Итак, достаточно знать $m_x, D\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ и $R(\tau)$, чтобы определить $p(n)$ — закон распределения вероятности простоя, начинающегося с момента времени $n + dn$. Эти характеристики находятся при обработке статистических данных как $m_x^*$ и $D_{xx}^{**}$.

В случае переменного случайного времени между точкой заказа и прибытием партии на склад выражение для вероятности простоя усложняется

$$\int_0^\infty p(t) \int_0^t (t-n)p(n)\,dn\,dt; \tag{19}$$

здесь $p(n)$ — плотность вероятности исчерпания запаса в промежутке $[n, n+dn]$; $p(t)$ — плотность вероятности времени прибытия заказа. Обозначим: $c$ — издержки простоя предприятия в единицу времени; $h$ — издержки в единицу времени от затоваривания (включая и стоимость хранения).

Тогда полные издержки от простоя $C$ выразятся так

$$C = c \int_0^\infty p(t) \int_0^t (t-n)p(n)\,dn\,dt,$$

от затоваривания $H = hAT$, где $A$ — запас, $T$ — время хранения.

Зная $C$ и $H$, можно определить величину оптимального страхового запаса из условия min общих издержек

$$\frac{d}{dA}\left(c \int_0^\infty p(t) \int_0^t (t-n)p(n)\,dn\,dt + hAT\right) = 0.$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. А. Кофман. Методы и модели исследования операций. М., «Мир», 1966.
2. Ф. Хенсмени. Применение математических методов в управлении производством и запасами. М., «Прогресс», 1966.
3. Е. В. Булинская. Некоторые задачи оптимального управления запасами. Теория вероятности и ее применения, 1964, т. IX, № 3.
4. M. Resh, M. Naor. An Inventory Problem with Discrete time Riview and Replenishement by Batches of Fixed Size. Management sience, 1963, v. 10, N 1.
5. Т. Саати. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М., «Сов. радио», 1965.
6. Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М., «Наука», 1967.
7. Н. А. Лившиц, В. Н. Пугачев. Вероятностный анализ систем автоматического управления. М., «Сов. радио», 1963.
8. А. А. Свешников. Прикладные методы теории случайных функций. Л., Судпромгиз, 1961.
9. Д. И. Голенко. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. М., «Наука», 1965.
10. Е. Л. Ющенко и др. Управляющая машина широкого назначения «Дніпро» и программирующая программа к ней. Киев. «Наукова думка», 1964.


Поступила в редакцию
5 VI 1967

ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1969
том V, вып. 1

# АНАЛИЗ ДЕЛОВОЙ ИГРЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВМ

В. В. КОЛБИН, И. М. СЫРОЕЖИН

*(Ленинград)*

Управление производством все больше становится наукой и трактуется не как выполнение установленных функций, а как динамический творческий процесс анализа, принятия решений и конкретных действий. Необходимость усиленной подготовки руководящих кадров становится в настоящее время очень важной. Одним из методов, который широко применяется в учебном процессе, является метод «деловых или управленческих игр». Он представляет собой активное тренировочное упражнение с использованием модели деловой ситуации. Игровое моделирование действительности вместо самой действительности включает в себя систему правил поведения игроков, их решения и последствия этих решений. Экспериментальные игры не ограничивают участие человека в создании игры и вычислительных процедур, а требуют от него принимать решения, ему приходится сталкиваться с последствиями этих решений и делать соответствующие выводы.

Военные игры являются обычным способом подготовки офицеров и солдат к боевым действиям и применяются с 1792 г. В области экономики для целей обучения и исследования используются деловые игры, начало которым было положено в период с 1933 по 1938 гг. в СССР [1—4].

Опыт создания и проведения первых советских деловых игр описан в работе [5]. Особый вид деловых игр — аварийные — для тренировки дежурного персонала электростанций по быстрой ликвидации аварий разработало и провело «Мосэнерго». Впервые они проводились на Шатурской электростанции им. В. И. Ленина. Деловые игры использовались и на других предприятиях.

Принципы, заложенные в первых советских деловых играх, сохранили свою актуальность, а методический опыт их использован при разработке последующих экспериментальных игр.

Экспериментальные игры по силе обучения превосходят все другие методы. Игры заставляют учащихся с большей точностью и вниманием относиться к тому, что они делают, обеспечивают быструю обратную связь по вопросу о качестве принятых ими решений. При этом сам характер обучения становится общим, упорядоченным.

Сложные деловые игры развивают у слушателей способность отбирать и оценивать такую информацию, которая служила бы полезным руководством в принятии решений. Деловые игры дают возможность предсказывать, планировать и принимать меры для достижения нужных результатов в сложной ситуации. Участники игр сочетают в себе особенности специалистов широкого и узкого профилей, принимают решения, требующие творческого воображения, сталкиваются с проблемами, для решения которых необходимы быстрые суждения, основанные на интуиции. В процессе игры учащиеся обнаруживают способность эффективной работы с другими людьми в коллективе.

Одновременно с деловой игрой, проводимой с использованием ЭВМ, задача решается оптимально, и полученные решения служат оценкой деятельности участников игры.

В лаборатории экономико-математических методов ЛГУ разработана специальная деловая игра.

Конструкторы ставят перед собой цели:

I. Обучение студентов, а затем и руководящих работников предприятий, принятию решений в обстановке, воспроизводящей хозяйственную ситуацию, которая складывается во взаимоотношениях предприятий друг с другом и с руководящими хозяйственными органами. При этом внимание уделяется привитию слушателям четырех видов жизненного опыта: а) анализа имеющейся информации; б) ведения переговоров; в) организационного опыта; г) обдумывания и принятия решений в условиях риска и неопределенности.

II. Выбор системы оптимальных критериев и их исследование, экспериментально-статистическое исследование ряда дискуссионных вопросов планирования, управления и стимулирования.

III. Решение задачи стохастического программирования, моделирующей деловую игру, и исследование решений для различных постановок этой задачи.

Игра начинается с распределения обязанностей между ее участниками. Игровой комплекс представлен следующими отраслями: 1) добывающая промышленность (А); 2) перерабатывающая промышленность (Б); 3) промышленность, производящая предметы народного потребления (В).

Ниже будут сообщены возможные усложнения настоящей игры и даны в общих чертах игры II, III, IV.

Отрасль А управляется министерством, которое в игре представлено участниками, исполняющими обязанности министра А и трех его заместителей. Аналогично положение в отраслях Б и В. Министерству А подчиняются три предприятия: 1) производящее энергию ($А_1$); 2) выпускающее металл ($А_2$); 3) выпускающее неметаллическое сырье ($А_3$).

Отрасль Б также представлена тремя предприятиями: 1) машиностроительным ($Б_1$); электротехническим ($Б_2$); 3) химическим ($Б_3$).

У министерства В также три предприятия: 1) производящее продукты питания ($В_1$); 2) выпускающее одежду ($В_2$); 3) изготовляющее предметы быта ($В_3$).

На каждом предприятии «работают» директор и три его заместителя. В игре участвует банк со своим управляющим и тремя заместителями. Кроме того, существует группа из трех арбитров. В игре рассматривается репутация предметов потребления. На рынок предметов потребления поступает только продукция предприятий министерства В.

Процессы производства и реализации мгновенны.

Игра строится с таким расчетом, чтобы ее правила и количественные параметры соответствовали хозяйственной обстановке в экономике страны и действующим нормативным хозяйственным актам.

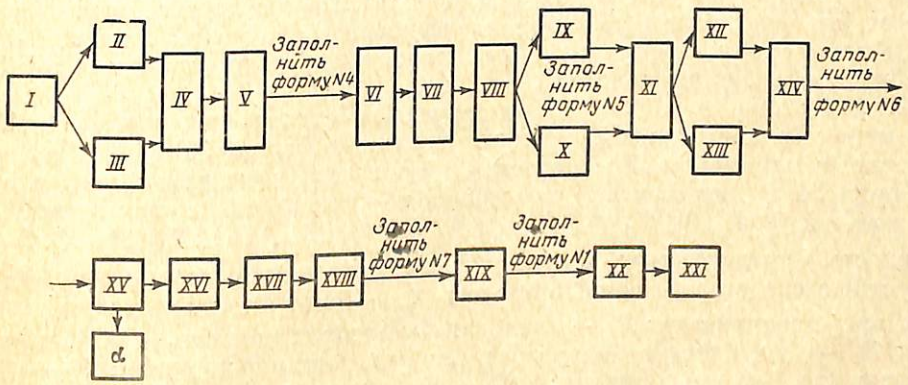
## ОСНОВНЫЕ ПРАВА И ОБЯЗАННОСТИ УЧАСТНИКОВ ИГРЫ

*Инструкция для «сотрудников» министерств*: 1) министерства осуществляют контакты друг с другом; 2) все вопросы решаются на основе сочетания коллегиальности и единоначалия; 3) при возникновении спорных вопросов между министерствами обращаются к арбитрам; 4) министерство обеспечивает предприятие необходимыми средствами в начале игры; 5) министерство получает прогноз о спросе на продукцию каждого из своих предприятий; 6) министерство утверждает план для предприятия по следующим показателям: а) размер реализованной продукции (в стоимостной форме); б) сумма прибыли; в) рентабельность; 7) министерство и предприятия несут взаимную ответственность за свою деятельность; 8) министерство имеет в банке расчетный счет для централизации

средств в целях развития отрасли и резервного фонда; 9) банк представляет министерству кредиты.

*Инструкция для «работников» банка*: 1) банк предоставляет кредиты министерствам и предприятиям из расчета 6% суммы кредита за кредит до двух периодов игры и 5% за кредит на срок больше двух периодов; 2) на продукцию, произведенную, но не реализованную, банк кредиты не дает; 3) кредит предоставляется не более чем на три периода игры.

*Инструкция для «работников» предприятий*: 1) предприятия устанавливают прямые связи с помощью договоров; 2) договора заключаются в каждом периоде; пока предприятие не рассчитается за предыдущий период, новые сделки не заключаются; 3) предприятие хранит свои средства на расчетных счетах в банке; 4) предприятие составляет техпромфинплан на текущий период (директивные показатели утверждаются министерством); 5) плановая балансовая прибыль предприятия распределяется следующим образом: а) 10—25% балансовой прибыли фонда развития производства предприятие вносит в банк на счет министерства (в целях централизации средств, для образования фонда развития отрасли министерства); б) основная часть идет на погашение кредита банку, министерству в виде платы за фонды (норматив %): в) предполагается, что предприятие выплачивает штраф (компенсация убытков пайщиков и покупателей) непосредственно из прибыли; г) разница между общей суммой прибыли и указанными выше платежами хранится на счету предприятия в банке и может быть использована на образование фондов экономического стимулирования; 6) сверхплановая прибыль предприятия распределяется следующим образом: а) 20—40% сверхплановой прибыли поступает мини-




Блок-схема операций деловой игры I

*I* — Исходные данные формы №№ 1, 2, 3; *II* — сверить счета в министерстве; *III* — сверить счета в банке; *IV* — информация о предполагаемом спросе на продукцию предприятий $B_1$, $B_2$, $B_3$ (получена с ЭВМ); *V* — информация о достигнутом техническом прогрессе (получена с ЭВМ). Процесс принятия решения о применении технического прогресса; *VI* — план министерств для предприятий по трем показателям; *VII* — план выпуска продукции, принятый предприятием (три показателя); *VIII* — решения директоров предприятий по управлению для выполнения плана выпуска продукции; *IX* — утверждение решений директоров в министерствах; *X* — финансовое обеспечение принятых решений в банке; *XI* — предприятия составляют проект заказов; *XII* — утверждение проекта заказов в министерствах; *XIII* — финансовое обеспечение заказов в банке; *XIV* — переговоры предприятий о заказах; *XV* — предприятия выполняют обязательства по договорам; α — предприятия $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$, $B_3$ выполняют операции в блоках *VI—X*; *XVI* — производство продукции (мгновенно); *XVII* — фактическая реализация продукции предприятий $B_1$, $B_2$, $B_3$ (получена с ЭВМ); *XVIII* — определение результатов деятельности по разности между фактической и планируемой реализацией; *XIX* — выплата заработной платы и, возможно, прибавки к ней; *XX* — оценка деятельности участников игры; *XXI* — решения арбитров на основе оценки деятельности

стерству на счет в банке; б) оставшаяся часть распределяется аналогично остатку плановой балансовой прибыли; 7) если предприятие понесло убытки из-за производства продукции, не имеющей спроса, запланированной министерством, то убытки покрываются в размере 65% затрат на продукцию за счет резервного фонда министерства (министерство уплачивает штраф предприятию); 8) предприятия самостоятельно и по предложениям министерства реализуют появляющиеся технические и организационные усовершенствования, в дальнейшем именуемые техническим прогрессом.

*Инструкция для арбитров*: 1) арбитры разрешают спорные вопросы между министерствами и предприятиями разных министерств; 2) вводят систему штрафов и поощрений деятельности министерств; 3) пересматривают цены на продукцию предприятий, но не чаще одного раза в три периода игры (чтобы не было сверхприбыли и сверхубытков, если они не заданы специально); 4) организуют учет итогов игры по периодам; 5) определяют «судьбу» предложений по усовершенствованию и изменению правил и хода игры; 6) принимают решения о «развязке» неожиданных и непредвиденных ситуаций в игре.

После распределения обязанностей между участниками игры им сообщают правила игры и последовательность операций.

Рассмотрим блок-схему операций участвующих команд в течение одного периода (см. блок-схему).

## ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОПЕРАЦИЙ В ДЕЛОВОЙ ИГРЕ

Игра проводится в несколько (6—12) периодов, при этом в каждом следующем можно использовать результаты, полученные в предыдущем периоде (начальные условия заданы, использован государственный баланс 1959 г., где некоторые показатели агрегированы), но можно в каждом периоде изменения относить к начальным данным, тогда периоды игры будут, вообще говоря, независимы.

1. Директора предприятий, министры, арбитры и управляющий банком перед началом каждого периода получают форму № 1, где заданы начальные параметры. Все делается в стоимости измерения (млн. руб.). В форме № 1 указываются: по столбцам — предприятия, по строкам — показатели $N_j$, $\Phi_j$, $0_j$, $V_A$,$P_jP_j'$, $R_j$, $\Delta N_j$, $S_j$, $C_j$, $H_{A_j}$, $H_{R_j}$, $H_{P_j}$, $A_j$, $K_j$. $N_j$ — мощность $j$-предприятия; $\Phi_j$ — основные фонды $j$-го предприятия; $0_j$ — оборотные средства $j$-го предприятия; $V_{P_j}$ — объем реализованной продукции $j$-предприятия; $P_j$ — плановая балансовая прибыль $j$-го предприятия; $P_j'$ — фактическая балансовая прибыль $j$-го предприятия; $R_j$ — рентабельность $j$-го предприятия; $\Delta N_j$ — свободные мощности $j$-го предприятия; $S_j$ — себестоимость единицы продукции $j$-го предприятия; $C_j$ — цена каждого вида продукции $j$-го предприятия; $H_{A_j}$ — норма амортизации $j$-го предприятия; $H_R{}_j$ — норма рентабельности $j$-го предприятия; $H_{P_j}$ — норма прибыли $j$-го предприятия; $A_j$ — амортизационный фонд предприятия; $K_j$ — фонд развития производства; $M_j$ — сумма на расчетном счете в банке; $D$ — личные сбережения работников всех предприятий в банке к началу периода игры.

Личные сбережения характеризуют не заработную плату участников игры, а фонд сбережений «рабочих кадров», фигурирующих в расчетах по игре, но не персонифицированных в ней. Величина $D$ необходима для определения объема спроса на предметы потребления.

Одновременно с формой № 1 выдаются: форма № 2 — матрица натуральных показателей и форма № 3 — матрица затрат-выпуска в стоимостном выражении.

2. Предприятия сверяют счета в банке и трех министерствах, получают информацию о тех средствах, на которые они могут рассчитывать, принимая решения в дальнейшем.

3. Министр В вместе с директорами предприятий $B_1$, $B_2$, $B_3$ получает прогноз, информацию о возможном спросе; генератором случайных данных служит ЭВМ. Указывается, на сколько процентов увеличился спрос на продукцию каждого предприятия министерства В по сравнению со спросом в периоде $\tau_0$, выраженном в натуральных единицах.

Величину предполагаемого спроса можно рассматривать как плановый показатель по объему реализованной продукции для предприятий $B_1$, $B_2$, $B_3$.

**Замечание.** В игре I непосредственная связь всей системы с рынком предметов потребления осуществлятся только через министерство В. Это обстоятельство заставляет «работать» все министерства, предприятия на удовлетворение потребностей населения, что позволяет формулировать естественный критерий оптимальности.

В деловой игре II случайными потребителями продукции предприятий министерств А и Б является промышленное, гражданское и культурное строительство; кроме того, в игру введен экспорт.

Права и обязанности участников в игре II в основном не изменяются, а правила игры предусматривают потребление продукции всех предприятий, включая новые, на внешнем рынке, это потребление задается случайно. Модель игры II представляет собой задачу стохастического линейного программирования со случайным вектором спроса и случайными коэффициентами целевой функции.

Каждое предприятие в игре III выпускает продукцию двух сортов, и технический прогресс сказывается, кроме прочего, на улучшении качества продукции.

Игра IV включает в себя элементы всех предшествующих деловых игр, но, в отличие от них, в игре IV имеет место конкуренция одноотраслевых предприятий.

4. Вместе с информацией об увеличившемся спросе на продукцию предприятий $B_1$, $B_2$, $B_3$ учащиеся получают с ЭВМ информацию о достигнутом техническом прогрессе в каждой отрасли и заполняют форму № 4 (см. таблицу). Принятие решения о применении технического прогресса входит в функции директоров предприятий.

| Затраты и эффективность технического прогресса | | А | $А_1$ | $А_2$ | $А_3$ | Б | $Б_1$ | $Б_2$ | $Б_3$ | В | $В_1$ | $В_2$ | $В_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Новое оборудование | Увеличение, % от $Ф_j$<br>Снижение $S_j$, % | | | | | | | | | | | | |
| Новое сырье | Увеличение, % от $0_j$<br>Снижение $S_j$, % | | | | | | | | | | | | |
| Новая организация производства | Увеличение, % от $N_j$<br>Снижение, $S_j$ | | | | | | | | | | | | |
| Нет | | | | | | | | | | | | | |
| План министерства | | | | | | | | | | | | | |
| План предприятия | | | | | | | | | | | | | |

В игре I технический прогресс может осуществляться по трем направлениям: 1) использование новых видов оборудования; 2) совершенствование технологии производства за счет рационального использования сырья; 3) совершенствования организации производства.

Затраты, связанные с применением технического прогресса в области оборудования, задаются в процентах от основных фондов предприятий. Затраты на технический прогресс в области использования сырья задаются в процентах от оборотных средств предприятий и в сфере организации производства — в процентах от мощности предприятий. Эффект от приме-

нения технического прогресса по всем направлениям отражается определенным процентом снижения единицы себестоимости продукции (в игре задается случайным образом).

5. Директора предприятий $B_1$, $B_2$, $B_3$ получают от министра В планы для своих предприятий на настоящий период по трем показателям: а) размер реализованной продукции (все в стоимостной форме); б) сумма прибыли; в) рентабельность.

6. Предполагается, что фактический спрос на продукцию отличается от прогнозируемого министерством, с учетом которого составляется план выпуска продукции предприятиями.

7. Директор предприятия со своими заместителями принимает решения, которые дают возможность выполнить план. Имеется достаточно большой выбор альтернатив поведения. Директор в определенный период может использовать: а) кредит в банке; б) фонд развития производства предприятия; в) результаты технического прогресса; г) свободные мощности предприятия; д) кредит министерства; е) кредит одноотраслевого предприятия.

Свои решения директор записывает в форму № 5.

8. Решения директоров предприятий по управлению утверждаются министерствами.

9. Предприятия при поддержке министерств обращаются в банк для финансового обеспечения принятых решений по управлению.

10. Предприятия министерства В, используя матрицу затрат-выпуска периода $\tau_0$ и линейность, проявляющуюся в том, что возросший спрос на продукцию требует пропорционального увеличения затрат на ее производство, составляют проект заказов к другим предприятиям.

11. Министерства, после обсуждения проекта договоров, утверждают их.

12. Министерства способствуют получению предприятиями в банке средств, необходимых для заключения договоров с другими предприятиями.

13. Предприятия $B_1$, $B_2$, $B_3$ договариваются с другими предприятиями о величине заказов и заполняют форму № 6.

14. Предприятия министерств А и Б выполняют обязательства по договорам между собой, а также с предприятиями министерства В.

15. Директора предприятий министерств А и Б выбирают планы для своих предприятий по тем же показателям, что и для предприятий В.

16. Директора $A_1$, $A_2$, $A_3$, $Б_1$, $Б_2$, $Б_3$ принимают решения для удовлетворения спроса министерства В; записывают их в форму № 5.

17. Пользуясь матрицей затрат-выпуска, каждый директор предприятия министерств А и Б может предугадать, какой заказ последует его предприятию от других, включая $B_1$, $B_2$, $B_3$. Он делает встречные заказы. Вся информация о договорах предприятий записывается в форму № 6.

18. Процесс производства — мгновенный.

19. После того как будут удовлетворены все заказы (директора предприятий министерств А и Б могут воспользоваться для этого источниками, описанными в п. 7), предприятия $B_1$, $B_2$, $B_3$ реализуют свою продукцию.

20. Информацию о фактической реализации продукции предприятий $B_1$, $B_2$, $B_3$ получают с ЭВМ, при этом подсчитывается разница между запланированными и фактическими величинами производства продукции и ее реализации за определенный период.

21. Предприятие определяет результаты производственной деятельности и переносит их на следующий период игры. Все данные записываются в форме № 7; по столбцам указываются предприятия, а по строкам — истинная реализация, недопроизведенная и нереализованная продукция, штраф за недопроизведенную и нереализованную продукцию, поощрения,

основная зарплата и добавка к ней, отчисления в фонд предприятия, амортизация, прибыль, свободные мощности.

Замечание. Одним из критериев работы предприятий в игре I является прибыль, которую получают предприятия для образования двух фондов: развития производства и материального поощрения.

Фонд развития производства используется на расширение производства и на затраты, связанные с применением технического прогресса.

Фонд материального поощрения добавляется к фонду заработной платы. Сумма фондов заработной платы и поощрения всех предприятий, а также сумма сбережений в банке определяет максимальную границу спроса на продукцию министерства В.

Размер прибыли, идущей предприятию на образование двух фондов, отчисляется от общей прибыли предприятий. Формулы, по которым производится расчет размера прибыли предприятия, составлены с таким расчетом, чтобы предприятия были заинтересованы в принятии реального, напряженного плана. Для этой цели вводятся коэффициенты, которые определяют размер штрафа в случае невыполнения плана и размер прибыли в случае перевыполнения плана. При этом прибыль, получаемая предприятием за перевыполненный план, будет меньше, чем прибыль, которую бы получило данное предприятие за выполнение данного объема производства, если бы этот объем производства был включен в план.

Эти коэффициенты задают арбитры. В этой связи одной из подцелей игры служит выбор при данном критерии таких коэффициентов, чтобы суммарные потери предприятий от нереализованной продукции были минимальными.

22. Предприятия выплачивают заработную плату и, возможно, прибавку к ней.

23. Заполняется форма № 1 — исходные данные на следующий период игры.

24. Деятельность каждого директора предприятия, каждого министра, директора банка можно оценить отдельно.

25. На основе этих оценок принимают решения арбитры.

Оценкой деятельности министра является прибыль, получаемая от отчислений от прибыли трех предприятий.

По мнению авторов, в игре I имеет смысл использовать критерий удовлетворения потребностей населения в минимально короткие сроки, ибо система связана с рынком через министерство В. Задается перспективный план объема реализованной продукции (на шесть, двенадцать периодов), который необходимо выполнить в установленные сроки при данном уровне рентабельности и прибыли и балансовых масштабах различных ресурсов.

Другим критерием может служить проверка устойчивости работы всей системы. Для этого в игру вводятся заведомо нерентабельные и сверхрентабельные предприятия, и необходимо в кратчайший срок «погасить этот шум». Кроме того, исследования затронут определенные уровни вероятности выполнения системы ограничений в стохастических линейных моделях, которыми описываются разные варианты данной игры.

Деятельность каждого из участников игры оценивается по тому, как он выполняет текущий план. Кроме того, можно сравнивать решения, принятые участниками игры, с решениями, получаемыми на ЭВМ, играющей оптимально, такое соревнование человека с машиной способствует обучению в принятии решений по управлению в условиях риска и неопределенности.

Описанная экспериментальная деловая игра опробовалась на экономическом факультете ЛГУ в 1966/67 и 1967/68 учебных годах. Участниками делового эксперимента были студенты IV курса отделения экономической кибернетики. В играх приняли участие уже более 100 студентов, проведено около 30 занятий.

Экспериментальные игры вызывают живой интерес у студентов, способствуют закреплению знаний, полученных в результате традиционной

подготовки. Принимая участие в играх, студенты знакомятся с материалами, к которым никакая другая форма обучения не заставила бы их обращаться, и делают это добровольно и добросовестно. Наш небольшой опыт в проведении деловых игр указывает на то, что подобные методы — наилучшая форма обучения. Деловая игра должна применяться наряду с лекционной и семинарской системой обучения.

## НЕКОТОРЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ДЕЛОВУЮ ИГРУ I

Математическая модель игры прежде всего должна отразить решения по управлению, принятые на уровне предприятия. Интерес представляют решения директоров предприятий по составлению планов и те решения, которые дают возможность выполнить принятые планы.

Источники расширения производства, предусмотренные правилами игры, указаны в п. 7 предыдущего раздела.

Неизвестными в задаче линейного стохастического программирования будут значения, которые использованы из каждого источника расширения производства соответствующим предприятием, и суммы заказов контрагентам.

Обозначим через $Q$ множество случайных состояний природы, а $q$ элемент из этого множества.

Пусть $B_j^*$ — множество всех возможных реализаций продукции предприятием с номером $j$, тогда $B_j(q)$ — элемент из этого множества.

Задача в матричной форме имеет вид

$$Ax \leqslant B(q), \tag{1}$$

$$\max z = \max C(q)^T x, \quad q \in Q, \tag{2}$$

$$x \geqslant 0, \quad B(q) \in B^*. \tag{3}$$

Для тех критериев оптимальности, для которых случайные элементы входят в целевую функцию задачи, имеет смысл рассматривать задачу стохастического линейного программирования в постановке Катаока [6]

$$\max f, \quad q \in Q, \tag{4}$$

$$P\{C(q)^T x \leqslant f\} = \beta, \quad 0 < \beta \leqslant 1, \tag{5}$$

$$P\{a_i x \leqslant b_i(q)\} \geqslant \alpha_i, \quad 0 < \alpha_i \leqslant 1, \tag{6}$$

$$x \geqslant 0. \tag{7}$$

Заменим задачу (4)—(7) задачей выпуклого программирования. Для этого сделаем следующие предположения:

I. Компоненты $b_i(q)$ вектора $b(q)$ подчиняются нормальному распределению $N(b_i, \sigma_{b_i}^2)$. (Данная запись означает, что $b_i(q)$ имеет нормальное распределение со средним $b_i$ и дисперсией $\sigma_{b_i}^2$).

II. Вектор $C(q)$ имеет многомерное нормальное распределение с вектором математического ожидания $\bar{C}$ и корреляционной матрицей $V = (v_{ij})$, где $v_{ij} = E(C_i - \bar{C}_i)(C_j - \bar{C}_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

III. $\alpha_i \leqslant 0{,}5$ и $\beta \leqslant 0{,}5$.

Пусть $\Phi(x)$ — функция распределения случайной величины $N(0, 1)$, т. е.

$$\Phi(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy.$$

Введем функцию

$$\psi(x) = 1 - \Phi(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{x}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy.$$

Тогда в силу предположения I неравенства (6) принимают вид

$$P\{a_i x \leqslant b_i(q)\} = P\left\{\frac{a_i x - b_i}{\sigma_{b_i}} \leqslant \frac{b_i(q) - b_i}{\sigma_{b_i}}\right\} = \psi\left\{\frac{a_i x - b_i}{\sigma_{b_i}}\right\} \geqslant \alpha_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Следовательно, система ограничений (6) эквивалентна системе

$$\frac{a_i x - \bar{b}_i}{\sigma_{b_i}} \leqslant \psi^{-1}(\alpha_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Так как из предположения III следует, что $\psi^{-1}(\alpha_i) \leqslant 0$, можно положить $\psi^{-1}(\alpha_i) = -q_i$. Окончательно получим следующую систему ограничений

$$a_i x \leqslant \bar{b}_i - q_i \sigma_{b_i} \equiv b^*,$$

которую перепишем в более компактном виде $Ax \leqslant b^*$, где

$$b^{*T} = (b_1^*, b_2^*, \ldots, b_m^*)^T. \tag{8}$$

Рассмотрим случайный вектор $C(q)^T x$, который в силу предположения II имеет вектор математического ожидания $\bar{C}^T x$. Вычисление дисперсии вектора $\bar{C}(q)^T x$ дает

$$D(C(q)^T x) = D\left(\sum_{j=1}^{n} C_j(q) x_j\right) = E\left(\sum_{j=1}^{n} (C_j(q) - \bar{C}_j) x_j\right)^2 =$$

$$= E\left[\sum_{i,j} (C_i(q) - \bar{C}_i)(C_j(q) - \bar{C}_j) x_i x_j\right] =$$

$$= \sum_{i,j} E(C_i(q) - \bar{C}_i)(C_j(q) - \bar{C}_j) x_i x_j = \sum_{i,j} v_{ij} x_i x_j = x^T V x.$$

Используя полученные результаты и учитывая предположения II, можно (5) записать в виде

$$P\{C(q)^T x \leqslant f\} = P\left\{\frac{C(q)^T x - \bar{C}^T x}{\sqrt{x^T V x}} \leqslant \frac{f - \bar{C}^T x}{\sqrt{x^T V x}}\right\} = \Phi\left\{\frac{f - \bar{C}^T x}{\sqrt{x^T V x}}\right\} = \beta.$$

Отсюда

$$\frac{f - C^T x}{\sqrt{x^T V x}} = \Phi^{-1}(\beta),$$

так что $f = \bar{C}^T x + \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{x^T V x}$.

Из предположения III следует, что $\Phi^{-1}(\beta) \leqslant 0$. Положив $-q = \Phi^{-1}(\beta)$, получим

$$f = \bar{C}^T x - q\sqrt{x^T V x}. \tag{9}$$

Можно показать, что функция $f$, определенная соотношением (9),— вогнутая.

Катаока предполагает заменить задачу с целевой функцией

$$\max_{x \in S^*} f = \max_{x \in S^*} (\bar{C}^T x - q\sqrt{x^T V x}),$$

где $S^* = \{x : Ax \leqslant b^*, x \geqslant 0\}$, задачей с целевой функцией

$$\max_{x \in S^*} f_1 = \max_{x \in S^*} (\bar{C}^T x - q/2R\, x^T V x), \tag{10}$$

где $R$ — положительный параметр.

На основе теоретических выводов, сделанных Катаока, он предлагает

два метода решения задачи (4)—(7), которые называют интерполяционным и итеративным [6].

Важным моментом исследования является выбор уровней вероятностей выполнения неравенства (5), (6). Каждое неравенство имеет экономический смысл, и степень строгости выполнения ограничения в этом случае представляет интерес.

Когда целевая функция содержит детерминированные коэффициенты, задачу стохастического линейного программирования, моделирующую деловую игру I, имеет смысл рассматривать в нежесткой постановке.

Задача имеет вид

$$\min C^T x, \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} Ax \leqslant B(q), \quad q \in Q \\ x \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Любой фиксированный вектор $\overset{\circ}{x} \geqslant 0$, который является допустимым планом задачи (11), (12), при фиксированной реализации вектора $B(q)$ будет недопустимым при всех остальных реализациях. Будем допускать такие отклонения, они компенсируются вектором

$$u(q) = B(q) - A\overset{\circ}{x}, \tag{13}$$

но это влечет за собой дополнительные затраты. Нашей целью является минимизация этих затрат, т. е. для каждой реализации $q \in Q$ надо решить задачу

$$\min f^T(u^+(q) + u^-(q)), \tag{14}$$

$$Ju^+(q) - Ju^-(q) = B(q) - A\overset{\circ}{x},$$

$$u^+(q) \geqslant 0; \quad u^-(q) \geqslant 0, \tag{15}$$

где $J$ — единичная матрица, а

$$u^+(q) = B(q) - A\overset{\circ}{x};\ u^-(q) = 0, \text{ если } B(q) \geqslant A\overset{\circ}{x},$$

$$u^+(q) = 0;\ u^-(q) = A\overset{\circ}{x} - B(q), \text{ если } B(q) < A\overset{\circ}{x}. \tag{16}$$

Задачи (11), (12) и (14), (15) можно объединить

$$\min_x \{C^T x + E \min_u f^T(u^+(q) + u^-(q))\}, \tag{17}$$

где $x$ и $u$ удовлетворяют

$$Ax + Ju^+(q) - Ju^-(q) = B(q),\ q \in Q,\ x_1 u^+(q)_1 u^-(q) \geqslant 0. \tag{18}$$

Известны методы решения этой задачи как в случае дискретного распределения вектора $B(q)$ [7], так и для непрерывного распределения [8].

Возможны другие постановки задачи стохастического линейного программирования, моделирующей деловую игру. Решения, полученные на модели с помощью ЭВМ, способствуют обучению участников деловых игр, а кроме того, дают возможность проводить исследования в ряде дискуссионных вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Дмитриев. Основы подготовки конструкторов и производственников. За промышленные кадры, 1936, № 3.
2. М. Бирштейн. Опыт организационно-производственных испытаний. Легкая промышленность, 1938, № 3.
3. А. Морозов. Аварийные игры. Техпропаганда, 1933, № 7.
4. Я. Островский. Аварийные игры на Шатуре. Техпропаганда, 1933, № 7.
5. Ф. Л. Вейтков, В. К. Мешков. Диспетчерское управление энергосистемами. М.— Л., «Стандартгиз», 1936.
6. S. Kataoka. A stohastic programming model. Econometrica, 1963, N 31.
7. G. B. Dantzig, A. Madansky. On the solution of two-stage linear programs under uncertainty. Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat and Prob. Berkeley, 1961, N 1.
8. J. E. Kelley. The Cutting-Plane Method for solving convex programs. J. Soc. Jud. Appl. Math., 1960, v. 3, N 4.

Поступила в редакцию
2 VIII 1968

ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1969
том V, вып. 1

# О СПОСОБЕ ПОВЫШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗВЕДКИ НЕДР И ПОДСЧЕТА ЗАПАСОВ РУДНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

К. С. КУЗЬМИН, С. В. ТЕМКО

*(Москва)*

1. Обычно, когда данные разведочного бурения не дают достаточно надежной информации о рассматриваемом геологическом объекте, используются системы горных выработок [1], что значительно удорожает геологоразведочные работы. Однако в ряде случаев, как показывает анализ классификационной таблицы Крейтера [2], число горных выработок можно уменьшить, если вместо разведки месторождений с неравномерным распределением полезного компонента системой горных выработок воспользоваться гораздо более дешевым и экономически более выгодным способом разведки недр — системой скважин с некоторым числом горных выработок в комплексе со способом оценки физических свойств рудных месторождений, основанном на общем методе [3] решения некоторого класса экстремальных задач. Такое комплексное рассмотрение строится с учетом результатов, полученных геофизическими методами разведки, бурением системы скважин и проведением горных выработок. Это позволяет найти условия, ведущие к сокращению объема горных работ по разведке рудных месторождений. Последнее, естественно, способствует уменьшению общей стоимости геологоразведочных работ и повышению их экономической эффективности. Необходимость комплексного подхода, учитывающего требование экономичности разведки месторождений, была отмечена А. А. Никитиным [4].

2. Пусть в результате геолого-геофизической разведки месторождения удалось установить геометрическую форму $F$, протяженность и глубину залегания геологического объекта, образованного горными породами с неравномерным распределением полезного компонента. Горные породы с обнаруженным полезным содержанием предполагаются отсутствующими вне области $F$. При этом будем считать, что геологические границы данного объекта совпадают с границами кондиционности руды.

Введем в рассмотрение распределение масс горных пород в изучаемом геологическом объекте, обозначив это распределение через $\mu$. Будем искать $\mu$ в следующей форме

$$d\mu = \chi(Q)\, dv_Q, \tag{1}$$

где $dv_Q$ — трехмерный элемент объема; $\chi(Q)$ — плотность распределения масс горных пород; $Q$ — точка, расположенная внутри рассматриваемой области $F$; $Q \in F$.

Говорят, что распределение массы $\mu$ сосредоточено в области $F$, если для любой области $G$, не имеющей общих точек с данной областью $F$, выполняется условие $\mu(G) = 0$. Это обстоятельство обозначают посредством $\mu \prec F$.

Обозначим через $\varphi(r)$ потенциальную энергию взаимодействия пары единичных масс, расположенных на расстоянии $r$ друг от друга. Обозначим через $|P - Q|$ расстояние между точками $P$ и $Q$. Пусть точка $P \in F$