

два метода решения задачи (4) — (7), которые называют интерполяционным и итеративным [6].

Важным моментом исследования является выбор уровней вероятностей выполнения неравенства (5), (6). Каждое неравенство имеет экономический смысл, и степень строгости выполнения ограничения в этом случае представляет интерес.

Когда целевая функция содержит детерминированные коэффициенты, задачу стохастического линейного программирования, моделирующую деловую игру I, имеет смысл рассматривать в нежесткой постановке.

Задача имеет вид

$$\min C^T x, \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} Ax &\leq B(q), \quad q \in Q \\ x &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Любой фиксированный вектор $\overset{\circ}{x} \geq 0$, который является допустимым планом задачи (11), (12), при фиксированной реализации вектора $B(q)$ будет недопустимым при всех остальных реализациях. Будем допускать такие отклонения, они компенсируются вектором

$$u(q) = B(q) - A\overset{\circ}{x}, \quad (13)$$

но это влечет за собой дополнительные затраты. Нашей целью является минимизация этих затрат, т. е. для каждой реализации $q \in Q$ надо решить задачу

$$\min f^T(u^+(q) + u^-(q)), \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} Ju^+(q) - Ju^-(q) &= B(q) - A\overset{\circ}{x}, \\ u^+(q) &\geq 0; \quad u^-(q) \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где J — единичная матрица, а

$$\left. \begin{aligned} u^+(q) &= B(q) - A\overset{\circ}{x}; \quad u^-(q) = 0, \text{ если } B(q) \geq A\overset{\circ}{x}, \\ u^+(q) &= 0; \quad u^-(q) = A\overset{\circ}{x} - B(q), \text{ если } B(q) < A\overset{\circ}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Задачи (11), (12) и (14), (15) можно объединить

$$\min_x \{C^T x + E \min_u f^T(u^+(q) + u^-(q))\}, \quad (17)$$

где x и u удовлетворяют

$$Ax + Ju^+(q) - Ju^-(q) = B(q), \quad q \in Q, \quad x, u^+(q), u^-(q) \geq 0. \quad (18)$$

Известны методы решения этой задачи как в случае дискретного распределения вектора $B(q)$ [7], так и для непрерывного распределения [8].

Возможны другие постановки задачи стохастического линейного программирования, моделирующей деловую игру. Решения, полученные на модели с помощью ЭВМ, способствуют обучению участников деловых игр, а кроме того, дают возможность проводить исследования в ряде дискуссионных вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Дмитриев. Основы подготовки конструкторов и производственников. За промышленные кадры, 1936, № 3.
2. М. Бирштейн. Опыт организационно-производственных испытаний. Легкая промышленность, 1938, № 3.
3. А. Морозов. Аварийные игры. Техпропаганда, 1933, № 7.
4. Я. Островский. Аварийные игры на Шатуре. Техпропаганда, 1933, № 7.
5. Ф. Л. Вейтков, В. К. Мешков. Диспетчерское управление энергосистемами. М.—Л., «Стандартгиз», 1936.
6. S. Kataoka. A stochastic programming model. Econometrica, 1963, N 31.
7. G. B. Dantzig, A. Madansky. On the solution of two-stage linear programs under uncertainty. Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat and Prob. Berkeley, 1961, N 1.
8. J. E. Kelley. The Cutting-Plane Method for solving convex programs. J. Soc. Ind. Appl. Math., 1960, v. 3, N 4.

Поступила в редакцию
2 VIII 1968

О СПОСОБЕ ПОВЫШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗВЕДКИ НЕДР И ПОДСЧЕТА ЗАПАСОВ РУДНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

К. С. КУЗЬМИН, С. В. ТЕМКО

(Москва)

1. Обычно, когда данные разведочного бурения не дают достаточно надежной информации о рассматриваемом геологическом объекте, используются системы горных выработок [1], что значительно удорожает геолого-разведочные работы. Однако в ряде случаев, как показывает анализ классификационной таблицы Крейтера [2], число горных выработок можно уменьшить, если вместо разведки месторождений с неравномерным распределением полезного компонента системой горных выработок воспользоваться гораздо более дешевым и экономически более выгодным способом разведки недр — системой скважин с некоторым числом горных выработок в комплексе со способом оценки физических свойств рудных месторождений, основанном на общем методе [3] решения некоторого класса экстремальных задач. Такое комплексное рассмотрение строится с учетом результатов, полученных геофизическими методами разведки, бурением системы скважин и проведением горных выработок. Это позволяет найти условия, ведущие к сокращению объема горных работ по разведке рудных месторождений. Последнее, естественно, способствует уменьшению общей стоимости геологоразведочных работ и повышению их экономической эффективности. Необходимость комплексного подхода, учитывающего требование экономичности разведки месторождений, была отмечена А. А. Никитиным [4].

2. Пусть в результате геолого-геофизической разведки месторождения удалось установить геометрическую форму F , протяженность и глубину залегания геологического объекта, образованного горными породами с неравномерным распределением полезного компонента. Горные породы с обнаруженным полезным содержанием предполагаются отсутствующими вне области F . При этом будем считать, что геологические границы данного объекта совпадают с границами кондиционности руды.

Введем в рассмотрение распределение масс горных пород в изучаемом геологическом объекте, обозначив это распределение через μ . Будем искать μ в следующей форме

$$d\mu = \chi(Q) dv_Q, \quad (1)$$

где dv_Q — трехмерный элемент объема; $\chi(Q)$ — плотность распределения масс горных пород; Q — точка, расположенная внутри рассматриваемой области F ; $Q \in F$.

Говорят, что распределение массы μ сосредоточено в области F , если для любой области G , не имеющей общих точек с данной областью F , выполняется условие $\mu(G) = 0$. Это обстоятельство обозначают посредством $\mu \leq F$.

Обозначим через $\varphi(r)$ потенциальную энергию взаимодействия пары единичных масс, расположенных на расстоянии r друг от друга. Обозначим через $|P - Q|$ расстояние между точками P и Q . Пусть точка $P \in F$

и точка $Q \in F$, тогда при $\mu < F$ функционал

$$I(\mu) = \iint_F \varphi(|P - Q|) \chi(P) \chi(Q) dv_P dv_Q, \quad (2)$$

где интегрирование ведется по всей трехмерной области F , определяет потенциальную энергию данного геологического объекта при распределении масс μ , которое зависит от формы области F и пространственной протяженности изучаемого геологического объекта.

Пусть $W(F)$ — минимальное значение потенциальной энергии данного геологического объекта, тогда

$$W(F) = \inf_{\mu < F} I(\mu). \quad (3)$$

где нижняя грань берется по всем распределениям массы μ , сосредоточенным в области F .

Необходимо отметить, что горные породы, образующие данное геологическое тело, в действительности сосредоточиваются на носителе распределения массы F_μ . Под носителем распределения массы F_μ понимают такую область F_μ , входящую в данную область F , каждая точка P которой обладает свойством, что, какова бы ни была окрестность $O(P)$ рассматриваемой точки P , имеет место следующее условие: $\mu(O(P)) \neq 0$.

Следуя работе [3], введем в рассмотрение φ -емкость области F . Под φ -емкостью области F понимают число $c(F; \varphi)$, которое при конечном значении потенциальной энергии $W(F)$ определяется из уравнения $W(F) = \varphi[c(F; \varphi)]$. Если $W(F) = +\infty$, то φ -емкость области F принимается равной нулю. Последнее отвечает случаю, когда, к примеру, вся масса исследуемых горных пород с полезным содержанием может считаться сосредоточенной в отдельных изолированных точках. Согласно Крейтеру [2], разведка такого типа месторождений возможна лишь горными выработками и отвечает их непосредственной разработке.

Целью настоящей работы является нахождение условий повышения экономической эффективности геолого-геофизической разведки месторождений путем замены части дорогостоящих горных выработок более дешевым и экономически значительно более выгодным способом разведки — системой разведочных скважин. Это достигается с помощью комплексирования геофизических методов разведки с разведочным бурением и способом оценки физических свойств геологических объектов. В результате такого комплексного подхода удастся установить необходимое число и способ размещения разведочных скважин и горных выработок, которые требуются для проведения детальной разведки рудных месторождений.

3. Прежде всего, используя метод оптимизации, предложенный в [3], найдем плотность устойчивого по Ляпунову равновесного распределения массы горных пород в геологическом объекте с фиксированной формой F и известными размерами. Форма геологического объекта при неравномерном распределении полезного компонента устанавливается по данным гравиразведки или магниторазведки.

Пусть $\mu < F$. Введем в рассмотрение φ -потенциал $u(P)$, порожденный распределением массы горных пород μ , который, согласно [3], выражается следующим интегралом

$$u(P) = \int_F \varphi(|P - Q|) \chi(Q) dv_Q. \quad (4)$$

В [3] было показано, что если функция $\varphi(r)$ удовлетворяет условиям теоремы равновесия, то для всякой ограниченной и замкнутой области F положительной φ -емкости существует единственное распределение массы μ^* , $d\mu^* = \chi^*(Q) dv_Q$, которое реализует минимум потенциальной энергии

$I(\mu)$, определяемой функционалом (2). Такое распределение массы μ^* называют устойчивым по Ляпунову равновесным распределением массы в области F . Если φ -потенциал порожден равновесным распределением массы μ^* , его называют φ -потенциалом равновесия и обозначают через $u^*(P)$.

В [3], в частности, было показано, что если данная функция $\varphi(r)$ удовлетворяет теореме равновесия для фиксированной области F , то равновесное распределение массы μ^* порождает φ -потенциал равновесия $u^*(P)$, обладающий следующими свойствами: 1) $u^*(P) = W(F)$ всюду в области F ; 2) $u^*(P) \leq W(F)$ во всем пространстве. Подробный анализ потенциальных функций $\varphi(r)$, для которых справедлива теорема равновесия, в достаточно общих предположениях дан в [3].

Говорят, что граница данной области F удовлетворяет условию Пуанкаре, если каждая точка границы F может рассматриваться в качестве вершины конуса, целиком расположенного внутри области F .

Пусть F — область, граница которой удовлетворяет условию Пуанкаре, тогда в силу [3] всюду в данной области F имеем $u^*(P) = W(F)$. Таким образом, если $P \in F$, то

$$W(F) = \int_F \varphi(|P - Q|) \chi^*(Q) dv_Q. \quad (5)$$

Для дальнейшего удобно ввести вспомогательную функцию

$$V(P) = \begin{cases} W(F), & \text{если } P \text{ принадлежит } F; \\ 0, & \text{если } P \text{ не принадлежит } F. \end{cases}$$

Теперь для нахождения плотности распределения массы горных пород $\chi(Q)$ в рассматриваемом геологическом объекте получим следующее интегральное уравнение первого рода

$$V(P) = \int_F \varphi(|P - Q|) \chi(Q) dv_Q. \quad (6)$$

Можно показать, что распределение массы μ , удовлетворяющее уравнению (6), реализует минимум функционала (2).

Здесь уместно отметить, что решение проблемы нахождения формы области F при заданной плотности пород и известном поле вне области F было дано А. Н. Тихоновым и В. Б. Гласко [5], причем в [5] был использован метод регуляризации А. Н. Тихонова, развитый в работах [6—8] применительно к решению некорректно поставленных задач. В [3] для фиксированной области F и заданном поле внутри этой области был предложен метод минимизации функционала типа (2), определяющего потенциальную энергию рассматриваемого объекта. Отметим, что метод, приведенный в [3], применим для оценки физических свойств геологических объектов фиксированной формы.

4. Следуя [3], для решения уравнения (6) воспользуемся преобразованием Фурье. Применяя к (6) преобразование Фурье, получим

$$\bar{V}(P) = (2\pi)^{3/2} \bar{\varphi}(P) \bar{\chi}(P), \quad (7)$$

где $\bar{V}(P)$; $\bar{\varphi}(P)$; $\bar{\chi}(P)$ — соответственно образы Фурье функций $V(P)$; $\varphi(P)$; $\chi(P)$. В том случае, когда функция $r^2\varphi(r)$ абсолютно интегрируема при $0 \leq r < +\infty$, равенство (7) является вполне справедливым. Если же $r^2\varphi(r)$ не является абсолютно интегрируемой при $0 \leq r < +\infty$, равенство (7) применимо тогда, когда преобразование Фурье функции $\varphi(r)$ существует в смысле главного значения, по Коши [9].

В силу определения функции $V(P)$ для ее образа Фурье имеем

$$\bar{V}(P) = W(F) \bar{\psi}(P; F), \quad (8)$$

где $\bar{\psi}(P; F)$ — образ Фурье характеристической функции области F

$$\bar{\psi}(P; F) = (2\pi)^{-3/2} \int_F \exp\{i(PM)\} dv_M, \quad (9)$$

где (PM) — скалярное произведение радиусов-векторов OP и OM ;

$$P = (x_1, x_2, x_3); \quad M = (y_1, y_2, y_3).$$

Так как $\varphi(|M|) = \varphi(r)$, где $r^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, то в силу [9] получим

$$\bar{\varphi}(|P|) = \bar{\varphi}(\rho). \quad (10)$$

Здесь $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; $\bar{\varphi}(\rho)$ — образ Ханкеля функции $\varphi(r)$

$$\bar{\varphi}(\rho) = \rho^{-1/2} \int_0^\infty r^{3/2} \varphi(r) J_{1/2}(\rho r) dr, \quad (11)$$

где $J_\nu(t)$ — функция Бесселя первого рода ν -го порядка.

Теперь образ Фурье искомой плотности распределения массы горных пород $\bar{\chi}(P)$ удовлетворяет следующему операторному уравнению

$$W(F) \bar{\psi}(P; F) = (2\pi)^{3/2} \bar{\varphi}(\rho) \bar{\chi}(P). \quad (12)$$

Из операторного уравнения (12) вытекает, что

$$\bar{\chi}(P) = \frac{W(F) \bar{\psi}(P; F)}{(2\pi)^{3/2} \bar{\varphi}(\rho)}. \quad (13)$$

Таким образом, задача определения плотности $\chi^*(Q)$ сводится к нахождению прообраза Фурье для функции $\chi(P)$, определяемой выражением (13). Для областей простейшей формы устанавливается явный вид плотности равновесного распределения массы. В тех же случаях, когда область F имеет произвольную форму, прообраз Фурье для $\chi(P)$, представленной в виде (13), находится численными методами с помощью формул обращения Фурье [10]. Заметим, что для области произвольной формы F интегральное уравнение Фредгольма первого рода (6) допускает решение методом А. Н. Тихонова и В. Б. Гласко [5].

5. Пусть плотность устойчивого по Ляпунову равновесного распределения массы горных пород $\chi(Q)$ найдена. Рассмотрим теперь проблему размещения сети разведочных скважин и горных выработок на площади разведываемого рудного месторождения. Найдем те условия, при которых с помощью комплексирования данных геофизической разведки с результатами бурения и горных выработок при установленной плотности распределения горных пород $\chi(Q)$ можно добиться уменьшения общего объема дорогостоящих горных работ, увеличивая тем самым экономическую эффективность геологоразведочных работ на стадии детальной разведки месторождения.

Пусть обычными способами осуществлено разбиение данного месторождения на квадраты [2]. Будем искать такое размещение скважин и горных выработок на каждом участке данного месторождения, при котором достигается максимум информации. Известно [11], что с увеличением изученности месторождения должна возрасти информация и уменьшиться неопределенность в оценке свойств исследуемого месторождения.

Пусть $\gamma(Q)$ означает плотность распределения массы горных пород, полученную по данным разведочного бурения и по уже имеющимся горным выработкам с помощью известных методов обработки результатов наблюдений и измерений [12]. Будем считать, что отклонения опытной плотности распределения пород $\gamma(Q)$, построенной по данным бурения и горных выработок, от плотности устойчивого по Ляпунову равновесного распределения массы горных пород $\chi(Q)$ подчиняются логнормальному закону распределения [13]. В этом случае максимум информации будет достигаться при минимуме дисперсии значений опытной плотности $\gamma(Q)$ относительно $\chi(Q)$.

Отметим, что по плотности равновесного распределения массы горных пород $\chi(Q)$ кроме дисперсии $\gamma(Q)$ относительно $\chi(Q)$ устанавливается еще дисперсия содержания $\chi(Q)$ по отношению к среднему содержанию χ .

Теперь с помощью известных методов [14] можно построить карты для средних квадратичных отклонений ошибки определения опытной плотности распределения пород $\gamma(Q)$ по сравнению с $\chi(Q)$ и содержания $\chi(Q)$ по отношению к среднему содержанию χ . Для построения таких карт в изолиниях в [15] разработана система программ для ЭВМ.

Карты в изолиниях для указанных средних квадратичных отклонений дают возможность дифференцированно подойти к выбору расстояния между разведочными скважинами и горными выработками в соответствии, к примеру, с таблицей, приведенной в [1].

Дополнительные разведочные скважины и горные выработки при детальной разведке рудных месторождений следует размещать на тех участках месторождения, где среднее квадратичное отклонение ошибки определения $\gamma(Q)$ по отношению к $\chi(Q)$ превосходит допустимое значение A . Для каждого вида минерального сырья существует своя допустимая степень изученности месторождения, и в зависимости от вида сырья устанавливается свое предельное значение допустимой дисперсии ошибки опытного распределения массы горных пород $\gamma(Q)$ по сравнению с $\chi(Q)$. В тех местах месторождения, где дисперсия ошибки опытной плотности $\gamma(Q)$, полученной из анализа результатов разведочного бурения и горных выработок, становится больше допустимой величины A^2 , там необходимо сгустить сеть скважин и горных выработок. Напротив, на тех участках месторождения, где дисперсия меньше допустимого значения, можно ограничиться уже имеющимися в наличии скважинами и горными выработками и не проводить дополнительного бурения и горных работ. Такой подход, бесспорно, должен способствовать экономическому выигрышу по сравнению с системой равномерно распределенных разведочных скважин и горных выработок при разведке рудных месторождений.

6. После уточнения границы области F , соответствующей данному геологическому объекту, по результатам геофизической разведки, бурения скважин и горных работ с учетом устойчивого распределения массы пород $\chi(Q)$ из условия нормировки для $\chi(Q)$ находится величина запасов

$$\mu(F) = \int_F \chi(Q) dv_Q. \quad (14)$$

Если плотность распределения массы пород $\chi(Q)$ подставить в выражение для φ -потенциала $u(P)$, определяемого формулой (4), при $P \in F$ получим распределение φ -потенциала поля $u(P)$ вне рассматриваемого геологического объекта. Распределение φ -потенциала поля $u(P)$ строится с учетом формы F , протяженности и глубины залегания данного геологического объекта.

Сравнение среднего квадратичного отклонения потенциала поля, полученного с помощью геофизических измерений, со средним квадратичным отклонением φ -потенциала $u(P)$ в тех же самых точках на земной поверхности дает величину постоянной $W(F)$.

7. Предлагаемая здесь схема оценки экономической эффективности разведки рудных месторождений и подсчета запасов при несовпадении геолого-геофизических границ месторождения с границами кондиционности руды позволяет выдвинуть определенные прогнозы и внести рекомендации по организации геологоразведочных работ, связанные с размещением сети разведочных скважин и горных выработок, которые должны быть учтены при детальной разведке и на стадии составления проекта разработки месторождения. Учет этих прогнозов и рекомендаций в случае несовпадения указанных границ должен способствовать уменьшению общей стоимости геолого-геофизических работ и увеличению экономической эффективности разведки месторождения и подсчета запасов.

Настоящее рассмотрение строится без учета гидрогеологических и горно-технических условий разведки рудных месторождений, о которых геофизические методы разведки не дают какой-либо информации. Включение этих факторов в предлагаемую схему оценки экономической эффективности геологоразведочных работ и подсчета запасов рудных месторождений требует проведения дополнительного анализа затронутой здесь проблемы.

Выражаем благодарность П. П. Макагонову за участие в обсуждении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подсчет запасов месторождений полезных ископаемых. М., Госгеолтехиздат, 1960.
2. В. М. Крейтер. Поиски и разведки полезных ископаемых. М.—Л., Госгеолиздат, 1940.
3. К. В. Темко, С. В. Темко. О потенциале равновесия. Докл. АН СССР, 1966, т. 166, № 3.
4. А. А. Никитин. Статистическое обнаружение слабых геофизических аномалий на фоне случайных помех (дис. МГРИ). М., 1967.
5. А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко. О приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1964, т. 4, № 2.
6. А. Н. Тихонов. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. Докл. АН СССР, 1963, т. 51, № 3.
7. А. Н. Тихонов. О регуляризации некорректно поставленных задач. Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 1.
8. А. Н. Тихонов. О нелинейных уравнениях первого рода. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5.
9. С. Бохнер. Лекции об интегралах Фурье. М., Физматгиз, 1962.
10. В. И. Крылов. Приближенное вычисление интегралов. М., «Наука», 1967.
11. М. Л. Антокольский. Теория информации и ее применение в геофизической разведке. М., 1965.
12. Л. Яноши. Теория и практика обработки результатов измерений. М., «Мир», 1968.
13. З. Павловский. Введение в математическую статистику. М., «Статистика», 1967.
14. А. Р. Зайдель, Г. И. Лохматов, Н. Н. Таусон. Математические методы при построении карт в практике геологических работ. М., 1967.
15. А. Р. Зайдель, А. С. Петухов. Электронно-вычислительные машины и их применение для обработки промыслово-геофизических данных. М., 1964.

Поступила в редакцию
10 IV 1968

СТРУКТУРНО-ИНФОРМАЦИОННЫЕ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ЦИФРОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

В. Д. ТРУХНИЙ

(Москва)

Структурой S цифровой вычислительной машины (ЦВМ) будем называть конечный граф

$$(X, \Gamma),$$

где X — конечное множество устройств ЦВМ, Γ — функция, определяющая связи между ними. Две структуры — S_1 и S_2 являются различными, если $S_1 \neq S_2$ или $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$.

Конкретные способы решения некоторой задачи на ЦВМ будем называть машинными алгоритмами.

Пусть заданы различные структуры ЦВМ $S_1, S_2, \dots, S_n$ и различные машинные алгоритмы $A_1, A_2, \dots, A_m$. Возникает вопрос, какую из заданных структур ЦВМ выбрать для реализации того или иного конкретного машинного алгоритма, или, наоборот, какой из имеющихся машинных алгоритмов более всего подходит для реализации на некоторой вполне определенной структуре ЦВМ? Очевидно, что ответ на эти вопросы возможен при наличии формального определения качества реализации машинного алгоритма A на структуре S .

В данной статье рассматриваются некоторые критерии, характеризующие качество реализации машинного алгоритма на ЦВМ, а также формулируются задачи анализа и синтеза пары: структура — машинный алгоритм. Изложение сопровождается конкретными расчетными примерами.

1. КРАТКИЙ ОБЗОР РАНИХ РАБОТ

Качество ЦВМ и машинных алгоритмов оценивалось стоимостью ЦВМ, ее быстродействием, требуемыми объемами памяти, количеством операций различной длительности и т. д. Эти довольно важные показатели не позволяют, однако, провести оценку качества реализации машинного алгоритма на ЦВМ.

В дальнейшем [1—7] стали рассматривать такие характеристики пары: алгоритм — ЦВМ, как полное время решения задачи, стоимости отдельных устройств и степени их используемости в процессе реализации алгоритма, а также некоторые их усредненные показатели. В [3—6] была указана необходимость точного определения критериев, характеризующих качество выполнения алгоритма на машине.

Такие формальные критерии были предложены в [8—11]. В них качество ЦВМ при решении заданного набора задач оценивалось по формуле

$$\xi = N / CT,$$

где ξ — эффективность ЦВМ; N — число решенных одинаковых задач за время T ; C — стоимость структуры.