

во-вторых, и это главное, спорно последующее отнесение расчетной прибыли к стоимости основных и оборотных средств. Коль скоро предприятие внесло обществу положенные платежи за использованные ресурсы, оно вправе самостоятельно распоряжаться остатком прибыли без всякого ее отнесения к фондам. Если сейчас нет для этого должных условий, то их следовало бы последовательно создавать (ввести более обоснованный уровень платы за фонды, процентов за кредиты, фиксированные платежи, налог на нетто-прибыль и т. д.).

Целесообразно также изменить порядок финансирования оборотных средств. Для этого нужно использовать не ежегодные выделения обществом тех или иных сумм каждому предприятию, а подлинно хозрасчетные источники. Это способствовало бы усилению самоокупаемости, материальной ответственности и более высокой эффективности использования оборотных средств.

Поступила в редакцию
13 IV 1968

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

В. Л. ИНОСОВ, Н. В. СВЯТСКАЯ

(Киев)

Основным требованием материально-технического снабжения является высокая его экономичность. В теории управления запасами это требование удовлетворяется достижением минимальных суммарных издержек от содержания страховых запасов и простоя, возникающего за счет нехватки материала. Для определения оптимальной величины страхового запаса нужно знать вероятность простоя.

Среди рассмотренных в литературе математических моделей управления запасами наибольший интерес представляют те, которые учитывают случайный характер спроса и времени между моментами заказа и прибытия поставки [1—4]. Эти модели лучше других отражают действительность. Однако каждая из них предполагает обязательное знание функции распределения спроса за некоторый фиксированный промежуток времени. Кроме того, часто допустима вероятность простоя (вероятность отказа в обслуживании) предполагается заданной.

Одной из задач настоящей работы является определение вероятности простоя, начинающегося с момента времени $n + dn$ (дифференциальный закон распределения полного исчерпания запаса за n дней) при следующих основных предположениях: 1) спрос представляет собой однородный эргодичный случайный процесс; 2) время между точкой заказа и прибытием поставки постоянно и равно $T_{\text{ср}}$; 3) заказ производится в момент достижения критического уровня запаса (страховой задел); 4) размер заказа — величина постоянная, определяемая по известной формуле [1].

Согласно сделанным предположениям, функцию спроса во времени можно представить рядом некоррелированных случайных значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ с дисперсией члена ряда $D(x_i) = \sigma_x^2$ и математическим ожиданием $M(x_i) = m_x$. Тогда, пользуясь центральной предельной теоремой, распределение суммы ряда при достаточно большом n представим в виде нормального с математическим ожиданием nm_x и среднеквадратичным отклонением $\sigma_x \sqrt{n}$. Следовательно, вероятность расходования материала в

количестве $\sum_{i=1}^n x_i$ за $n_{\text{ср}}$ дней не зависит от вида случайной функции

спроса.

Решение задачи о нахождении вероятности простоя, начинающегося с момента времени $t + dt(n + dn)$, для однородных случайных процессов рассмотрим на примере двух типов этих процессов — Пуассона и непрерывного процесса расходования материала.

Сначала о первом типе. Представим ряд случайных некоррелированных величин в виде потока Пуассона. Этот метод обычно применяется при дискретном характере спроса. Однако и непрерывную функцию спроса можно представить эквивалентной потоку Пуассона, подобрав соответствующим образом его параметры. Условие определения параметра распре-

деления Пуассона может быть записано в виде

$$\sigma_x / m_x = \sqrt{\lambda} / \lambda \quad \text{или} \quad \lambda = (m_x / \sigma_x)^2, \quad (1)$$

где λ — среднее количество событий (спросов) в единицу времени (одно событие может означать 10 кг, 0,5 л, 3 шт. и т. п.).

Для представления непрерывной функции спроса в виде потока Пуассона необходимо ввести дополнительное понятие: μ — вес (размер) одного события.

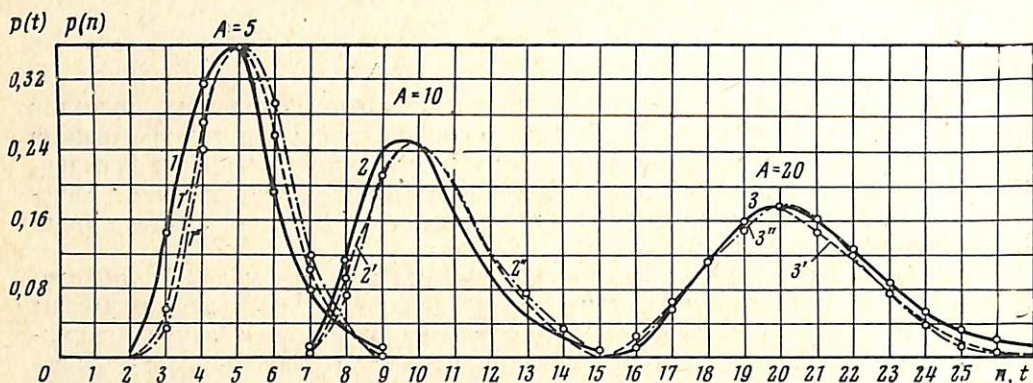


Рис. 1. $p(n)$, $p(t)$ — дифференциальные законы распределения простоя, начинающегося с момента времени $n + dn(t + dt)$ для $A = 5, 10, 20$; $m_x = 1$, $\sigma_x = 0,5$ кривые 1', 2', 3' построены по первому методу — кривые 1, 2, 3 построены по второму методу — кривые 1'', 2'', 3'' — результаты вычислений на ЭЦВМ «Днепр»

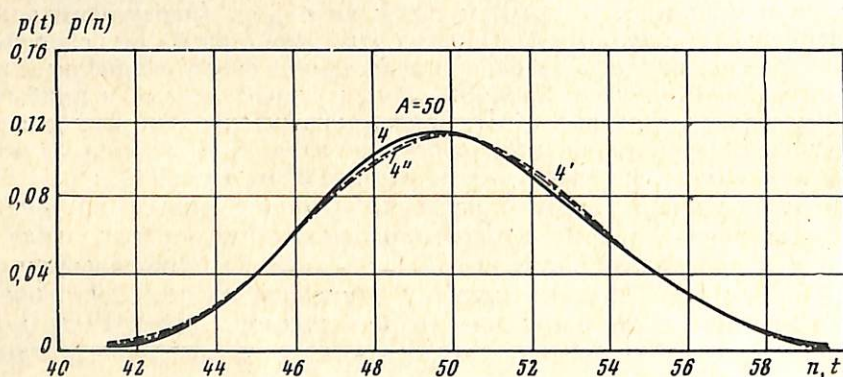


Рис. 2. Те же кривые для $A = 50$, $m_x = 1$, $\sigma_x = 0,5$

Обозначим: A — величина запаса, t — время исчерпания запаса. Тогда $m_x = \mu\lambda$, а математическое ожидание израсходованного материала за время t_{cp} равно

$$\mu\lambda t_{cp} = m_x t_{cp} = A. \quad (2)$$

Запас событий за время t_{cp} составит

$$\lambda t_{cp} = m = A / \mu. \quad (3)$$

Определив параметр распределения Пуассона λ как $(m_x / \sigma_x)^2$ и запас событий m как λt_{cp} , найдем, что вероятность простоя, начинающегося с

интервала $[t, t + dt]$, равна [5]

$$p(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} \lambda e^{-\lambda t} dt. \quad (4)$$

Проиллюстрируем изложенное расчетными кривыми $1', 2', 3', 4'$ (рис. 1 и 2). Эти кривые построены для $A = 5, 10, 20, 50$ и $\sigma_x/m_x = 0,5$.

Обратимся теперь ко второму типу. Процесс расходования материала — непрерывная функция.

Как известно [6], непрерывную слабокоррелированную функцию можно представить последовательностью ее ординат через интервалы времени Δt : $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Выразим среднюю интенсивность потребления при одном (i -м) исчерпании запаса A отношением $A/n = x_{cp}$, где x_{cp} — средняя интенсивность потребления; n — время полного исчерпания запаса; x_{cp} , n — случайные величины.

С другой стороны, x_{cp} можно определить как $\sum_{i=1}^n x_i / n_{cp}$, где $n_{cp} = A / m_x$, m_x — математическое ожидание члена ряда случайных некоррелированных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ определяется из статистических данных, как

$$\sum_{i=1}^n x_i / n.$$

При достаточно большом n справедливо равенство отношений $\sum_{j=0}^n x_j / n_{cp} = A / n$, откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^n x_i = \frac{n_{cp} A}{n} = \frac{A^2}{m_x n}. \quad (5)$$

Пользуясь центральной предельной теоремой, запишем дифференциальный закон распределения $\sum_{i=1}^n x_i$

$$p\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi n_{cp}}} \exp\left[-\frac{((A^2/m_x n) - A)^2}{2\sigma_x^2 n_{cp}}\right]. \quad (6)$$

Вероятность простая, начинающегося с момента времени $n + dn$, найдем при помощи известного соотношения для монотонно убывающей случайной функции [7]

$$p(n) = -p\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)'_n. \quad (7)$$

Подставляя (1) и (2) в (3), получим

$$p(n) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi n_{cp}}} \exp\left[-\frac{((A^2/m_x n) - A)^2}{2\sigma_x^2 n_{cp}}\right] \frac{A^2}{m_x n^2} \quad (8)$$

Введя обозначения: $\varphi(n)$ — плотность нормального распределения с параметрами A ; $\sigma_x \sqrt{n_{cp}}$; $n: = ((A^2/m_x n) - A) / \sigma_x \sqrt{n_{cp}}$ — нормирован-

ная случайная величина, и используя выражение

$$p(n) = p(n:) / \sigma_x \sqrt{n_{\text{ср}}}, \quad (9)$$

получим

$$p(n) = \varphi(n:) (A^2 / m_x n^2 \sigma_x \sqrt{n_{\text{ср}}}). \quad (10)$$

Таким образом, дифференциальный закон распределения простоя, начинающегося с момента времени $n + dn$ (распределение полного исчерпания запаса за n дней), найден. Примером использования формулы (10) служат кривые 1, 2, 3, 4, построенные на рис. 1, 2 для $A = 5, 10, 20, 50$ и $\sigma_x / m_x = 0,5$.

Применение центральной предельной теоремы предполагает область существования $\sum_{i=1}^n x_i (-\infty, \infty)$. Однако спрос поло-

жителен, поэтому $\sum_{i=1}^n x_i$ существует в интервале $[0, \infty)$, что соответствует появлению одностороннего толерантного предела.

Увеличение веса пропускаемых значений $\sum_{i=1}^n x_i$ приводит к погрешности относительно полного нормального распределения.

Определим величину этой погрешности для следующих данных: $A = 5$; $m_x = 1$; $\sigma_x = 0,5$; $n = 4$; $n_{\text{ср}} = A / m_x = 5$.

С большой достоверностью можно утверждать, что в пределах $[0, \infty)$ находится 99,9996% генеральной совокупности $\sum_{i=1}^n x_i$, так как

$$\Phi\left(\frac{0 - (A/m_x)}{\sigma_x \sqrt{n_{\text{ср}}}}\right) = \Phi\left(\frac{0 - 5}{0,5 \sqrt{5}}\right) = 0,999996.$$

Запишем выражение для определения относительной величины погрешности

$$\left(\left[p\left(\frac{n - n_{\text{ср}}}{\sigma_x \sqrt{n_{\text{ср}}}}\right) / \Phi\left(\frac{0 - n_{\text{ср}}}{\sigma_x \sqrt{n_{\text{ср}}}}\right) \right] - p\left(\frac{n - n_{\text{ср}}}{\sigma_x \sqrt{n_{\text{ср}}}}\right) \right) \cdot \left[p\left(\frac{n - n_{\text{ср}}}{\sigma_x \sqrt{n_{\text{ср}}}}\right) \right]^{-1} \cdot 100\%;$$

для $n = 4$ эта погрешность составит 0,003%.

Легко установить расчетным путем, что при увеличении A ($\sigma_x = \text{const}$) и уменьшении σ_x ($A = \text{const}$) погрешность уменьшается.

Если случайные величины, представляющие спрос, имеют некоторую нормированную функцию корреляции $R(\tau)$ и дисперсию σ_x^2 , то дисперсия суммы случайных величин $\sum_{i=1}^n x_i$ равна [8]

$$D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = 2\sigma_x^2 \int_0^n (n - \tau) R(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Положим, что $R(\tau) = e^{-a\tau}$, $a > 0$, тогда

$$D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = 2\sigma_x^2 \int_0^n e^{-a\tau}(n-\tau)d\tau = 2\sigma_x^2 \left[\frac{n}{a} - \frac{1}{a^2}(1 - e^{-an}) \right].$$

Характер кривой $D(\sum_{i=1}^n x_i) = f(n)$ показан на рис. 3. При условии, что время корреляции значительно меньше среднего времени израсходования запаса $\tau \ll n_{\text{ср}}$, применима центральная предельная теорема, т. е. распределение суммы коррелированных случайных значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно представить в виде

$$p\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{2\sigma_x \sqrt{n \int_0^n (n-\tau)R(\tau)d\tau}} \exp \left[-\frac{((A^2/m_x n) - A)^2}{4\sigma_x^2 n_{\text{ср}} \int_0^n (n-\tau)R(\tau)d\tau} \right]$$

Вероятность простоя, т. е. $p(n)$, определяется аналогично случаю некоррелированных значений $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$p(n) = \Phi \left(\frac{(A^2/m_x n) - A}{\sigma_x \sqrt{2n_{\text{ср}} \int_0^n (n-\tau)R(\tau)d\tau}} \right) \frac{A^2}{m_x n^2 \sigma_x \sqrt{2n_{\text{ср}} \int_0^n (n-\tau)R(\tau)d\tau}} \quad (13)$$

Сравнение кривых 1 и 1', 2 и 2' и т. д. показывает достаточно хорошее их совпадение. С увеличением $n_{\text{ср}}$ значения кривых 1, 2, 3, 4 приближаются к значениям кривых 1', 2', 3', 4', что указывает на уменьшение погрешности от применения центральной предельной теоремы при увеличении числа слагаемых. В связи с этим вторым методом определения вероятностей простоя целесообразнее пользоваться при большом времени истощения запаса.

Первый метод следует применять при малых значениях $t_{\text{ср}}$, так как при этом обеспечивается относительная простота вычислений (наличие в литературе таблиц дополнительного распределения Пуассона

$$1 - \sum_{k=0}^m [(\lambda t)^k / k!] e^{-\lambda t}.$$

Проверку проведенных аналитических исследований можно осуществить экспериментальным путем — при помощи метода статистических испытаний (Монте-Карло).

С этой целью на ЭЦВМ «Днепр» моделировался процесс истощения запаса при случайном спросе.

Поскольку распределение вероятности простоя не зависит от закона распределения спроса, целесообразно генерировать случайные числа, соответствующие спросу, с простейшим законом распределения — равномерным. Для получения псевдослучайных чисел, равномерно распределенных в интервале $[0, 1]$, использовалась стандартная программа, разработанная на основе методики, предложенной И. М. Соболев [9, 10]. Период псевдослучайных чисел, получаемых при помощи этой программы, составил 15—20 тысяч.

Были приняты меры для увеличения длины отрезка аperiodичности и длины периода: к работе с последующей частью программы допускались

не все генерируемые псевдослучайные числа, а выборочно — через случайное число. Для сокращения машинного времени счетчик случайных чисел был ограничен до 7. При таком способе генерирования случайных чисел период практически исчез. Проверка на равномерность распределения дала хорошие результаты, а функция корреляции генерируемых чисел, представленная на рис. 4 (нормированная), показывает, что условие независимости случайных чисел выполняется.

Генерируемые числа отнимались от уровня запаса A последовательно до тех пор, пока разность не достигала нулевого уровня (первое отрицательное число).

Количество отниманий фиксировалось в ячейке памяти. Подобный опыт повторялся циклически N раз, после чего программным способом определялись математическое ожидание и дисперсия числа отниманий, т. е.

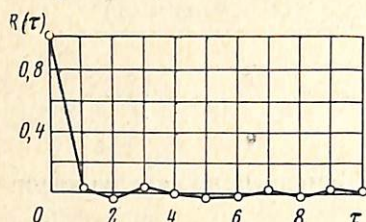


Рис. 4. Нормированная корреляционная функция генерируемых машиной «Днепр» псевдослучайных чисел

$$M^*(n) = \sum_{i=1}^N n_i / N, \quad (14)$$

$$(15)$$

$$D^{**}(n) = \sum_{i=1}^N [n_i - M^*(n)]^2 / (N - 1),$$

где N — число опытов; n_i — число отниманий в i -м опыте.

Число N находилось из расчета попадания параметров $M^*(n)$ и $D^{**}(n)$ в интервал $\varepsilon = \pm 0,05$ с доверительной вероятностью $p = 0,90$ ($N = 1000$) [7].

Далее машина выполняла программу сортировки количеств отниманий и печатала следующие результаты вычислений: $M^*(n)$, $D^{**}(n)$, число случаев полного исчерпания запаса A за 1, 2, 3, ..., n отниманий, т. е. дифференциальный закон распределения $p(n)$.

Для равномерного закона распределения случайных чисел вариации отношения σ_x / m_x возможны в интервале $[0, 1 / \sqrt{3}]$, так как $m_x = 1/2(a + b)$, $\sigma_x^2 = 1/12(b - a)^2$, откуда $b = m_x + \sigma_x \sqrt{3}$, $a = m_x - \sigma_x \sqrt{3}$, где a , b — пределы интервала, в котором генерируются случайные числа.

В силу физических свойств рассматриваемого процесса (спрос только положителен), $a \geq 0$, поэтому $m_x - \sigma_x \sqrt{3} \geq 0$, $\sigma_x / m_x \leq 1 / \sqrt{3}$.

В описанном эксперименте величина запаса A менялась в пределах от 5 до 500, отношение σ_x / m_x варьировалось в интервале $[0,1, 0,52]$. Некоторые из полученных данных представлены на рис. 1 и 2 кривыми 1'', 2'', 3'', 4''.

Хорошее совпадение экспериментальных данных с расчетными (кривые 1, 1', 1'', 2, 2', 2'' и т. д. на рис. 1, 2) подтвердило возможность принятых допущений в приведенных аналитических исследованиях.

Мы рассмотрели различные методы определения дифференциального закона распределения простоя, начинающегося с момента $n + dn$.

Законы распределения случайной величины могут быть построены не только по величинам соответствующих вероятностей, но и при помощи числовых характеристик случайной величины.

Для задания законов распределения используются математические ожидания $M(n)$, дисперсии $D(n)$, центральные моменты третьего и четвертого порядков μ_3 и μ_4 или соответствующие им асимметрия и эксцесс.

Математическое ожидание времени простоя определяется из выражения

$$M(n) = \int_{-\infty}^{\infty} np(n)dn. \quad (16)$$

Дисперсия $D(n)$ может быть найдена по формуле

$$D(n) = \int_{-\infty}^{\infty} n^2 p(n)dn - [M(n)]^2 \quad (17)$$

или

$$D(n) = \frac{A^2}{m_x \sigma_x \sqrt{2\pi n_{cp}}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{((A^2/m_x n) - A)^2}{2\sigma_x^2 n_{cp}} \right] dn - [M(n)]^2. \quad (18)$$

Дисперсия $D(n)$ определялась и в ходе эксперимента программным путем (15).

На основании опытных данных на рис. 5 построено семейство прямых $D(n)$, являющихся функциями среднего времени истощения запаса для различных соотношений σ_x / m_x . Сечения, проведенные через разные точки аргумента A / m_x (100, 200, 300), дают зависимость $D(n) = f(\sigma_x / m_x)$ при $A / m_x = \text{const}$ (рис. 6). Величина $D(n)$, определенная по формуле (18), совпадает с экспериментальными данными $D(n)$ и с дисперсией

суммы n слагаемых $D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)$

следовательно, для определения $D(n)$ достаточно знать

$$D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right).$$

По величине асимметрии и эксцесса можно оценить степень отклонения закона распределения $p(n)$ от нормального.

Асимметрия и эксцесс находятся из выражений

$$k_3 = \frac{\mu_3}{(\sigma_x \sqrt{n_{cp}})^3},$$

$$E_x = k_4 - 3 = \frac{\mu_4}{(\sigma_x \sqrt{n_{cp}})^3}.$$

В качестве примера найдем k_3 и E_x для $\sigma_x / m_x = 0,5$; $A = 50$ и 20

$$k_{3,50} = 0,11; E_{x,20} = 0,0;$$

$$E_{x,50} = 0,24.$$

Отклонения от нормального закона распределения несущественны,

поэтому вместо $p(n)$ можно находить $p\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)$.

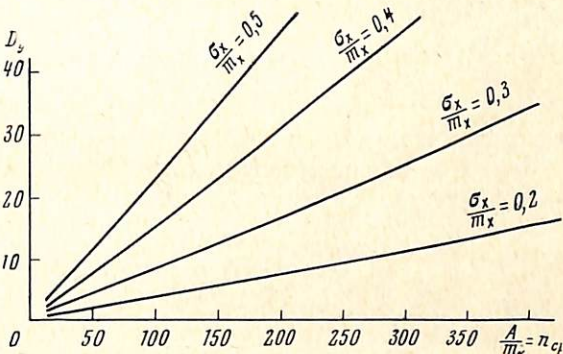


Рис. 5. Семейство прямых $D(n)$, являющихся функциями среднего времени истощения запаса при изменении отношения σ_x / m_x в интервале $[0, 1; 0,52]$

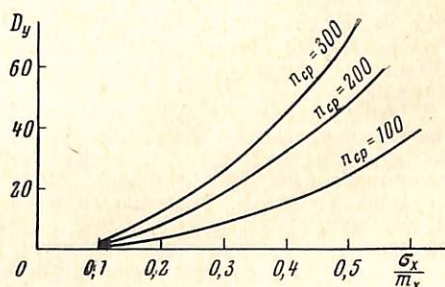


Рис. 6. Зависимость дисперсии $D(n)$ от отношения σ_x / m_x при $A / m_x = n_{cp} = \text{const}$

Итак, достаточно знать $m_x, D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)$ и $R(\tau)$, чтобы определить $p(n)$ —

закон распределения вероятности простоя, начинающегося с момента времени $n + dn$. Эти характеристики находятся при обработке статистических данных как m_x^* и D_{xx}^{**} .

В случае переменного случайного времени между точкой заказа и прибытием партии на склад выражение для вероятности простоя усложняется

$$\int_0^{\infty} p(t) \int_0^t (t-n)p(n)dn dt; \quad (19)$$

здесь $p(n)$ — плотность вероятности исчерпания запаса в промежутке $[n, n + dn]$; $p(t)$ — плотность вероятности времени прибытия заказа. Обозначим: c — издержки простоя предприятия в единицу времени; h — издержки в единицу времени от затоваривания (включая и стоимость хранения).

Тогда полные издержки от простоя C выразятся так

$$C = c \int_0^{\infty} p(t) \int_0^t (t-n)p(n)dn dt,$$

от затоваривания $H = hAT$, где A — запас, T — время хранения.

Зная C и H , можно определить величину оптимального страхового запаса из условия $\min$ общих издержек

$$\frac{d}{dA} \left(c \int_0^{\infty} p(t) \int_0^t (t-n)p(n)dn dt + hAT \right) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Кофман. Методы и модели исследования операций. М., «Мир», 1966.
2. Ф. Хенсменн. Применение математических методов в управлении производством и запасами. М., «Прогресс», 1966.
3. Е. В. Булинская. Некоторые задачи оптимального управления запасами. Теория вероятности и ее применения, 1964, т. IX, № 3.
4. M. Resh, M. Naor. An Inventory Problem with Discrete time Review and Replenishment by Batches of Fixed Size. Management science, 1963, v. 10, N 1.
5. Т. Саати. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М., «Сов. радио», 1965.
6. Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М., «Наука», 1967.
7. Н. А. Лившиц, В. Н. Пугачев. Вероятностный анализ систем автоматического управления. М., «Сов. радио», 1963.
8. А. А. Свешников. Прикладные методы теории случайных функций. Л., Судпромгиз, 1961.
9. Д. И. Голенко. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. М., «Наука», 1965.
10. Е. Л. Ющенко и др. Управляющая машина широкого назначения «Дніпро» и программирующая программа к ней. Киев. «Наукова думка», 1964.

Поступила в редакцию
5 VI 1967

АНАЛИЗ ДЕЛОВОЙ ИГРЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВМ

В. В. КОЛБИН, И. М. СЫРОЕЖИН

(Ленинград)

Управление производством все больше становится наукой и трактуется не как выполнение установленных функций, а как динамический творческий процесс анализа, принятия решений и конкретных действий. Необходимость усиленной подготовки руководящих кадров становится в настоящее время очень важной. Одним из методов, который широко применяется в учебном процессе, является метод «деловых или управленческих игр». Он представляет собой активное тренировочное упражнение с использованием модели деловой ситуации. Игровое моделирование действительности вместо самой действительности включает в себя систему правил поведения игроков, их решения и последствия этих решений. Экспериментальные игры не ограничивают участие человека в создании игры и вычислительных процедур, а требуют от него принимать решения, ему приходится сталкиваться с последствиями этих решений и делать соответствующие выводы.

Военные игры являются обычным способом подготовки офицеров и солдат к боевым действиям и применяются с 1792 г. В области экономики для целей обучения и исследования используются деловые игры, начало которым было положено в период с 1933 по 1938 гг. в СССР [1—4].

Опыт создания и проведения первых советских деловых игр описан в работе [5]. Особый вид деловых игр — аварийные — для тренировки дежурного персонала электростанций по быстрой ликвидации аварий разработано и проведено «Мосэнерго». Впервые они проводились на Шатурской электростанции им. В. И. Ленина. Деловые игры использовались и на других предприятиях.

Принципы, заложенные в первых советских деловых играх, сохранили свою актуальность, а методический опыт их использован при разработке последующих экспериментальных игр.

Экспериментальные игры по силе обучения превосходят все другие методы. Игры заставляют учащихся с большей точностью и вниманием относиться к тому, что они делают, обеспечивают быструю обратную связь по вопросу о качестве принятых ими решений. При этом сам характер обучения становится общим, упорядоченным.

Сложные деловые игры развивают у слушателей способность отбирать и оценивать такую информацию, которая служила бы полезным руководством в принятии решений. Деловые игры дают возможность предсказывать, планировать и принимать меры для достижения нужных результатов в сложной ситуации. Участники игр сочетают в себе особенности специалистов широкого и узкого профилей, принимают решения, требующие творческого воображения, сталкиваются с проблемами, для решения которых необходимы быстрые суждения, основанные на интуиции. В процессе игры учащиеся обнаруживают способность эффективной работы с другими людьми в коллективе.

Одновременно с деловой игрой, проводимой с использованием ЭВМ, задача решается оптимально, и полученные решения служат оценкой деятельности участников игры.