(c, \rho) = \mathcal{B}(c, \rho) > -\infty; \tag{2}$$

б) функция стоимости полунепрерывна снизу.

Далее, если какое-нибудь (а стало быть оба) из этих равносильных утверждений имеет место, то оптимальное значение $\mathcal{A}(c, \rho)$ достигается, и более того, для любых положительных мер на X, σ_1, σ_2 с разностью $\sigma_1 - \sigma_2 = \rho$ найдется мера $\mu \geq 0$ на $X \times X$ такая, что $\pi_1\mu = \sigma_1$, $\pi_2\mu = \sigma_2$ и $c(\mu) = \mathcal{A}(c, \rho)$.

Следствие 1. Если $c(x, y)$ полунепрерывна снизу на $X \times X$, обращается в нуль на диагонали и удовлетворяет неравенству треугольника, то $Q(c)$ непусто.

Для непрерывной функции $c(x, y)$ это – прямое следствие неравенства треугольника, так как в таком случае при любом $z \in X$ функции $u(x) = c(x, z)$ и $v(x) = -c(z, x)$ принадлежат $Q(c)$.

Следствие 2. Если $c(x, y)$ полунепрерывна снизу на $X \times X$ и обращается в нуль на диагонали, то следующие утверждения равносильны:

а) $c(x, y)$ удовлетворяет неравенству треугольника;

б) справедливо представление

$$c(x, y) = \sup_{u \in Q(c)} (u(x) - u(y)). \tag{3}$$

Здесь б) $\Rightarrow$ а) очевидно, а а) $\Rightarrow$ б) есть прямое следствие теоремы 1, принимая во внимание, что правая часть равенства (3) в точности совпадает с $\mathcal{B}(c, \varepsilon_x - \varepsilon_y)$, а $c(x, y) = \mathcal{A}(c, \varepsilon_x - \varepsilon_y)$ при всех $x \neq y$. (Последнее следует из того, что $\varepsilon_{(x,y)}$ – единственная мера на $X \times X$, имеющая ε_x и ε_y своими маргинальными мерами.)

Теорема 1 обобщается на некомпактные пространства следующим образом.

Теорема 2 (Левин, 1984; Levin, 1990). *Пусть X – польское пространство (т.е. сепарабельное метризуемое пространство, которое можно метризовать так, что оно станет полным). Тогда при предположениях теоремы 1 следующие утверждения равносильны:*

а) при всех ρ, $\rho X = 0$, выполняется соотношение двойственности (2);

б) справедливо представление (3).

Если $c(x, y)$ не удовлетворяет неравенству треугольника, то условия для справедливости соотношения двойственности выражаются в терминах *редуцированной функции стоимости*

$$c_*(x, y) := \inf_n \inf_{z_1, \ldots, z_n \in X} \{c(x, z_1) + c(z_1, z_2) + \ldots + c(z_n, y)\}. \tag{4}$$

Легко убедиться, что $Q(c) = Q(c_*)$ (включение $Q(c_*) \subseteq Q(c)$ очевидно, а обратное включение получается сумированием неравенств $u(z_k) - u(z_{k+1}) \leq c(z_k, z_{k+1})$, $k = 0, \ldots, n$, где $z_0 = x$, $z_{n+1} = y$), следовательно, $\mathcal{B}(c, \rho) = \mathcal{B}(c_*, \rho)$. С другой стороны, теорема о редукции (Levin, 1990, Theorem 9.6) утверждает, что $\mathcal{A}(c, \rho) = \mathcal{A}(c_*, \rho)$ при условии, что

$$\mathcal{A}(c, \rho) = \lim_{N \to \infty} \mathcal{A}(c \wedge N, \rho), \tag{5}$$

где $(c \wedge N)(x, y) := \min(c(x, y), N)$. Более того, справедлива следующая теорема двойственности.

Теорема 3 (Левин, 1987, теорема 2; Levin, 1990, Theorem 9.4). *Пусть X – польское пространство. Предположим, что функция стоимости $c(x, y)$ ограничена снизу, а ее лебеговы множества меньших значений являются аналитическими. Следующие утверждения равносильны:*

а) соотношение двойственности выполняется при всех ρ, $\rho X = 0$;

б) выполнено равенство (5), $Q(c)$ непусто, и справедливо представление

$$c_*(x, y) = \sup_{u \in Q(c)} (u(x) - u(y)). \tag{6}$$

Замечание 1. Сформулированные выше результаты обобщаются на более широкий класс пространств X. В частности, теорема 1 верна для любых (не обязательно метризуемых) компактов, теорема 2 (теорема 3) справедлива, если X гомеоморфно универсально измеримому (соотв. бэровскому) подмножеству некоторого компакта. В указанных (неметризуемых) версиях теорем двойственности все рассматриваемые меры предполагаются регулярными, а под аналитическими множествами понимаются результаты применения А-операции к бэровским множествам. Подробнее см. (Levin, 1990).

2.2. ЗМК с фиксированными маргинальными мерами: двойственность, условия оптимальности и точные решения. Напомним постановку общей задачи Монжа–Канторовича (ЗМК) с фиксированными маргинальными мерами. Пусть X и Y – вполне регулярные топологические пространства. Даны: ограниченная снизу и универсально измеримая функция стоимости $c : X \times Y \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ и конечные регулярные борелевские меры σ_1 на X и σ_2 на Y, $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$; задача состоит в нахождении оптимального значения

$$\mathfrak{C}(c, \sigma_1, \sigma_2) := \inf\{c(\mu) : \mu \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)\},$$

где

$$c(\mu) := \int_{X \times Y} c(x, y)\mu(d(x, y)), \quad \Gamma(\sigma_1, \sigma_2) := \{\mu : \mu \geq 0, \pi_1\mu = \sigma_1, \pi_2\mu = \sigma_2\},$$

$\pi_1\mu$ и $\pi_2\mu$ – проекции (маргинальные меры) μ на X и Y. Это – общая ЗМК с фиксированными маргинальными мерами.

Двойственная задача состоит в нахождении оптимального значения

$$\mathcal{D}(c, \sigma_1, \sigma_2) := \sup\left\{\int_X u(x)\sigma_1(dx) - \int_Y v(y)\sigma_2(dy) : (u, v) \in Q'(c)\right\},$$

где

$$Q'(c) := \{(u, v) \in C^b(X) \times C^b(Y) : u(x) - v(y) \leq c(x, y) \forall (x, y) \in X \times Y\}.$$

Очевидно, всегда $\mathfrak{C}(c, \sigma_1, \sigma_2) \geq \mathcal{D}(c, \sigma_1, \sigma_2)$.

Теорема 4 (см. (Левин, 1984, теорема 1; Levin, 2001б, Theorem 1.4). *Следующие утверждения равносильны:*

а) для всех $\sigma_1 \geq 0$, $\sigma_2 \geq 0$ с $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$ справедливо соотношение двойственности $\mathfrak{C}(c, \sigma_1, \sigma_2) = \mathcal{D}(c, \sigma_1, \sigma_2)$;

б) $c(x, y)$ ограничена снизу и полунепрерывна снизу на $X \times Y$;

в) $c(x, y)$ представима в виде $c(x, y) = \sup_{(u,v) \in H}(u(x) - v(y))$, где H – непустое подмножество $C^b(X) \times C^b(Y)$. Более того, если эти равносильные утверждения выполняются, то оптимальное значение $\mathcal{C}(c, \sigma_1, \sigma_2)$ достигается, т.е. существует оптимальное решение рассматриваемой ЗМК.

Обратимся теперь к вопросу о существовании (и единственности) оптимального решения Монжа рассматриваемой ЗМК. Напомним (см. Введение), что задача Монжа (ЗМ) состоит в минимизации (нелинейного) функционала $\mathcal{F}(f) := \int_X c(x, f(x))\sigma_1(dx)$ на множестве $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ всех сохраняющих меру борелевских отображений $f : X \to Y$. (Отображение f называется сохраняющим меру, если $\sigma_2 = f(\sigma_1)$, т.е. $\sigma_2 B = \sigma_1 f^{-1}(B)$ для каждого борелевского множества $B \subseteq Y$.) Свяжем с

$f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ меру $\mu_f \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$, сосредоточенную на графике f и являющуюся образом меры σ_1 при отображении $id_X \times f$, $\mu_f = (id_X \times f)(\sigma_1)$. Легко увидеть, что $c(\mu_f) = \mathcal{F}(f)$; следовательно, для любой функции стоимости $c(x, y)$ справедливо неравенство

$$\mathcal{C}(c, \sigma_1, \sigma_2) \le \mathcal{V}(c, \sigma_1, \sigma_2), \tag{7}$$

где $\mathcal{V}(c, \sigma_1, \sigma_2)$, – оптимальное значение ЗМ. Заметим, что если ЗМК имеет оптимальное решение, являющееся решением Монжа μ_f, то f автоматически оказывается оптимальным решением ЗМ и (7) выполняется со знаком равенства. В общем случае неравенство (7) является строгим, и более того, множество $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ может быть *пустым*.

Далее предполагается, что X и Y – замкнутые области в $\mathbf{R}^n$, а $c \in C^b(X \times Y)$. Напомним, что *носителем* положительной борелевской меры σ на X называется минимальное замкнутое множество полной меры σ (т.е. дополнение объединения всех открытых подмножеств X нулевой меры). Носитель σ обозначается $spt(\sigma)$.

Нам понадобятся два условия на σ_1 и c.

Условие A_1. Мера σ_1 абсолютно непрерывна относительно n-мерной меры Лебега.

Условие A_c. Если для y^1, y^2 из $spt(\sigma_2)$ функции $c(\cdot, y^1)$ и $c(\cdot, y^2)$ дифференцируемы в некоторой точке $x \in intX$ и их градиенты в этой точке совпадают, то $y^1 = y^2$.

Условие A_c выполняется, в частности, когда $X = Y$ и $c(x, y) = x \times y$ или $c(x, y) = h(x - y)$, где h строго выпукла (строго вогнута).

Теорема 5 (Levin, 1999, Theorem 6.1; Levin, 2004, Theorems 1.2, 1.3). *Предположим, что X выпукло, $c(x, y)$ непрерывна и выполнены условия A_1, A_c. Также предположим, что все функции $c(\cdot, y)$ $(y \in spt(\sigma_2))$ выпуклы либо все они вогнуты. Тогда существует единственное оптимальное решение ЗМК, это оптимальное решение является решением Монжа $\mu = \mu_f$ и f – единственное оптимальное решение ЗМ. (с точностью до значений на σ_1-пренебрежимом множестве)*

Аналогичный результат верен при отказе от выпуклости X и замене условий вогнутости (выпуклости) функций $c(\cdot, y)$ $(y \in spt(\sigma_2))$ условием их дифференцируемости и равномерной по y локальной липшицевости на $spt(\sigma_1)$; подробнее см. (Levin, 1999, Theorem 6.2; Levin, 2004, Theorem 1.4).

Замечание 2. В теореме 5 (и в других подобных теоремах) единственность оптимального решения имеет место для специальных σ_1 и c. В отличие от этих "индивидуальных" результатов о единственности в (Levin, 2001b) (см. также (Левин, 2008a)) было доказано несколько теорем о типичности единственности в задаче Монжа–Канторовича с произвольными маргинальными мерами, удовлетворяющими равенству $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$, и в более общих бесконечномерных задачах линейного программирования. Простейшая из этих теорем (Levin, 2001b, Theorem 1) утверждает, что если X и Y – ограниченные замкнутые области в евклидовых пространствах, то непрерывные функции стоимости $c(x, y)$, для которых оптимальное решение ЗМК единственно, образуют массивное (плотное G_δ) множество в $C(X \times Y)$. Однако в этой теореме оптимальные решения соответствующих ЗМК, вообще говоря, не являются решениями Монжа.

Рассмотрим множество вещественных функций на X, $L := \{-c(\cdot, y) : y \in spt(\sigma_2)\}$, и свяжем с каждой $\mu \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ многозначное отображение $F_\mu : X \to L$,

$$F_\mu(x) := \{-c(\cdot, y) : (x, y) \in spt(\mu)\}. \tag{8}$$

Положим $Z = \mathrm{dom} F_\mu := \{x \in X : F_\mu(x) \ne \varnothing\}$ и определим на $Z \times Z$ функцию

$$\varphi_\mu(x, z) := \inf\{l(x) - l(z) : l \in F_\mu(x)\}. \tag{9}$$

Из (Levin, 1999, Theorem 5.1) следует, что мера $\mu \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ оптимальна тогда и только тогда, когда отображение F_μ *L-циклически монотонно*, т.е. для каждого натурального числа p и каждого цикла $x^1, \dots, x^p$, $x^{p+1} = x^1$ в $\mathrm{dom}\, F_\mu$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{p} (l_k x^k) - l_k(x^{k+1})) \ge 0,$$

каковы бы ни были $l_k = -c(\cdot, y_k) \in F_\mu(x^k)$, $k = 1,..., p$. С другой стороны, как следует из (Levin, 1999, Theorem 2.1), для L-циклической монотонности F_μ необходима и достаточна непустота $Q_0(\varphi_\mu)$. Получаем следующий критерий оптимальности.

Теорема 6 (Levin, 2004, Theorem 2.1). *Мера* $\mu \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ *является оптимальным решением ЗМК с функцией стоимости* $c(x, y)$ *и маргинальными мерами* σ_1 *и* σ_2 *тогда и только тогда, когда непусто множество* $Q_0(\varphi_\mu)$.

Заметим, что для непрерывного отображения $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ и $\mu = \mu_f$ отображение F_μ однозначно и дается равенством $F_\mu(x) = -c(\cdot, f(x))$ на $Z = spt(\sigma_1)$; в этом случае функция $\varphi_\mu(z^1, z^2)$ превращается в

$$\varphi^f(z^1, z^2) := c(z^2, f(z^1)) - c(z^1, f(z^1)), \tag{10}$$

и мы получаем такое следствие теоремы 6.

Следствие 3. Если $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ непрерывно, то μ_f является оптимальным решением ЗМК (а f – оптимальным решением соответствующей ЗМ) тогда и только тогда, когда $Q_0(\varphi^f)$ непусто.

Таким образом, оптимальность данной меры $\mu \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ в ЗМК или данного отображения $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ в ЗМ эквивалентна непустоте множества $Q_0(\varphi)$ для некоторой специальной вспомогательной функции стоимости (φ_μ или φ^f) на $Z \times Z$. Предположим для простоты, что $spt(\sigma_1) = X$. Тогда при неограничительных условиях гладкости на исходную функцию стоимости $c(x, y)$ и отображение $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ связанная с ними вспомогательная функция стоимости φ^f на $X \times X$ является гладкой, и имеет место одно из двух утверждений: 1) $Q_0(\varphi^f)$ пусто; 2) $Q_0(\varphi^f)$ с точностью до постоянного слагаемого состоит из единственной функции $u_0(x)$ ($Q_0(\varphi^f) = \{u_0(x) + \mathbf{R}\}$), удовлетворяющей уравнению

$$\nabla u_0(x) = \nabla_x \varphi^f(x, z)|_{z=x}. \tag{11}$$

Очевидно, для функции $g^x(z) := u_0(z) + \varphi^f(x, z)$ имеет место эквивалентность

$$u_0 \in Q_0(\varphi^f) \Leftrightarrow g^x(x) = \min\{g^x(z) : z \in X\} \ \forall x \in X. \tag{12}$$

Учитывая (11), можно выписать условия второго порядка (отдельно, необходимые и достаточные) для минимума функции $g^x(z)$ при $z = x$, а значит, и для справедливости 2). Для некоторых конкретных f и c необходимые условия смыкаются с достаточными, и при их выполнении f оказывается единственным (с точностью до значений на множестве нулевой меры) оптимальным решением задачи Монжа, а μ_f – единственным оптимальным решением соответствующей задачи Монжа–Канторовича. Единственность здесь следует из теоремы 5 или другого аналогичного результата (см. (Levin, 2004, Theorem 1.4)). Подробнее см. (Levin, 1999; Левин, 2002; Левин, 2003; Левин, 2004; Levin, 2004).

Для разрывного отображения f носителем меры μ_f является замыкание множества $\{(z, f(z)) : z \in spt(\sigma_1)\}$. В некоторых случаях следствие 3 и его обобщения, вытекающие из теоремы 6, позволяют находить точные оптимальные решения задач Монжа и Монжа–Канторовича; см. (Левин, 2003; Levin, 2004; Левин, 2004а). В (Левин, 2004а) (см. также (Levin, 2004)) для $n = 2$ и нескольких классических ЗМ, где функцией стоимости $c(x, y)$ служит эвклидово расстояние (или квадрат расстояния) между точками x и y, а σ_1 и σ_2, суть меры Лебега на двух геометрических фигурах равной площади, получены точные оптимальные решения ЗМ, являющиеся кусочно-изометрическими отображениями специального вида, причем в случае $c(x, y) = \|x - y\|^2$ (или $c(x, y) = -\|x - y\|^2$) имеет место единственность. В частности, точные оптимальные решения ЗМ получены для $c(x, y) = \|x - y\|$ и мер Лебега на квадратах (равносторонних треугольниках) с общим центром, полученных один из другого вращением на 45° (на 60°); для этой функции стоимости единственности нет (Левин, 2004а).

Замечание 3. Нахождение точных оптимальных решений для конкретных ЗМК (и задач Монжа) является весьма трудным делом, требующим большой изощренности в изобретении различных специальных приемов. Известно несколько примеров построения точных решений ЗМК для $n = 1$ (Uckelmann; McCann; Плахов). Наш метод является более систематическим и позволяет находить точные решения и в многомерном случае.

3. ТЕОРИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ПОЛЕЗНОСТИ

3.1. Замкнутые предпорядки и непрерывные функции полезности. Важный класс отношений предпочтения составляют предпорядки. *Предпорядком* на множестве альтернатив X называется бинарное отношение $\preceq$, удовлетворяющее условиям рефлексивности ($x \preceq x\ \forall x \in X$) и транзитивности ($x \preceq y,\ y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$). Предпорядок называется *тотальным* (иногда также используются как синонимы термины *полный* и *линейный*), если любая пара альтернатив (x, y) сравнима, т.е. выполняется, по крайней мере, одно из соотношений $x \preceq y$ и $y \preceq x$.

С каждым предпорядком $\preceq$ можно связать два бинарных отношения: строгий предпорядок $\prec$ и отношение равноценности (или безразличия) ~, определяемые следующим образом:

$$x \preceq y \Leftrightarrow (x \preceq y) \wedge \neg (y \preceq x),$$

$$x \sim y \Leftrightarrow (x \preceq y) \wedge (y \preceq x).$$

Функцией полезности предпорядка $\preceq$ называется вещественная функция $u(x)$, удовлетворяющая условиям строгой монотонности:

$$x \preceq y \Rightarrow u(x) \leq u(y), \tag{13}$$

$$x \prec y \Rightarrow u(x) < u(y). \tag{14}$$

Из (13) следует, что каждая функция полезности удовлетворяет также условию: $x \sim y \Rightarrow u(x) = u(y)$. Пара условий (13), (14) равносильна единственному условию

$$x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \leq u(y)$$

тогда и только тогда, когда предпорядок $\preceq$ тотален.

Предпорядок $\preceq$ на топологическом пространстве X называется *замкнутым*, если его график $gr(\preceq) := \{(x, y) : x \preceq y\}$ есть замкнутое подмножество в $X \times X$.

Одним из фундаментальных результатов математической теории полезности (и математической экономики в целом) является теорема Дебре (Debreu, 1954, 1964), утверждающая существование непрерывной функции полезности для каждого замкнутого тотального предпорядка на сепарабельном метризуемом пространстве. Ниже (а также в (Левин, 1981, 1983а; Levin, 1986, 1990)) приведены некоторые обобщения этой теоремы на предпорядки, не являющиеся тотальными. В основе нашего подхода лежит использование специальной функции стоимости $c(x, y)$, обращающейся в нуль на графике предпорядка, удовлетворяющей неравенству треугольника и обладающей подходящими свойствами (полу)непрерывности. С помощью теоремы двойственности для ЗМК мы получаем представление

$$gr(\preceq) = \{(x, y) : u(x) \leq u(y) \quad \forall u \in H\}, \tag{15}$$

где $H \subseteq Q(c)$. Более того, иногда удается выбрать счетное множество $H = \{u_n : n = 1, 2,...\}$, и в таком случае

$$u_0(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} u_n(x)(1 + |u_n(x)|)^{-1}$$

оказывается функцией полезности для $\preceq$ с требуемыми свойствами непрерывности.

Теорема 7 (Кирута, Рубинов, Яновская, 1980; Левин, 1981). *Пусть $\preceq$ – замкнутый предпорядок на метризуемом компактном пространстве X. Тогда его график допускает представление* (15) *со счетным H, следовательно, существует непрерывная функция полезности для $\preceq$.*

Доказательство[3]. Рассмотрим на $X \times X$ функцию стоимости

$$c(x,\ y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \preceq y; \\ +\infty, \text{ если нет.} \end{cases} \tag{16}$$

В силу транзитивности и рефлексивности предпорядка эта функция удовлетворяет неравенству

[3] Это доказательство принадлежит автору (Левин, 1981). Доказательство Рубинова (Кирута, Рубинов, Яновская, 1980) основано на другой идее.

треугольника и обращается в нуль на диагонали. Кроме того, она полунепрерывна снизу в силу замкнутости $\preceq$. Тогда, согласно теореме 1, $Q(c)$ непусто и справедливо представление (3) (см. следствия 1 и 2); следовательно,

$$gr(\preceq) = \{(x, y) : u(x) \leq u(y) \quad \forall u \in Q(c)\}.$$

Поскольку банахово пространство $C(X)$ сепарабельно, мы можем выбрать счетное плотное подмножество H в $Q(c)$. Тогда справедливо представление (15) с этим H, откуда следует существование непрерывной функции полезности.

Теорема 8 (Levin, 1986, Theorem 4). *Пусть $\preceq$ – предпорядок на сепарабельном метризуемом пространстве X. Следующие утверждения равносильны:*

а) имеет место представление (15) со счетным множеством $H \subset C^b(X)$;

б) предпорядок $\preceq$ является ограничением на X некоторого замкнутого предпорядка $\preceq_1$ на X_1, где X_1 – метризуемая компактификация X.

При выполнении этих равносильных утверждений существует непрерывная функция полезности для $\preceq$.

Теорема 9 (Левин, 1983а, теорема 2; Levin, 1990, Theorem 9.11). *Для каждого замкнутого предпорядка на сепарабельном метризуемом локально компактном пространстве существует непрерывная функция полезности.*

Имеет место следующая теорема о продолжении.

Теорема 10 (Levin, 1990, Lemma 9.14). *Пусть $\preceq$ – замкнутый предпорядок на компактном пространстве X, F – замкнутое подмножество X и $v(x)$ – неубывающая (относительно ограничения $\preceq$ на F) непрерывная функция на F. Тогда существует неубывающая относительно $\preceq$ функция $u \in C(X)$, сужение которой на F есть $v(x)$ и* $\min u(X) = \min v(F)$, $\max u(X) = \max v(F)$.

Теорема 9 выводится из теорем 7 и 10; подробности см. в (Levin, 1990).

Теорема 11 (Левин, 1985, теорема 1; Levin, 1986, Theorem 5). *Пусть $\preceq$ – предпорядок на метрическом пространстве (X, d), $h : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ – возрастающая непрерывная функция, $h(0) = 0$. Рассмотрим на $X \times X$ функцию стоимости*

$$c(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \preceq y; \\ h(d(x, y)), \text{ если нет.} \end{cases} \tag{17}$$

Следующие утверждения равносильны:

а) $gr(\preceq)$ допускает представление (15) с $H \subset C(X)$, и $|u(x) - u(y)| \leq h(d(x, y))$ для всех $u \in H$, $(x, y) \in X \times X$;

б) если $(x, y) \notin gr(\preceq)$, то $c_*(x, y) > 0$.

Если X сепарабельно и выполнены равносильные утверждения а), б), то для $\preceq$ существует равномерно непрерывная функция полезности $u_0(x)$ такая, что $|u_0(x) - u_0(y)| \leq h(d(x, y))$ при всех x, y из X.

Доказательство. Так как редуцированная функция стоимости c_* удовлетворяет неравенству треугольника и $0 \leq c_*(x, y) \leq h(d(x, y))$, то она непрерывна на $X \times X$.

а) $\Rightarrow$ *б)*: из представления (15) вытекает $u(x) - u(y) \leq c(x, y) \quad \forall u \in H, (x, y) \in X \times X$; тогда $u(x) - u(y) \leq c_*(x, y) \quad \forall u \in H, (x, y) \in X \times X$. Если $(x, y) \notin gr(\preceq)$, то, ввиду (15), найдется функция $u \in H$, для которой $u(x) > u(y)$, следовательно, $c_*(x, y) \geq u(x) - u(y) > 0$.

б) $\Rightarrow$ *а)*: возьмем $H = \{u_z : z \in X\}$, где $u_z(x) = c_*(x, z)$. Тогда $u_z(x) - u_z(y) = c_*(x, z) - c_*(y, z) \leq$ $\leq c_*(x, y) = 0$, следовательно, $u_z(x) \leq u_z(y) \quad \forall u_z \in H$.

Если $(x, y) \notin gr(\preceq)$, то $u_y(x) - u_y(y) = c_*(x, y) > 0$, и представление (15) полностью доказано.

Равносильность утверждений *а)* и *б)*, таким образом, установлена.

Предположим теперь, что последовательность (x_k) плотна в X и справедливы утверждения *а*) и *б*). Используя непрерывность c_*, получаем

$$gr(\preceq) = \{(x, y) : c_*(x, z) \le c_*(y, z) \ \ \forall z \in X\} =$$
$$= \{(x, y) : c_*(x, x_k) \le c_*(y, x_k), \ \ k = 1, 2, \ldots\} =$$
$$= \left\{(x, y): \frac{c_*(x, x_k)}{1 + c_*(x, x_k)} \le \frac{c_*(y, x_k)}{1 + c_*(y, x_k)}, k = 1, 2, \ldots\right\},$$

т.е. представление (15) выполняется для счетного множества

$$H = \{c_*(\cdot, x_k)(1 + c_*(\cdot, x_k))^{-1}: k = 1, 2, \ldots\} \subset C^b(X).$$

Тогда

$$u_0(x) := \sum_1^{\infty} \frac{c_*(x, x_k)}{2^k (1 + c_*(x, x_k))} -$$

требуемая функция полезности.

Пусть X – сепарабельное метрическое пространство с ограниченной метрикой d, $\mathcal{F}(X)$ – пространство всех замкнутых подмножеств X с расстоянием Хаусдорфа

$$d_H(A, B) := \max(\inf\{\alpha : A^{\alpha} \supseteq B\}, \ \ \inf\{\alpha : B^{\alpha} \supseteq A\}),$$

где

$$F^{\alpha} := \{x \in X : \operatorname{dist}(x, F) < \alpha\} \ \ \forall \mathcal{F} \in F(X), \ \ \alpha > 0,$$
$$\operatorname{dist}(x, F) := \inf\{d(x, y) : y \in F\}.$$

Так как X сепарабельно, то существует счетное подсемейство $\{F_n\}$ в $\mathcal{F}(X)$ такое, что каждое множество $F \in \mathcal{F}(X)$ представимо в виде $F = \bigcap_{n \in N(F)} F_n$, где $N(F) := \{n : F \subseteq F_n\}$. Легко проверить, что функция φ на $\mathcal{F}(X)$:

$$\varphi(F) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \inf\{\alpha > 0: F_{\alpha}^{n} \supseteq F\}, \tag{18}$$

обладает следующими свойствами (Levin, 1986, Theorem 6):

а) $|\varphi(A) - \varphi(B)| \le d_H(A, B)$,

б) $A \subset B \Rightarrow \varphi(A) < \varphi(B)$,

в) $\varphi(A \cup B) \le \varphi(A) + \varphi(B)$.

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 12 (Левин, 1985, следствие теоремы 3; Levin, 1986, Corollary 2). *Пусть $\preceq$ – замкнутый предпорядок на X, и отображение a: $(X, d) \to (\mathcal{F}(X), d_H)$, $a(x) := \{y \in X : y \preceq x\}$, непрерывно. Тогда функция $u(x) := \varphi(a(x))$, $x \in X$, где φ определена равенством* (18), *является непрерывной функцией полезности для $\preceq$. Если, к тому же, $d_H(a(x), a(y)) \le d(x, y)$ для всех x, y из X, то функция полезности $u(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $L \le 1$.*

Обратимся теперь к следующей проблеме. Предположим, что задано некоторое топологическое пространство параметров Ω, представляющее различные типы потребителей, и для каждого $\omega \in \Omega$ определен замкнутый предпорядок $\preceq_{\omega}$. Когда существует *непрерывная полезность*, т.е. вещественная функция $u(\omega, x)$, непрерывная по совокупности переменных ω и x, и такая, что $u(\omega, \cdot)$ является функцией полезности $\preceq_{\omega}$ для каждого ω из Ω? Этот вопрос естественно возникает в различных разделах математической экономики. В случае тотальных предпорядков $\preceq_{\omega}$ некоторые достаточные условия существования непрерывной полезности были получены рядом авторов (Mas-Colele; Mount, Reiter; Neufeind; Chishilnisky). Полное решение этой проблемы дано в работах (Левин, 1983б; Levin, 1990)[4]. Заметим, что в случае, когда все

[4] См. также (Levin, 2000).

предпорядки $\preceq_\omega$, $\omega \in \Omega$, являются тотальными, полученные нами условия существования непрерывной полезности не только достаточны, но и необходимы (см. следствие 4). Приведем соответствующие результаты.

Теорема 13 (Левин, 1983а, теорема 1; Levin, 1990, Theorem 9.12; Levin, 2000, Theorem 3.1). *Пусть Ω и X – метризуемые топологические пространства, а X, к тому же, сепарабельно и локально компактно. Предположим также, что для каждого $\omega \in \Omega$ задан предпорядок $\preceq_\omega$ на X, и при этом множество $\{(\omega, x, y) : x \preceq_\omega y\}$ замкнуто в $\Omega \times X \times X$. Тогда существует непрерывная полезность $u : \Omega \times X \to [0, 1]$.*

Эта теорема впервые доказана в (Левин, 1983а) (небольшой пробел в этом доказательстве устранен в (Левин, 1985), см. также (Levin, 2000, Theorem 3.1)). В доказательстве существенно используются теоремы 9 и 10. Как отмечено в (Левин, 1983а), в частном случае, когда пространство параметров Ω сепарабельно и локально компактно, теорема является прямым следствием теоремы 9 для предпорядка $\preceq$ на $\Omega \times X$, определяемого соглашением: $(\omega_1, x_1) \preceq (\omega_2, x_2) \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2, x_1 \preceq_{\omega_1} x_2$. (Формулировка теоремы 13 и ее доказательство для указанного частного случая приведены с ссылкой на нашу работу (Левин, 1983а) в книге (Bridges, Mehta, 1995, § 8.3 "Levin's theorem").)

Следствие 4 (Левин, 1983а, следствие 1; Levin, 1990, Corollary 9.1; Levin, 2000, Corollary 3.1). Предположим, что:

i) Ω и X – такие же, как в теореме 13;

ii) для каждого $\omega \in \Omega$ предпорядок $\preceq_\omega$ определен на непустом подмножестве $\Gamma(\omega) \subseteq X$;

iii) множество $\Phi := \{(\omega, x) : x \in \Gamma(\omega)\}$ замкнуто в $\Omega \times X$.

Рассмотрим два утверждения:

а) множество $M := \{(\omega, x, y): x \in \Gamma(\omega), y \in \Gamma(\omega), x \preceq_\omega y\}$ замкнуто в $\Omega \times X \times X$;

б) существует непрерывная функция $u : \Phi \to [0, 1]$ такая, что $u(\omega, \cdot)$ является функцией полезности $\preceq_\omega$ для всех $\omega \in \Omega$.

Тогда а) $\Rightarrow$ б), а если все $\preceq_\omega$ суть тотальные предпорядки, то а) $\Leftrightarrow$ б).

Пусть P обозначает множество всех замкнутых предпорядков на сепарабельном метризуемом локально компактном пространстве X. Отождествляя предпорядок $\preceq \in P$ с его графиком в $X \times X$, мы рассмотрим на P топологию t, индуцированную экспоненциальной топологией на пространстве замкнутых подмножеств одноточечной компактификации $X \times X$ (определение и свойства экспоненциальной топологии см., например, в (Куратовский, 1966)). Очевидно, (P, t) – метризуемое пространство. Применяя теорему 13 к $\Omega = (P, t)$, получаем такое следствие.

Следствие 5 (теорема об универсальной полезности; см. (Левин, 1983а, следствие 2; Levin, 1990, Corollary 9.2; Levin, 2000, Corollary 3.2). Существует непрерывная функция u : $(P, t) \times X \to [0, 1]$ такая, что для каждого предпорядка $\preceq$ из P $u(\preceq, \cdot)$ есть его функция полезности.

3.2. Функционально замкнутые предпорядки и сильное стохастическое доминирование. Предпорядок $\preceq$ на вполне регулярном пространстве X называется *функционально замкнутым*, если для него справедливо представление (15), в котором H – непустое подмножество $C(X)$. Очевидно, функционально замкнутый предпорядок замкнут. Как следует из доказательства теоремы 9 (см. (Левин, 1983а; Levin, 1990)), каждый замкнутый предпорядок на сепарабельном локально компактном метризуемом пространстве функционально замкнут. Класс функционально замкнутых предпорядков введен в (Левин, 1985).

Теорема 14 (Levin, 1986, Theorem 3). *Пусть $\preceq$ – предпорядок на вполне регулярном пространстве X. Следующие утверждения равносильны:*

а) $\preceq$ функционально замкнут;

б) $\preceq$ есть ограничение на X некоторого замкнутого предпорядка на βX (βX обозначает компактификацию Стоуна–Чеха пространства X);

в) (теорема о продолжении) для каждого компактного множества $F \subset X$ и каждой неубывающей (относительно ограничения $\preceq$ на F) функции $v \in C(F)$ существует неубывающая *(относительно $\preceq$) функция $u \in C^b(X)$, являющаяся продолжением $v(x)$ на X и удовлетворяющая условиям:* $\min u(X) = \min v(F)$, $\max u(X) = \max v(F)$;

г) (теорема об отделимости) пусть F_1 и F_0 – компактные множества в X, и $(F_1 \times F_0) \cap \cap\, gr(\preceq) = \varnothing$, тогда найдется неубывающая непрерывная функция $u : X \to [0, 1]$, равная 1 на F_1 и 0 на F_0.

Следствие 6 (Levin, 2000, Corollary 4.1). Каждый замкнутый предпорядок на компактном пространстве функционально замкнут.

Рассмотрим теперь связь между функционально замкнутыми и стохастическими предпорядками. Очевидно, каждый функционально замкнутый предпорядок допускает представление (15) с $H = H^b(\preceq)$, где $H^b(\preceq)$ – конус всех неубывающих (относительно $\preceq$) функций из $C^b(X)$. Более того,

$$H^b(\preceq) = Q(c), \tag{19}$$

где функция стоимости $c(x, y)$ определена равенством (16).

Обозначим через $M(X)$ множество регулярных борелевских вероятностных мер на X, интерпретируемых как лотереи с исходами в X. Пусть $\preceq$ – замкнутый предпорядок на X. Мы связываем с ним предпорядок $\preceq_*$ на $M(X)$, называемый далее *сильным стохастическим доминированием* и определяемый для σ_1 и σ_2 из $M(X)$ соглашением, что $\sigma_1 \preceq_* \sigma_2$ тогда и только тогда, когда

$$\int_X u(x)\sigma_1(dx) \le \int_X u(x)\sigma_2(dx) \quad \forall u \in H^b(\preceq).$$

Если $(X, \preceq)$ есть $\mathbf{R}$ (или сегмент в $\mathbf{R}$) с естественным порядком $\le$, то $\preceq_*$ совпадает с обычным стохастическим доминированием $\preceq_{SD}$ (см., например, (Маршалл, Олкин, 1983)),

$$\sigma_1 \preceq_{SD} \sigma_2 \Leftrightarrow \sigma_1\{y : y \le x\} \ge \sigma_2\{y : y \le x\} \quad \forall x \in X.$$

Теорема 15 (Levin, 1990, Theorem 9.13). *Предположим, что X гомеоморфно универсально измеримому подмножеству некоторого компакта, и пусть $\preceq$ – замкнутый предпорядок на X. Тогда:*

I) если $\preceq$ функционально замкнут и $\sigma_1 \in M(X)$, $\sigma_2 \in M(X)$,, то следующие утверждения равносильны:

а) $\sigma_1 \preceq_* \sigma_2$;

б) существует мера $\mu \in M(X \times X)$ такая, что $\pi_1\mu = \sigma_1$, $\pi_2\mu = \sigma_2$ и $spt(\mu) \subseteq gr(\preceq)$ (здесь $spt(\mu)$ – носитель меры μ);

II) если для всех σ_1 и σ_2 из $M(X)$ утверждения а) и б) равносильны, то предпорядок $\preceq$ функционально замкнут.

Доказательство опирается на неметризуемую версию теоремы двойственности 2 с учетом равенства (19) и того факта, что для функции стоимости (16) справедливы соотношения

$$\sigma_1 \preceq_* \sigma_2 \Leftrightarrow B(c, \sigma_1 - \sigma_2) = 0 \text{ и } c(\mu) = 0 \Leftrightarrow spt(\mu) \subseteq gr(\preceq).$$

Подробнее см. (Levin, 1990).

Следствие 7. Если $\preceq$ функционально замкнут, то $x \preceq y \Leftrightarrow \varepsilon_x \preceq_* \varepsilon_y$.

Обозначим через $H^b(\preceq, \mathbf{B}(X))$ конус всех неубывающих (относительно $\preceq$) ограниченных борелевских функций на X.

Теорема 16 (Levin, 1990, Theorem 9.14). *Пусть пространство X такое же, как в теореме 15, $\preceq$ – замкнутый предпорядок на X, σ_1 и σ_2 принадлежат $M(X)$. Следующие утверждения равносильны:*

а) $\displaystyle\int_X u(x)\sigma_1(dx) \le \int_X u(x)\sigma_2(dx) \quad \forall u \in H^b(\preceq, \mathbf{B}(X))$;

б) *найдется мера $\mu \in M(X \times X)$ такая, что $\pi_1\mu = \sigma_1$, $\pi_2\mu = \sigma_2$ и $spt(\mu) \subseteq gr(\preceq)$.*

Теорема 16 обобщает аналогичный результат (Kamae, Krengel, O'Brien, 1977), относящийся к случаю, когда X – польское пространство (см. также (Маршалл, Олкин, 1983) для $X = \mathbf{R}^n$ и (Preston, 1974) для конечного X).

Заметим, что если X – вполне регулярное, но не нормальное, топологическое пространство, то на нем существует замкнутый предпорядок, не являющийся функционально замкнутым (Levin, 1990).

В заключение этого пункта приведем две аксиоматические характеризации сильного стохастического доминирования. Будем считать для простоты, что X – компакт, и рассмотрим на пространстве лотерей $M(X)$ слабую* топологию. Тогда $M(X)$ – компакт, и можно говорить о замкнутых предпорядках на нем. Обозначим через $\mathcal{F}(X)^{\preceq}$ класс всех неубывающих замкнутых множеств в X. (Множество A называется неубывающим, если $x \in A, x \preceq y \Rightarrow y \in A$.) Пусть $\preceq'$ – некоторый замкнутый предпорядок на пространстве лотерей $M(X)$, $\sigma_1 \in M(X)$, $\sigma_2 \in M(X)$. Сформулируем несколько аксиом, связывающих предпорядок $\preceq'$ на пространстве лотерей $M(X)$ с исходным предпорядком $\preceq$ на пространстве альтернатив X.

A1. Если $\sigma_1 \preceq' \sigma_2$, то $\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma) \preceq' \frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma) \quad \forall \sigma \in M(X)$.

A2. Если $y \preceq y$, то $\varepsilon_x \preceq' \varepsilon_y \quad \forall (x, y) \in X \times (X)$.

A3. Если $\sigma_1 \preceq' \sigma_2$, то $\sigma_1 F \leq \sigma_2 F \quad \forall F \in \mathcal{F}(X)^{\preceq}$.

Предпорядок $\preceq'$ на $M(X)$ называется *выпуклым*, если $gr(\preceq')$ – выпуклое множество в $M(X) \times M(X)$.

Теорема 17 (Levin, 2000, Theorem 5.1, Corollary 5.1).

I. Сильное стохастическое доминирование удовлетворяет аксиомам A1–A3 и является единственным замкнутым предпорядком на M(X), удовлетворяющим этим аксиомам.

II. Сильное стохастическое доминирование является единственным выпуклым замкнутым предпорядком на M(X), удовлетворяющим аксиомам A2 и A3.

3.3. Нетранзитивные отношения предпочтения, допускающие липшицевы и непрерывные функции полезности. В этом пункте (см. также (Levin, 1991)) в качестве отношений предпочтения рассматриваются произвольные многозначные отображения $R: X \to 2^X$ на пространстве альтернатив X или, что равносильно, бинарные отношения R, $xRy \Longleftrightarrow y \in R(x)$. Каждое такое отображение называется далее *предпочтением*: мы говорим, что y предпочтительнее x, если $y \in R(x)$. Предпорядок $\preceq$ отвечает предпочтению $R(x) := \{y : x \preceq y\}$, но для произвольного предпочтения соответствующее бинарное отношение не обязано быть ни транзитивным, ни рефлексивным.

С каждым предпочтением R связывают строгое предпочтение R_s: $y \in R_s(x) \Longleftrightarrow y \in R(x)$, $x \notin R(y)$. Вещественная функция $u(x)$ на X называется *R-изотонной*, если $y \in R(x) \Rightarrow u(x) \leq u(y)$. R-изотонная функция, для которой $y \in R_s(x) \Rightarrow u(x) < u(y)$, называется *функцией полезности* предпочтения R.

Далее X – сепарабельное метризуемое топологическое пространство, d – метрика на X, согласующаяся с данной топологией. Вещественная функция $u(x)$ называется *d-липшицевой*, если $|u(x) - u(y)| \leq d(x, y)$ для всех x, y из X.

Наша ближайшая цель – охарактеризовать предпочтения R, которые допускают d-липшицевы функции полезности.

Прежде всего заметим, что функция $u(x)$ является одновременно R-изотонной и d-липшицевой тогда и только тогда, когда $u \in Q(c, C(X))$, где

$$c(x, y) = \begin{cases} 0, \text{если } y \in R(x); \\ d(x, y), \text{если нет}, \end{cases} \tag{20}$$

$$Q(c, C(X)) := \{u \in C(X): u(x) - u(y) \leq c(x, y) \quad \forall (x, y) \in X \times X\}. \tag{21}$$

Далее, на X определен функционально замкнутый предпорядок $\preceq$,

$$x \preceq y \Longleftrightarrow u(x) \le u(y)\ \forall u \in Q(c, C(X)),$$

и так как все $u \in Q(c, C(X))$ R-изотонны, то справедлива импликация $y \in R(x) \Rightarrow x \preceq y$. Более того, имеет место эквивалентность $x \preceq y \Longleftrightarrow c_*(x, y) = 0$, и тогда из теоремы 11 вытекает существование d-липшицевой функции полезности для $\preceq$. Она будет также и функцией полезности для R при выполнении условия:

$$y \in R_s(x) \Rightarrow x \prec y. \tag{22}$$

Условие (22) может быть выражено в терминах R и d, и его справедливость не только достаточна, но и необходима для существования d-липшицевой функции полезности предпочтения R.

Чтобы реализовать эту схему, рассмотрим множество $T(y, x)$ всех цепочек $\tau = (z_0 \to z_1 \to \ldots \to z_n)$, где z_i суть элементы X, $z_0 = y$, $z_n = x$, $n = 1, 2, \ldots$ Цепочка τ называется R-неубывающей, если $z_i \in R(z_{i-1})$ либо $z_i = z_{i-1}$ для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Определим (dR)-оценку цепочки τ

$$V_{d,R}(\tau) := \sum_{i=0}^{n} c(z_{i-1}, z_i).$$

Другими словами, $V_{d,R}(\tau)$ есть суммарная плата за движение из y в x по цепочке τ при условии, что переход от z_{i-1} к z_i бесплатен, если z_i предпочтительнее z_{i-1}, и плата за него равна расстоянию между z_{i-1} и z_i в противном случае. Очевидно, цепочка τ является R-неубывающей тогда и только тогда, когда ее оценка равна нулю.

Обозначим через $T_R(y, x)$ подмножество $T(y, x)$, состоящее из цепочек вида

$$\tau = (y_0 \to x_1 \to y_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n \to y_n \to x_{n+1}),$$

где

$$y_k \in R(x_k),\ k = 1, \ldots, n,\ y_0 = y,\ x_{n+1} = x,\quad n = 1, 2, \ldots$$

Такие цепочки будем называть R-регулярными. Для каждой R-регулярной цепочки τ имеем

$$V_{d,R}(\tau) = \sum_{i=0}^{n} d(y_i, x_{i+1}).$$

Как показано в (Levin, 1991), справедливы равенства

$$c_*(x, y) = \inf_{\tau \in T(x,y)} V_{d,R}(\tau) = \inf_{\tau \in T_R(x,y)} V_{d,R}(\tau),$$

и условие (22) может быть переписано в виде

$$y \in R_s(x) \Rightarrow \inf_{\tau \in T(y,x)} V_{d,R}(\tau) = 0. \tag{23}$$

Очевидно, если R допускает какую-нибудь функцию полезности, то при любых $y \in R_s(x)$ невозможно найти R-неубывающую цепочку, ведущую из y в x. Условие (23) является более сильным. Оно утверждает, что если y строго предпочтительнее x (т.е. $y \in R_s(x)$), то не существует цепочки со сколь угодно малой оценкой, ведущей из y в x.

Теорема 18 (Levin, 1991, Theorem 1). *Следующие утверждения равносильны:*

а) существует d-липшицева функция полезности предпочтения R;

б) если y строго предпочтительнее x ($y \in R_s(x)$), *то найдется число* $\delta(y, x) > 0$ *такое, что* $V_{d,R}(\tau) \ge \delta(y, x)$ *для любой цепочки* τ, *ведущей из y в x;*

в) если y строго предпочтительнее x, то найдется число $\delta(y, x) > 0$ *такое, что* $V_{d,R}(\tau) \ge \delta(y, x)$ *для любой регулярной цепочки* τ, *ведущей из y в x.*

Заметим теперь, что всякая непрерывная функция $u(x)$ является d_u-липшицевой относительно метрики $d_u(x, y) := d(x, y) + |u(x) - u(y)|$, и так как, в силу непрерывности $u(x)$, эта метрика согласуется с топологией в X, условия существования непрерывной функции полезности могут быть выведены из теоремы 18. Более того, переходя от $d(x, y)$ и $u(x)$ к $d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ и $u'(x) := \frac{u(x)}{1+d(x,y)|}$, можно считать метрику d_u (и функцию полезности) ограниченными.

Теорема 19 (ср. (Levin, 1991, Corollary 1)). *Обозначим через* $\mathbf{D}$ *множество метрик, согласующихся с топологией* X, *и через* $\mathbf{D}^b$ *его подмножество, состоящее из ограниченных метрик. Следующие утверждения равносильны:*

а) существует непрерывная функция полезности предпочтения R;

б) найдется метрика $d \in \mathbf{D}$, *для которой справедливо утверждение б) теоремы* 18;

в) найдется метрика $d \in \mathbf{D}$, *для которой справедливо утверждение в) теоремы* 18;

г) найдется метрика $d \in \mathbf{D}^b$, *для которой справедливо утверждение б) теоремы* 18;

д) найдется метрика $d \in \mathbf{D}^b$, *для которой справедливо утверждение в) теоремы* 18.

4. ЗАДАЧИ РАЦИОНАЛЬНОГО ВЫБОРА

Различным аспектам (как правило, не топологическим) теории рационального выбора посвящена огромная литература. В этом разделе (см. также (Levin, 1991; Левин, 2004b; Levin, 2005)) изучаются условия рационализируемости выбора посредством функций полезности, обладающих свойствами непрерывности. Получено решение двух задач рационального выбора (в весьма общей абстрактной постановке и в рамках теории спроса). Ответ дается в терминах, связанных с общей задачей Монжа–Канторовича, и представляет собой некоторое усиление сильной аксиомы выявленного предпочтения и обобщение непараметрического метода Африата–Вэриана.

4.1. Абстрактная постановка задачи рационального выбора. Пусть $\mathbf{M}$ – семейство непустых подмножеств X, объединением которых служит все X. Предположим, что в каждом $M \in \mathbf{M}$ выбрано некоторое подмножество $\varphi(M)$. Функция выбора называется *рациональной*, если найдется вещественная функция $u(x)$ на X такая, что

$$\varphi(M) = \left\{x \in M : u(x) = \max_{y \in M} u(y)\right\} \forall M \in \mathbf{M}.$$

В таком случае также говорят, что $u(x)$ есть функция полезности, *рационализирующая* выбор φ.

Теорема 20 (Levin, 1991, Corollary 2). *Пусть* (X, d) *– сепарабельное метрическое пространство,* $\mathbf{M}$ *– семейство непустых подмножеств в нем, объединением которых служит все* X, *и* φ *– функция выбора на* $\mathbf{M}$. *Следующие утверждения равносильны:*

а) существует липшицева функция полезности, рационализирующая выбор φ;

б) фиксируем как угодно $M \in \mathbf{M}$ *и элементы* $x \in M \setminus \varphi(M)$ *и* $y \in \varphi(M)$; *тогда найдется* $\varepsilon = \varepsilon(M, x, y) > 0$ *такое, что для любых натурального числа* n, *множеств* $M_1, \ldots, M_n$ *из* $\mathbf{M}$ *и элементов* $x_k \in M_k$, $y_k \in \varphi(M_k)$, $k = 1, \ldots, n$, *справедливо неравенство* $\sum_{k=1}^{n+1} d(y_{k-1}, x_k) \geq \varepsilon$, *где* $y_0 = y$, $x_{n+1} = x$.

Замечание 4. Очевидно, *б)* влечет за собой следующий вид *сильной аксиомы выявленного предпочтения*: в X не существует цепочки $z_0 \to z_1 \to \ldots \to z_n$ с $z_0 \in \varphi(M)$, $z_n \in M \setminus \varphi(M)$, $z_k \in M_{k+1} \cap \varphi(M_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, где $M_0 = M_{n+1} = M$, $M_1, \ldots, M_n \in \mathbf{M}$.

Теорема 20 вытекает из теоремы 18 для предпочтения $R(x) := \{y : \exists M \in \mathbf{M} : x \in M, y \in \varphi(M)\}$, если проверить, что $y \in R_s(x) \Longleftrightarrow [\exists M \in M : x \in \mathbf{M} \setminus \varphi(M),\ y \in \varphi(M)]$. Подробности см. (Levin, 1991). Аналогично, следующий результат выводится из теоремы 19.

Теорема 21 (Levin, 1991, Corollary 3). *Пусть* X *– сепарабельное метризуемое пространство,* $\mathbf{M}$ *и* φ *– такие же, как в теореме* 20. *Следующие утверждения равносильны:*

а) существует непрерывная функция полезности, рационализирующая φ;

б) утверждение б) теоремы 20 выполнено для некоторой метрики $d \in \mathbf{D}^b$, *где* $\mathbf{D}^b$ *– множество ограниченных метрик, согласующихся с топологией* X.

4.2. Рациональный выбор в теории потребительского спроса. Пусть заданы: некоторое подмножество P в $\operatorname{int}\mathbf{R}^n_+$, называемое далее *множеством цен*, и функция $I: P \to (0, +\infty)$, показывающая доход потребителя при данных ценах. (Два важных частных случая функции дохода: доход, не зависящий от цен, $I(p) = 1$ и $I(p) = p\omega$, где $\omega \in \mathbf{R}^n_+$ – принадлежащий данному потребителю набор продуктов.) Множество $B(p) := \{q \in \mathbf{R}^n_+ : pq \le I(p)\}$ называется *бюджетным множеством* потребителя при ценах p, а отображение $B : p \mapsto B(p)$ *бюджетным отображением*. Далее под *функцией спроса* понимается всякое отображение $f : P \to \mathbf{R}^n_+$, для которого $f(p) \in B(p) \cap \operatorname{int}\mathbf{R}^n_+$ при всех $p \in P$. Будем говорить, что функция полезности $U : \mathbf{R}^n_+ \to \mathrm{R} \cup \{-\infty\}$ *рационализирует* спрос f, если $U(f(p)) \ge U(q)$ для всех $q \in B(p)$. Если при этом $U(f(p)) > U(q)$ для $q \in B(p) \setminus \{f(p)\}$, то мы говорим, что U *строго рационализирует* f.

С каждой функцией $\lambda : P \to \mathbf{R}_+$ мы свяжем функцию стоимости c_λ на $P \times P$,

$$c_\lambda(p, p') := \lambda(p')(p'f(p) - I(p')). \tag{24}$$

Пусть функция полезности U рационализирует спрос f. Будем говорить, что функция $\lambda : P \to \mathbf{R}_+$ *совместима* с U, если для любого $p \in P$ выполняются соотношения:

$$\lambda(p)(pf(p) - I(p)) = 0, \tag{25}$$

$$U(f(p) \ge U(q) + \lambda(p)(I(p) - pq) \quad \forall q \in \mathbf{R}^n_+, \tag{26}$$

т.е. (в случае вогнутой U) $\lambda(p)$ является множителем Лагранжа–Куна–Такера в задаче максимизации U на $B(p)$.

Функция на множестве цен $u(p) := \sup\{U(q) : q \in B(p)\},\ p \in P$ называется *косвенной функцией полезности*, ассоциированной с U.

Напомним (см. Введение), что по аналогии с $Q(c_\lambda)$ можно рассмотреть множество ограничений абстрактного (не топологического) варианта двойственной ЗМК с фиксированной разностью маргинальных мер

$$Q_0(c_\lambda) = \{u \in \mathbf{R}^X : u(x) - u(y) \le c_\lambda(x, y)\ \forall (x, y) \in X \times X\}.$$

Теорема 22 (Levin, 2005, Theorem 2). *Пусть f – функция спроса; тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если функция полезности $U: \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ с* dom $U \supseteq f(P)$ *вогнута и рационализирует спрос f, то найдется функция $\lambda: P \to \mathbf{R}_+$, удовлетворяющая (25) при всех $p \in P$, и такая, что ассоциированная с U косвенная функция полезности $u(p) = U(f(p))$ принадлежит $Q_0(c_\lambda)$. В таком случае, $\lambda(p)p$ есть суперградиент U в $f(p)$:*

$$\lambda(p)p \in \partial' U(f(p)) \quad \forall p \in P. \tag{27}$$

Если, к тому же, U строго рационализирует f, то справедлива импликация:

$$f(p') \in B(p) \setminus \{f(p)\} \Rightarrow u(p) > u(p'). \tag{28}$$

2. *Если $\lambda: P \to \mathbf{R}_+$ удовлетворяет* (25), *а $u \in Q_0(c_\lambda)$, то найдется неубывающая полунепрерывная сверху вогнутая функция $U : \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ такая, что* dom $U \supseteq f(P)$, *U рационализирует f, λ совместима с U, и $u(p)$ является косвенной функцией полезности, ассоциированной с U. В качестве такой функции полезности можно взять*

$$U(q) := \inf_{p \in P}\left(u(p) + \lambda(p)(pq - I(p))\right). \tag{29}$$

3. *Пусть λ и $u(p)$ – такие же, как в п. 2, и, кроме того, предположим, что выполнено* (28), *а множество $f(P)$ открыто либо выпукло и замкнуто. Тогда найдется полунепрерывная сверху вогнутая функция полезности U такая, что* dom $U \supseteq f(P)$, *$u(p)$ является косвенной функцией полезности, ассоциированной с U, и U строго рационализирует f.*

4. *Если λ удовлетворяет* (25), *то $Q_0(c_\lambda)$ непусто тогда и только тогда, когда для каждого натурального числа l и каждого цикла $p^1, \ldots, p^l,\ p^{l+1} = p^1$ в P выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{l} \lambda(p^{k+1}) p^{k+1}\left(f(p^k) - f(p^{k+1})\right) \ge 0.$$

Замечание 5. Если f рационализируется вогнутой функцией U, которая дифференцируема в $f(p)$, $p \in P$, то из (27) вытекает равенство

$$\lambda(p) = \frac{\nabla U(f(p)) f(p)}{pf(p)}, \quad p \in P.$$

Функция спроса f называется *ненасыщаемой*, если $pf(p) = I(p)$ для всех $p \in P$. Для таких функций условие (25) выполняется автоматически. Условие непустоты, даваемое теоремой 22 (см. утверждение 4), тесно связано с аксиомами выявленного предпочтения. Можно показать (см. (Levin, 2005, Proposition 1)), что если существуют λ и $u \in Q_0(c_\lambda)$, удовлетворяющие условиям (25) и (28), то для f выполняется сильная аксиома выявленного предпочтения Хаутеккера SARP (Houthakker, 1950), а если спрос f ненасыщаем, функция λ строго положительна и $Q_0(c_\lambda)$ непусто, то f удовлетворяет обобщенной аксиоме выявленного предпочтения Вэриана GARP (Varian, 1982).

В следующей теореме мы рассматриваем широкий класс вогнутых функций полезности и даем полное описание функций из этого класса, рационализирующих данную ненасыщаемую функцию спроса.

Теорема 23 (Levin, 2005, Theorem 3). *Предположим, что* $U : \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R}$ *– полунепрерывная сверху вогнутая функция полезности, и для каждого* $q \in \inf \mathbf{R}^n_+$ *множество* $\partial' U(q) \cap \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+$ *непусто. Пусть* $f : P \to \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+$ *есть ненасыщаемая функция спроса, тогда следующие утверждения равносильны:*

а) U *рационализирует* f, *и существует строго положительная функция* $\lambda(p)$, $p \in P$, *совместимая с* U;

б) U *представима в виде*

$$U(q) = \inf_{p' \in P'} \left(u'(p') + \lambda'(p') p'(q - f'(p')) \right), \; q \in \mathbf{R}^n_+, \tag{30}$$

где

$$P \subseteq P' \subseteq \mathbf{R}^n_+, \;\; f' : P' \to \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+, \;\; f' \,|\, P = f, \; \lambda' : P' \to \operatorname{int} \mathbf{R}_+,$$

$$u' \in Q_0(c_\lambda), \; c_{\lambda'}(p, p') := = \lambda'(p') p'(f'(p) - f'(p')) \; \forall (p, p') \in P' \times P'.$$

Теорема 24 (Levin, 2005, Theorem 6). *Предположим, что* P *есть область, функции* $f' : P' \to \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+$, *и* $\lambda : P \to \mathbf{R}_+$ *непрерывны и выполнено условие* (25).

I. Предположим, что f *рационализируется вогнутой функцией полезности* $U : \mathbf{R}^n_+ \to \operatorname{int} \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ *c* $\operatorname{dom} U \supseteq f(P)$, *и* λ *совместима с* U. *Пусть* $u(p) = U(f(p))$ *есть косвенная функция полезности, ассоциированная с* U. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

i) $u(p)$ *непрерывна и принадлежит* $Q_0(c_\lambda)$;

ii) если f *и* λ *гладкие класса* C^r, *где* r *– натуральное число или* $+\infty$, *то* $u(p)$ *– тоже гладкая* C^r, *и* $u(p) - u(p') = c_{\lambda *}(p, p')$ *при всех* $(p, p') \in P \times P$,, *где* $c_{\lambda *}$ *– редуцированная функция стоимости,*

$$c_{\lambda *}(p, p') = \inf_k \; \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} c_\lambda(p^{i-1}, p^i) : p^1, \ldots, p^{k-1} \in P, p^0 = p, p^k = p' \right\}.$$

Более того, в таком случае

$$\frac{\partial u(p)}{\partial p_i} = \lambda(p) \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial f_k(p)}{\partial p_i}, \quad p = (p_1, \ldots, p_n), \; i = 1, \ldots, n,$$

и для каждого $p \in P$ *матрица* $M(p) = (m_{ij}(p))_{ij}$,

$$m_{ij}(p) := \frac{\partial \lambda(p)}{\partial p_i} \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial f_k(p)}{\partial p_j} + \lambda(p) \frac{\partial f_i(p)}{\partial p_j},$$

симметрична и отрицательно полуопределена.

II. Предположим, что область P выпукла, функции f и λ – гладкие C^2, для каждого $p \in P$ матрица $M(p)$ симметрична, и для любых p, p′ из P справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\lambda(p')}{\partial p'_i}p'(f(p)-f(p'))+\lambda(p')(f_i(p)-f_i(p'))\right)(p_i-p'_i)\le 0.$$

Тогда f рационализируется неубывающей полунепрерывной сверху вогнутой функцией с $U\colon \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ с $\operatorname{dom} U \supseteq f(p)$, λ совместима с U, и ассоциированная с U косвенная функция полезности является гладкой C^2 и принадлежит $Q_0(c_\lambda)$.

Теорема 25 (Levin, 2005, Corollary 3; Levin, 2006, Theorem 11). *Пусть $f : P \to \operatorname{int}\mathbf{R}^n_+$ – ненасыщаемая функция спроса. Следующие утверждения равносильны:*

а) существует положительно однородная функция полезности $U : \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R}_+$, которая рационализирует f и строго положительна на f(P);

б) существует положительно однородная непрерывная вогнутая функция полезности $U : \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R}_+$, которая рационализирует f и строго положительна на f(P);

в) для функции стоимости ξ на P × P, определяемой равенством

$$\xi(p,p') := \ln(p'f(p)) - \ln(p'f(p')), \tag{31}$$

множество $Q_0(\xi)$ непусто;

г) для каждого цикла $p^1, ..., p^l$, $p^{l+1} = p^1$ в P выполняется неравенство

$$\prod_{k=1}^{l} p^{k+1}f(p^k) \ge \prod_{k=1}^{l} p^k f(p^k); \tag{32}$$

д) существует строго положительное решение системы неравенств

$$u(p) \ge \frac{p\,f(p)}{p\,f(p')}\,u(p') \tag{33}$$

для всех p, p′ из P.

Здесь функции $U(q)$ и $u(p)$ связаны равенством $u(p) = U(f(p))$, $p \in P$, т.е. $u(p)$ – косвенная функция полезности, ассоциированная с U. При этом $\lambda(p) := U(f(p))/I(p)$ – единственная совместимая с U функция $P \to \mathbf{R}_+$ (см. (Levin, 2005, Proposition 5)), и имеет место цепочка эквивалентностей

$$u \in Q_0(c_\lambda) \Longleftrightarrow [u(p) \text{ удовлетворяет } (33)] \Longleftrightarrow \ln u \in Q_0(\xi).$$

Замечание 6. Утверждение *г)* представляет собой некоторое усиление "положительно полуоднородного" варианта сильной аксиомы выявленного предпочтения, а утверждение *д)* обобщает соответствующий вариант теории Африата–Вэриана (Afriat, 1967, 1973; Varian, 1982, 1983) на случай бесконечного множества наблюдаемых данных (в случае конечного множества P (33) превращается в систему неравенств Африата–Вэриана для "торговой статистики" $\{(p, f(p)) : p \in P\}$).

Замечание 7. Если $f(P)$ открыто, то справедливы аналогичные характеризации строгой рационализируемости; см. (Levin, 2005, Corollary 3).

Замечание 8. Аналогичный подход, опирающийся на данные в (Левин, 1990; Levin, 1997a) условия непустоты множества $Q(c)$ ограничений двойственной ЗМК, применялся к специальным (гладким) функциям стоимости $c(q, q')$ при изучении рационализируемости *обратных* функций спроса; см. также (Carlier et al., 2002).

5. ТЕОРИЯ КОЛЛЕКТИВНОЙ ПОЛЕЗНОСТИ

В этом разделе (см. также (Levin, 2009b, 2010a)) рассматривается следующая модель коллективного выбора. Даны: множество участников (экономических агентов, или, в другой интерпретации, экспертов) $N = \{1, ..., n\}$, множество возможных альтернатив (состояний общества или конкурирующих проектов) X и множество допустимых индивидуальных функций полезности участников $U \subset \mathbf{R}^X$. Следуя Сену (Sen, 1970), под *функционалом общественного благосостояния*[5] (англ. *Social Welfare Functional*) мы понимаем отображение f, переводящее профиль индивидуальных полезностей $(u_1, ..., u_n) \in U^n$ в коллективное предпочтение $\preceq = f(u_1, ..., u_n) \in \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ – множество всех тотальных предпорядков на X. Положим

$$M = \{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n\colon \mathbf{a} = \mathbf{u}(x), \mathbf{u} = (u_1, ..., u_n) \in U^n, \ x \in X\} \tag{34}$$

и определим на нем бинарное отношение $\preceq_M$,

$$\mathbf{a} \preceq_M \mathbf{b} \Longleftrightarrow [\exists \mathbf{u} \in U^n, \ x, y \in X\colon \mathbf{u}(x) = \mathbf{a}, \ \mathbf{u}(y) = \mathbf{b}, \ xf(\mathbf{u})y].$$

В публикациях, посвященных функционалам общественного благосостояния, обычно предполагается, что множество допустимых функций полезности U состоит из всех (или всех ограниченных) вещественных функций на X; это предположение известно как условие *универсальности области* (англ. *unrestricted domain assumption*); см., например, (d'Aspremont, Gevers, 1977; Maskin, 1978). Мы не делаем этого предположения и рассматриваем более общие классы U. Приведем пример с бесконечным множеством альтернатив X.

Пример 2. Предположим, что мы должны распределить единичный ресурс между m базовыми проектами. Пусть X есть симплекс, т.е. множество векторов $x = (\xi_1, ..., \xi_m) \in \mathbf{R}_+^m$, удовлетворяющих равенству $\xi_1 + ... + \xi_m = 1$, где ξ_j – доля ресурса, предназначенная для реализации проекта j. Имеется n экспертов, оценка экспертом i вектора распределения ресурса x дается значением индивидуальной функции полезности $u_i(x)$, а коллективное суждение о сравнительной ценности различных векторов определяется предпочтением $\preceq = f(u_1, ..., u_n)$. В этом примере условие универсальности области является излишне ограничительным. Более реалистично считать, что U состоит из неотрицательных непрерывных вогнутых функций (или даже из неотрицательных линейных функций) на X.

Следуя (Levin, 2009b), будем говорить, что пространство полезностей U^n удовлетворяет *сильному условию сборки* (англ. *strong assembling*) **StAs**, если для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in M$ найдутся $\mathbf{u} \in U^n$ и $x, y, z \in X$ такие, что $\mathbf{u}(x) = \mathbf{a}$, $\mathbf{u}(y) = \mathbf{b}$ и $\mathbf{u}(z) = \mathbf{c}$. Очевидно, что **StAs** значительно слабее условия универсальности. Легко видеть, что условие **StAs** выполнено для приведенного выше примера; подробнее см. (Levin, 2009b, 2010a). Очевидно, что из него следует более слабое *условие сборки* **As**: для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M$ найдутся $\mathbf{u} \in U^n$ и $x, y \in X$ такие, что $\mathbf{u}(x) = \mathbf{a}$, $\mathbf{u}(y) = \mathbf{b}$. Далее, так как $f(\mathbf{u})$ тотально, отсюда вытекает тотальность $\preceq_M$: любые два элемента $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M$ сравнимы, т.е. выполнено, по крайней мере, одно из двух соотношений, $\mathbf{a} \preceq_M \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} \preceq_M \mathbf{a}$.

Функционал общественного благосостояния f называется *утилитарным* (или *утилитаризмом*), если он может быть представлен суммой индивидуальных функций полезности: для любых $x, y \in X$,

$$xf(u_1, ..., u_n)y \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \le \sum_{i=1}^{n} u_i(y).$$

Некоторые аксиоматические характеризации утилитаризма даны в работах (d'Aspremont, Gevers, 1977; Maskin, 1978). В обоих случаях из условия универсальности области следует, что множество M (34) совпадает с $\mathbf{R}^n$. Ниже (см. также (Levin, 2009в)) дана другая аксиоматическая характеризация утилитаризма. В отличие от упомянутых работ мы не требуем универсальности области и не используем сильную аксиому Парето.

Перечислим ряд аксиом, которым может удовлетворять или не удовлетворять функционал общественного благосостояния f. (Их подробное обсуждение и сравнение с аксиомами из (d'Aspremont, Gevers, 1977; Maskin, 1978) см. (Levin, 2009b).)

Cl (замкнутость). Если $\mathbf{u}^k \in U^n$, x_k, $y_k \in X$, $x_k f(\mathbf{u}^k) y_k$, $k = 1, 2, ...$, $\mathbf{u} \in U^n$, $x, y \in X$ и $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{u}^k(x_k) = \mathbf{u}(x)$, $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{u}^k(y_k) = \mathbf{u}(y)$, то $xf(\mathbf{u})y$.

Если выполнено условие **As**, то из **Cl** следует, что бинарное отношение $\preceq_M$ замкнуто, т.е. его график есть замкнутое подмножество в $M \times M$. При выполнении более сильного условия универ-

[5] Мы пользуемся устоявшейся терминологией, хотя в математическом смысле это никакой не функционал.

сальности области справедливо равенство $M = \mathbf{R}^n$ и **CI** превращается в аксиому непрерывности (Maskin, 1978).

TI (инвариантность относительно сдвигов). Пусть $\mathbf{u} \in U^n$, $x, y \in X$, $xf(\mathbf{u})y$ и $c \in \mathbf{R}^n$. Если найдутся $\mathbf{v} \in U^n$ и $x', y' \in X$ такие, что $\mathbf{v}(x') = \mathbf{u}(x) + \mathbf{c}$, $\mathbf{v}(y') = \mathbf{u}(y) + \mathbf{c}$, то $x'f(\mathbf{v})y'$.

Эта аксиома усиливает известное условие *нейтральности*: для любых x, y, x_1, y_1 из X, удовлетворяющих равенствам $u_i(x) = v_i(x_1)$, $u_i(y) = v_i(y_1)$, $i \in N$, имеет место эквивалентность $xf(u_1, ..., u_n)y \Leftrightarrow x_1 f(v_1, ..., v_n)y_1$.

A (анонимность). Для любых профиля $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n) \in U^n$ и перестановки $\pi : N \to N$ справедливо равенство $f(u_1, ..., u_n) = f(u_{\pi(1)}, ..., u_{\pi(n)})$.

Это – хорошо известная традиционная аксиома; см., например, (Sen, 1970; d'Aspremont, Gevers, 1977; Maskin, 1978).

QP (квази-паретовский принцип). Если $\mathbf{u} \in U^n$ и $x, y \in X$, то $\mathbf{u}(x) \le \mathbf{u}(y) \Rightarrow xf(\mathbf{u})y$.

Эта аксиома существенно слабее любого из традиционных принципов (условий) Парето.

NT (нетривиальность). Существуют $\mathbf{u} \in U^n$ и $x, y \in X$ такие, что $x \prec y$, где $\prec$ – строгое предпочтение, отвечающее $\preceq = f(\mathbf{u})$.

Теорема 26 (Levin, 2009, Theorem 1). *Предположим, что множество M (34) замкнуто или открыто. Также предположим, что выполняется условие* **StAs** *и M устойчиво относительно положительных сдвигов:* $\mathbf{a} \in M$, $c \in \mathbf{R}^n_+ \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{c} \in M$.

Функционал общественного благосостояния f является утилитаризмом тогда и только тогда, когда выполняются аксиомы **CI, TI, A, QP** *и* **NT**.

Необходимость проверяется легко. Главные моменты доказательства достаточности состоят в следующем. Из сформулированных аксиом следует, что $\preceq_M$ есть тотальный замкнутый предпорядок на M (транзитивность выводится из **StAs** и **TI**), удовлетворяющий условию:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M,\ \mathbf{c} \in \mathbf{R}^n,\ \mathbf{a} + \mathbf{c},\ \mathbf{b} + \mathbf{c} \in M,\ \mathbf{a} \preceq_M \mathbf{b}] \Rightarrow (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \preceq_M (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \qquad (35)$$

Тогда из (Levin, 2008, Corollary 3.1) вытекает существование линейной функции полезности для $\preceq_M$, а из аксиомы анонимности **A** выводится, что этой линейной функцией может служить сумма координат. Существование линейной функции полезности для $\preceq_M$, в свою очередь, доказывается с помощью теоремы 9, т.е. в конечном счете, опираясь на двойственность Монжа–Канторовича. Аналогичный метод применим и к задачам аксиоматической характеризации коллективных функций полезности утилитарного типа (Levin, 2010b) и коллективных предпочтений, представимых функциями полезности специального вида (Levin, 2010a).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Канторович Л.В. (1942): О перемещении масс // *ДАН*. Т. 37. № 7–8.

Канторович Л.В. (1948): Об одной проблеме Монжа // *УМН*. Т. 3. № 2.

Канторович Л.В., Акилов Г.П. (1984): Функциональный анализ. М.: Наука.

Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. (1957): Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах // *ДАН*. Т. 115.

Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. (1958): Об одном пространстве вполне аддитивных функций // *Вестник ЛГУ. Сер. мат., мех. и астр*. Т. 13. № 7.

Кирута А.Я., Рубинов А.М., Яновская Е.Б. (1980): Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах. Л.: Наука.

Куратовский К. (1966): Топология. Т. 1. М.: Мир.

Левин В.Л. (1974): Двойственность и аппроксимация в задаче о перемещении масс. В кн.: "*Математическая экономика и функциональный анализ*". М.: Наука.

Левин В.Л. (1975): К задаче о перемещении масс // *ДАН*. Т. 224. № 5.

Левин В.Л. (1977): О теоремах двойственности в задаче Монжа–Канторовича // *УМН*. Т. 32. № 3.

Левин В.Л. (1978): Задача Монжа–Канторовича о перемещении масс. В кн.: "*Методы функционального анализа в математической экономике*". М.: Наука.

Левин В.Л. (1981): Некоторые приложения двойственности для задачи о перемещении масс с полунепрерывной снизу функцией стоимости. Замкнутые предпочтения и теория Шоке // *ДАН*. Т. 260. № 2.

Левин В.Л. (1983а): Теорема о непрерывной полезности для замкнутых предпорядков на метризуемом σ-компактном пространстве // *ДАН*. Т. 273. № 4.

Левин В.Л. (1983б): Теоремы об измеримой полезности для замкнутых и лексикографических отношений предпочтения // *ДАН*. Т. 270. № 3.

Левин В.Л. (1984): Задача о перемещении масс в топологическом пространстве и вероятностные меры на произведении двух пространств, обладающие заданными маргинальными мерами // *ДАН*. Т. 276. № 5.

Левин В.Л. (1984): Липшицевы предпорядки и липшицевы функции полезности // *УМН*. Т. 39. № 6.

Левин В.Л. (1985): Функционально замкнутые предпорядки и сильное стохастическое доминирование // *ДАН*. Т. 283. № 1.

Левин В.Л. (1987): Измеримые селекторы многозначных отображений и задача о перемещении масс // *ДАН*. Т. 292. № 5.

Левин В.Л. (1990): Формула для оптимального значения задачи Монжа–Канторовича с гладкой функцией стоимости и характеризация циклически монотонных отображений // *Мат. сборник*. Т. 181. № 12.

Левин В.Л. (1996): Теоремы двойственности для нетопологического варианта задачи о перемещении масс // *ДАН*. Т. 350. № 5.

Левин В.Л. (1997): К теории двойственности для нетопологических вариантов задачи о перемещении масс // *Мат. сборник*. Т. 188. № 4.

Левин В.Л. (1998): Существование и единственность сохраняющего меру оптимального отображения в общей задаче Монжа–Канторовича // *Функциональный анализ и его приложения*. Т. 32. № 3.

Левин В.Л. (2002): Условия оптимальности для гладких решений Монжа задачи Монжа–Канторовича // *Функциональный анализ и его приложения*. Т. 36. № 2.

Левин В.Л. (2003): Решение задач Монжа и Монжа–Канторовича: теория и примеры // *ДАН*. Т. 388. № 1.

Левин В.Л. (2004а): Метод в математической теории спроса, связанный с двойственностью Монжа–Канторовича // *ДАН*. Т. 398. № 5.

Левин В.Л. (2004б): Условия оптимальности и точные решения двумерной задачи Монжа–Канторовича // *Записки научных семинаров ПОМИ*. Т. 312. Специальный выпуск "Теория представлений. Динамические системы XI" (отв. ред. А.М. Вершик).

Левин В.Л. (2006): Задачи наилучшего приближения, связанные с двойственностью Монжа–Канторовича // *Мат. сборник*. Т. 197. № 9.

Левин В.Л. (2008а): О типичной единственности оптимального решения в бесконечномерной задаче линейного программирования // *ДАН*. Т. 421. № 1.

Левин В.Л. (2008б): Гладкие допустимые решения двойственной задачи Монжа–Канторовича и их применение в задачах наилучшего приближения и математической экономики // *ДАН*. Т. 419. № 5.

Левин В.Л. (2011): Общие предпочтения и функции полезности. Подход на основе двойственной задачи Канторовича // *ДАН*. Т. 437. № 5.

Левин В.Л., Милютин А.А. (1979): Задача о перемещении масс с разрывной функцией стоимости и массовая постановка проблемы двойственности выпуклых экстремальных задач // *УМН*. Т. 34. № 3.

Маршалл А.В., Олкин И. (1983): Неравенства: Теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир.

Afriat S.N. (1967): The Construction of Utility Functions from Expenditure Data // *Intern. Econ. Rev.* Vol. 8.

Afriat S.N. (1973): On a System of Inequalities on Demand Analysis: an Extension of the Classical Method // *Intern. Econ. Rev.* Vol. 14.

Bridges D.S., Mehta G.B. (1995): Representations of Preference Orderings. LN in Economics and Mathem. Systems. Vol. 422. Springer.

Carlier G., Levin V.L., Shananin A.A. et al. (2002): A System of Inequalities Arising in Mathematical Economics and Connected with the Monge–Kantorovich Problem. Working Paper, Ceremade – UMR 7534 – Univ. Paris Dauphine.

d'Aspremont C., Gevers L. (1977): Equity and the Informational Basis of Collective Choice // *Rev. of Econ. Studies*. Vol. 44.

Debreu G. (1954): Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function. In: "*Decision Processes*". N.Y.: Wiley.

Debreu G. (1964): Continuity Properties of Paretian Utility // *Intern. Econ. Rev.* Vol. 5.

Houthakker H.S. (1950): Revealed Preference and the Utility Function // *Economica*. Vol. 17.

Kamae T., Krengel U., O'Brien G.L. (1977): Stochastic Inequalities on Partially Ordered Spaces // *Ann. Probab.* Vol. 5.

Levin V.L. (1986): Extremal Problems with Probability Measures, Functionally Closed Preorders and Strong Stochastic Dominance. In: "*Stochastic Optimization*". LN in Control and Inform. Sci. Vol. 81. Springer. Berlin.

Levin V.L. (1990): General Monge–Kantorovich Problem and its Applications in Measure Theory and Mathematical Economics. In: "*Functional Analysis, Optimization, and Mathematical Economics (A collection of papers dedicated to memory of L.V. Kantorovich)*". L.J. Leifman (ed.) N.Y., Oxford: Oxford University Press.

Levin V.L. (1991): Some Applications of Set-Valued Mappings in Mathematical Economics // *J. of Math. Econ.* Vol. 20.

Levin V.L. (1996a): A Superlinear Multifunction Arising in Connection with Mass Transfer Problems // Set-Valued Analysis , Vol. 4.

Levin V.L. (1997a): Reduced Cost Functions and Their Applications // *J. of Math. Econ.* Vol. 28.

Levin V.L. (1997b): Topics in the Duality Theory for Mass Transfer Problem. In: "*Distributions with Given Marginals and Moment Problems*" BeneV. , těpan J. (eds). Dordrecht: Kluwer.

Levin V.L. (1999): Abstract Cyclical Monotonicity and Monge Solutions for the General Monge–Kantorovich Problem // *Set-Valued Analysis*. Vol. 7.

Levin V.L. (2000): A Method in Utility Theory Connected with the Monge–Kantorovich Problem. Working Paper WP/2000/089. M.: CEMI.

Levin V.L. (2001a): On Generic Uniqueness of Optimal Solutions for the General Monge–Kantorovich Problem // *Set-Valued Analysis*. Vol. 9.

Levin V.L. (2001b): The Monge–Kantorovich Problems and Stochastic Preference Relations // *Adv. Math. Econ.* Vol. 3.

Levin V.L. (2004): Optimal Solutions of the Monge Problem // *Adv. Math. Econ.* Vol. 6.

Levin V.L. (2005): A Method in Demand Analysis Connected with the Monge–Kantorovich Problem // *Adv. Math. Econ.* Vol. 7.

Levin V.L. (2006): Abstract Convexity and the Monge–Kantorovich Duality. In: LN in Economics and Mathematical Systems. Vol. 583. Springer.

Levin V.L. (2008): On preference relations that admit smooth utility functions // Adv. Math. Econ. Vol. 11.

Levin V.L. (2009a): Smooth Feasible Solutions to a dual Monge–Kantorovich Problem with Applications to Best Approximation and Utility Theory in Mathematical Economics // *Adv. Math. Econ.* Vol. 12.

Levin V.L. (2009b): New Axiomatic Characterizations of Utilitarianism // *Math. Soc. Sci.* Vol. 58.

Levin V.L. (2010a): On Collective Utility Functions Admitting Linear Representations // *J. of Math. Econ.* Vol. 46.

Levin V.L. (2010b): On Social Welfare Functionals: Representation Theorems and Equivalence Classes // *Math. Soc. Sci.* Vol. 59.

Maskin E. (1978): A Theorem on Utilitarianism // *Rev. of Econ. Studies*. Vol. 45.

Preston C.J. (1974): A Generalization of the FKG Inequalities // *Comm. Math. Phys.* Vol. 36.

Sen A.K. (1970): Collective Choice and Social Welfare. San Francisco: Holden-Day.

Varian H.R. (1982): The Nonparametric Approach to Demand Analysis // *Econometrica*. Vol. 50.

Varian H.R. (1983): Non-Parametric Tests of Consumer Behaviour // *The Rev. of Econ. Studies*. Vol. V(1). № 160.

Поступила в редакцию
10.06.2011 г.

Monge–Kantorovich Duality Theory and its Application in the Utility Theory

V. L. Levin

An article reviews the developments of duality theory for the Monge–Kantorovich general problem and its application in the utility theory.

Keywords: duality theory, Monge–Kantorovich duality, utility theory.