ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1969 том V, вып. 1

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА О ЗАМЕНЕ ОБОРУДОВАНИЯ

Ю. В. ЧУЕВ, Г. П. СПЕХОВА

(Москва)

Задаче о замене оборудования посвящены труды многих специалистов. Достаточно указать, что в [1] приведена библиография, включающая около 20 работ, в которых рассмотрено решение этой задачи. Некоторые задачи данного класса описаны в [2].

Задача о замене оборудования ставится следующим образом. Берется модель функционирования некоторого оборудования, которое может выходить из строя или, в более общем случае, каким-либо образом ухудшать свои свойства; потребности в оборудовании известны; экономическая функция, отражающая экономический эффект использования оборудования задана. Требуется определить политику замены, оптимальную в том или ином смысле этого слова.

К числу таких задач можно отнести: 1) задачу о целесообразных сроках замены промышленного оборудования новым, полагая, что замененное оборудование никак не используется; 2) задачу о целесообразных сроках продажи старого оборудования и покупке нового; 3) задачу о целесообразных сроках групповой замены отдельных узлов и агрегатов на технических устройствах; 4) задачу об определении оптимального количества запасных частей или агрегатов.

При решении задач о сроках замены оборудования могут учитываться динамические свойства процесса: а) потребности в оборудовании, которые изменяются со временем или считаются приближенно постоянными; б) изменения со временем расходов на эксплуатацию, амортизационных расходов, эффективности капиталовложений; в) технический прогресс, обеспечивающий возможность получения более эффективного оборудования.

Выход оборудования из строя может рассматриваться как случайный или детерминированный процесс с учетом или без учета накопления повреждений.

Стратегии замены оборудования могут быть различными: плановая, замена по мере выхода из строя, смешанная стратегия или стратегия, предусматривающая применение тех или иных мероприятий по повышению сроков службы оборудования (осмотры, текущее обслуживание и т. д.).

Оборудование при замене можно выбирать либо того же типа, что и существующее, либо нового типа. Старое оборудование можно использовать в менее ответственных местах, либо продавать, либо никак не использовать.

Однако во всех известных нам постановках задач о замене оборудования процесс разработки нового оборудования не рассматривается. В лучшем случае считается, что имеется некий магазин, в котором может быть приобретено то или иное оборудование (одного или другого типа). Такая постановка задачи вполне оправданна, если рассматривать оптимальную политику отдельного предприятия, потребности которого малы по сравнению с общим производством оборудования. Решение такой задачи не может дать рекомендаций о целесообразности разработки нового оборудования.

В ряде случаев необходимо решение именно этой задачи: определить оптимальные сроки начала разработки новых образцов оборудования. Такая задача встает при планировании в общегосударственном масштабе, когда речь идет о крупном оборудовании, или при планировании в масштабах предприятия, когда речь идет о мелком оборудовании, изготавливаемом на этом предприятии для обеспечения собственных потребностей.

Решение такой обобщенной задачи и предполагается рассмотреть ниже. Сформулируем простейшую задачу именно такого типа.

Пусть путем прогнозирования определены потребности в оборудовании $N_x(t, t_n)$, являющиеся функцией текущего времени t и времени конца разработки этого оборудования t_n. Обычно N является возрастающей функцией t (с течением времени потребности в оборудовании возрастают) и убывающей t_n (оборудование, разработанное позже вследствие технического прогресса,— более производительно, и его при прочих равных условиях требуется меньше).

При использовании оборудования нескольких типов должно выполняться условие

$$N_x(t_{n_1}; t) = \sum_i \frac{N_x(t_{n_1}; t)}{N_x(t_{n_i}; t)} N_c(t_{n_i}; t), \tag{1}$$

где $N_c(t_{n_i}; t)$ — количество оборудования t_{n_i} типа, эксплуатируемого в момент времени t.

Очевидно, что ввиду наличия ошибок прогнозирования $N_x(t, t_n)$ случайная функция. Будем полагать, что заданы математическое ожидание этой функции $\overline{N}_x(t, t_n)$ и ее дисперсия $D_x(t, t_n)$. В большинстве случаев нормированная корреляционная функция достаточно мала и ее можно полагать равной нулю.

Пусть задана функция стоимости N_{n_i} образцов t_{n_i}-го оборудования, разработка которого была окончена в t_{n_i}-й год, включающая в себя расходы на разработку, производство и эксплуатацию оборудования

$$C(t_{n_i}; t) = C_p(t_{n_i}) + C_0(t_{n_i}) N_n^{\mu}(t_{n_i}; t) + \tag{2}$$

$$+ K_э(t_{n_i}) \int\limits_{t_{n_i} + \tau(t_{n_i})}^{t} N_c(t_{n_i}; t)\,dt,$$

где $C_p(t_{n_i})$ — стоимость разработки оборудования i-го типа; $C_0(t_{n_i})$ — стоимость производства первого образца оборудования i-го типа; μ — показатель степени, учитывающий уменьшение стоимости производства образца по мере увеличения числа изготовленных образцов (обычно его принимают близким к 0,7); $K_э(t_{n_i})$ — стоимость эксплуатации одного образца оборудования в единицу времени; $\tau(t_{n_i})$ — время, затрачиваемое на разработку i-го образца оборудования; $N_c(t_{n_i}, t)$ — количество эксплуатируемых в момент времени i-х образцов оборудования, которое отличается от количества произведенных $N_п(t_{n_i}; t)$ ввиду выхода части образцов из строя во время эксплуатации.

Если привести затраты к единому моменту времени с помощью коэффициента эффективности капиталовложений r, то получим

$$C(t_{n_i}; t) = \frac{C_p(t_{n_i})}{(1+r)^{t_{n_i} - 0{,}5\tau(t_{n_i})}} + C_0^{\mu}(t_{n_i}) \times$$

$$\times \int\limits_{t_{n_i}}^{t} \frac{(\partial N_п(t_{n_i}; t)/\partial t)\,dt}{(1+r)^t N_п(t_{n_i}; t)^{1-\mu}} + K_э(t_{n_i}) \int\limits_{t_{n_i}}^{t} \frac{N_c(t_{n_i}; t)}{(1+r)^t}\,dt. \tag{3}$$

В том случае, если производится оборудование нескольких видов, формула (3) может быть записана следующим образом:

$$C_\Sigma(\bar{t}_{n_i};\ t)=\sum_i \frac{C_p(t_{n_i})}{(1+r)^{t_{n_i}-0{,}5\tau(t_{n_i})}}+\sum_i C_0(t_{n_i})^{\mu}\times$$

$$\times\int\limits_{t_{ni}}^{t}\frac{(\partial N_n(t_{n_i};\ t)/\partial t)\,dt}{(1+r)^t N_\text{п}(t_{n_i};\ t)^{1-\mu}}+\sum_i K_\text{э}(t_{n_i})\int\limits_{t_{ni}}^{t}\frac{N_c(t_{n_i};\ t)}{(1+r)^t}\,dt. \qquad (4)$$

Здесь $\bar{t}_{n_i}$ обозначает совокупность скаляров t_{n_i} и является условной записью политики замены.

Пусть известны также функции живучести образцов

$$\nu=\frac{N_c(t_{n_i};\ t;\ t_u)}{N_\text{п}(t_{n_i};\ t;\ t_u)}=f\,[(t-t_{u_i});\ t_{n_i}]. \qquad (5)$$

где t_{u_i} — время изготовления образца.

В общем случае

$$N_c(t_{n_i};\ t)=\int\limits_{t_{ni}}^{t}\frac{\partial N_u(t_{n_i};\ \theta)}{\partial t}\,\nu(t_{n_i};\ t-\theta)\,d\theta. \qquad (6)$$

Зачастую можно ограничиться представлением этой зависимости в виде ступенчатой функции, характеристикой которой является время выхода образцов из строя $t_\text{ж}$.

Тогда

$$N_c(t_{n_i};\ t)=N_n(t_{n_i};t)-N_n[t_{n_i};\ (t-t_\text{ж})]. \qquad (7)$$

Требуется определить такую политику замены $\bar{t}_{n_i}$ (сроки конца разработки новых образцов), при которой в любой момент времени будет иметься потребное количество оборудования, т. е. оборудование выполнит поставленный объем задач, условием чего является соблюдение равенства (1), а суммарные затраты к заданному моменту времени T будут минимальными ($\min C_\Sigma$).

Дадим краткое пояснение существа этой задачи.

Технический прогресс позволяет создавать все более и более совершенное оборудование. Если учитывать только эту сторону процесса, то было бы целесообразно беспрерывно создавать новое, более совершенное оборудование. Однако создание такого оборудования требует больших затрат на его разработку, освоение производства, уменьшает размеры производства оборудования одного типа, что удорожает производство образца. С этой точки зрения отработку новых образцов оборудования вообще нецелесообразно производить.

Очевидно, что ни одна из указанных выше точек зрения в общем случае не будет верной. Правильное решение можно найти, анализируя модель функционирования оборудования.

Обобщенная задача замены оборудования распадается на три самостоятельные большие задачи: 1) прогнозирование характеристик оборудования (включая и стоимость), которые могут быть получены при окончании его разработки в момент времени t_{n_i}; прогнозирование объема задач, которые должно решать рассматриваемое оборудование; 2) определение потребного количества оборудования как функции текущего времени и времени начала разработки оборудования; 3) выбор оптимальной политики начала разработок оборудования.

Прогнозирование характеристик нового оборудования — чрезвычайно сложная задача. На рис. 1 и 2 показано изменение характеристики проч-

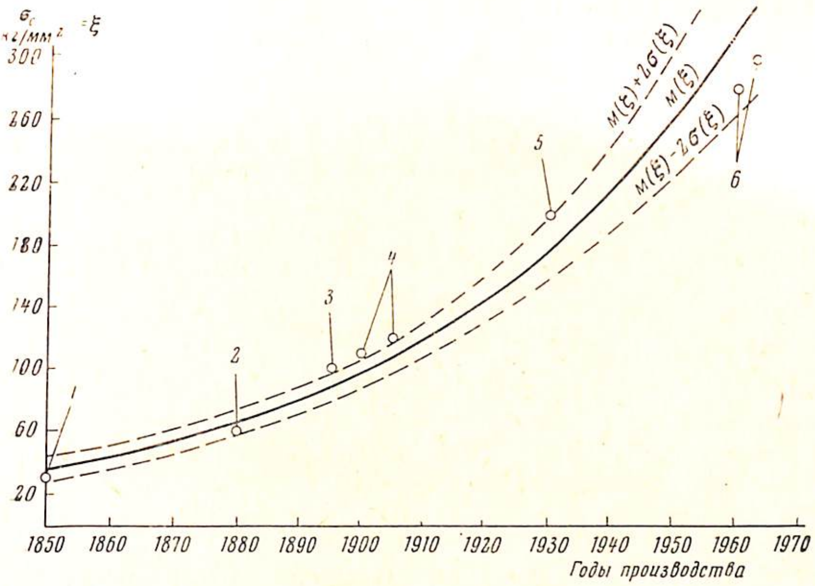

Рис. 1. Изменение характеристик прочности сталей: *1* — пудлинговая сталь; *2* — мартеновская (конверторная) углеродистая; *3* — мартеновская малолегированная; *4* — мартеновская легированная; *5* — высоколегированная электросталь; *6* — электровакуумная высоколегированная сталь

ности лучших сортов сталей (в качестве этой характеристики принято временное сопротивление σ_b) и весовой характеристики советских автомобильных двигателей (отношение веса двигателя к его мощности) в зависимости от года начала производства. Анализ графиков показывает наличие устойчивых тенденций к улучшению характеристик и вместе с тем их существенный разброс.

Прицинпиально эту задачу можно решать двумя методами: статистическим или эвристическим. Кроме того, можно применять комбинированный метод.

При этом следует различать определяющие и производные характеристики. Определяющими называются характеристики, зависящие только от развития науки, техники, производства (производительных сил) и имеющие тенденцию к постоянному улучшению (увеличению или уменьшению). К числу таких характеристик могут быть отнесены прочность материалов, калорийность топлива, удельные мощности двигателей (отношение мощности к весу) и т. д. Эти характеристики и могут быть определены путем прямого прогнозирования.

Производные характеристики — это характеристики, зависящие от определяющих, с одной стороны, и от потребностей, с другой. Например, дальность беспосадочного полета самолетов авиации ГВФ определяется, с одной стороны, техническими возможностями ее обеспечения, а с другой, необходимыми дальностями, которые, очевидно, никогда не будут превышать 20 000 *км*. Прогнозирование таких характеристик значительно сложнее, чем определяющих, так как при этом приходится учитывать и ограничения, связанные с потребностями.

Сущность метода статистического прогнозирования состоит в обработке информации об изменении некоторых характеристик ξ оборудования в зависимости от времени начала его разработки (или модернизации), т. е. совокупности точек $(\xi_i; t_{p_i})$.

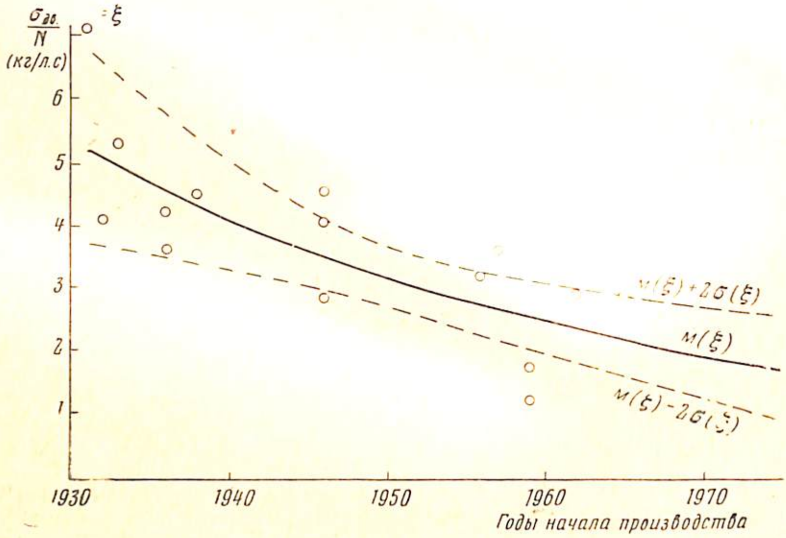

Рис. 2. Изменение весовых характеристик автомобильных двигателей

В качестве непрерывных функций, которые взяты за основу, при прогнозировании обычно принимаются линейная, экспоненциальная и $A[1 + \mathrm{th}\,(a + bt)]$. Параметры этих функций отыскиваются методом наименьших квадратов.

Формулы для расчета констант и оценки точности полученных зависимостей имеют следующий вид.

В случае линейной функции

$$\xi = a + bt_i, \tag{8}$$

где

$$t_i = t_{p_i} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_{p_i}, \tag{9}$$

$$a = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i, \qquad b = \sum_{i=1}^{N}\xi_i t_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} t_i^2. \tag{10}$$

Ошибка уравнения (8)

$$\sigma_8 = \sigma\sqrt{\left(1/N\sum_{i=1}^{N} t_i^2\right)\left[t^2 + \sum_{i=1}^{N} t_i^2\right]}, \tag{11}$$

где σ — среднеквадратическая ошибка в величинах ξ_i, которую приближенно можно определить по следующей формуле:

$$\sigma = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\xi_i - a - bt_i)^2. \tag{12}$$

В случае экспоненциальной функции

$$\xi = ae^{bt}, \tag{13}$$

$$M(\xi) = 10^{\left(\left(\sum_{i=1}^{N} \log \xi_i / N\right) + t\left(\sum_{i=1}^{N} t_i \log \xi_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} t_i^2\right)\right)} e^{\sigma^2(y)/2\cdot 0{,}4342^2}, \tag{14}$$

где

$$\sigma(y) = \frac{\sigma_y}{N} \sqrt{1 + 3\left(\frac{t}{C}\right)^2}, \tag{15}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\log \xi_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \log \xi_i - \left(\sum_{i=1}^{N} t_i \log \xi_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} t_i^2\right) t\right)^2}, \tag{16}$$

$$C = \frac{1}{2}\,(t_{p_{\max}} - t_{p_{\min}}). \tag{17}$$

Ошибка этой формулы

$$\sigma(\xi) = M(\xi) \sqrt{e^{\sigma^2(y)/0{,}4342^2} - 1}. \tag{18}$$

Вид функции выбирается исходя из минимума $\sigma(\xi)$. Более правильным с точки зрения сущности процесса, допускающего наличие скачков (внедрение новой технической идеи, изобретения, открытия), является использование не непрерывных функций, а, например, комбинации ступенчатых

$$\xi = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j u(t - t_j), \tag{19}$$

где

$$u(t - t_j) = 0 \quad \text{при } t < t_j,\ u(t - t_j) = 1 \quad \text{при } t \geqslant t_j. \tag{20}$$

Для нахождения этой функции необходимо определить две функции:

$$a_j = f_a(j), \tag{21}$$

а также

$$\delta t_j = f_t(j), \tag{22}$$

учитывая, что

$$t_j = \sum_{k=1}^{j} \delta t_k. \tag{23}$$

Обычно a_j — возрастающая функция j (т. е. по мере технического прогресса величина скачков возрастает), а δt_k — убывающая функция (т. е. по мере технического прогресса скачки учащаются).

Одним из возможных вариантов определения этих величин при наличии исходной информации в N точках будет следующий.

Величина n (число скачков) определяется путем анализа истории развития данного вида техники за время $2C$.

Полагаем

$$\delta\tau_j = \tau e^{-k_\tau j}. \tag{24}$$

Тогда

$$2C = \sum_{j=1}^{n} \tau e^{-k_\tau j}. \tag{25}$$

Учитывая, что справа находится сумма геометрической прогрессии, получаем

$$\tau = 2C \frac{e^{k_\tau} - 1}{e^{k_\tau}(1 - e^{-k_\tau n})}. \tag{26}$$

Теперь, задаваясь k_τ, можем вычислить τ, δt_j и t_j, затем на каждом интервале от t_{j-1} до t_j вычислить

$$M(a_j) = \frac{1}{n_j} \sum_{i=z_{j_1}}^{z_{j_2}} \xi_i - \sum_{k=1}^{j-1} M(a_k). \tag{27}$$

где z_{j_1} и z_{j_2} — номера первой и последней точек, попадающих на данный интервал, а также

$$\sigma = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=z_{j_1}}^{z_{j_2}} [\xi_i - M(a_j)]^2. \tag{28}$$

Оптимальным будет то k_τ, при котором величина σ минимальна. Данный алгоритм легко реализуется на любой ЭВМ.

Можно воспользоваться более сложными и совершенными методами статистического прогнозирования, в частности корреляционным анализом, однако малый объем исходной информации, которую обычно удается получить, делает достаточным применение самых грубых методов.

Вообще применение статистического прогнозирования таит в себе опасность получения абсурдных результатов, связанную с возможным изменением характера развития процесса, появлением скачков и т. д. Поэтому статистическое прогнозирование приходится контролировать эвристическим — оценками экспертов. Сущность этого метода состоит в постановке перед группой экспертов конкретных вопросов (например, оценка ими ожидаемых весовых характеристик автомобильных двигателей в 1970, 1975 и 1980 гг.), статистической обработке независимых экспертных оценок, обсуждении полученных результатов в случае большой разницы в прогнозах и повторных оценках.

Применение двух методов прогнозирования, правда, на ограниченном числе примеров показало, что в большинстве случаев результаты экспертной оценки и статистического прогнозирования, как правило, хорошо согласуются, за исключением случаев, когда эксперты ожидают качественного изменения в характере процесса (внедрения принципиально новых технических идей, замены одного вида техники другим и т. д.). В этом случае результатами статистического прогнозирования вообще нельзя пользоваться. В других случаях в расчет могут вводиться осредненные результаты статистического и эвристического прогнозирования с учетом дисперсий этих результатов.

Определение потребного количества оборудования производится путем анализа модели функционирования этого оборудования, в которую в качестве исходных данных вводятся характеристики оборудования и объем производства, найденные с помощью прогнозирования. В каждом конкретном случае создание этой модели является сложной самостоятельной задачей. Отметим только одну особенность ее решения. Поскольку исходные данные, вводимые в модель, при прогнозировании определяются с ошибкой, потребное количество оборудования также будет определяться с ошибкой, которая должна быть определена. Модель функционирования оборудования является, как правило, нелинейной относительно входной информации, поэтому определение этой ошибки оказывается сложной задачей.

Наиболее точным методом определения ошибки является метод статистических испытаний, использование которого применительно к данной задаче сводится к следующему. С помощью датчика случайных чисел определяется требуемое количество нормированных случайных чисел (оно равно количеству случайных величин, имеющихся в модели). Известными методами они преобразуются в конкретные значения случайных величин для данной реализации и с их помощью рассчитывается количество оборудования в данной реализации N_i. После большого числа реализаций N_i производят статистическую обработку результатов и вычисляют математическое ожидание и дисперсию потребного количества оборудования. Достоинством этого метода является возможность получения любой степени точности результатов, недостатком — большая трудоемкость расчетов.

Метод частных производных состоит в нахождении численными методами частных производных от потребного количества средств по всем случайным параметрам $\partial N / \partial \xi_i$ и определении дисперсии потребного количества средств по формуле

$$D = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial N}{\partial \xi_i} \sigma \xi_i \right)^2. \qquad (29)$$

Достоинством этого метода является сравнительно небольшая трудоемкость расчетов при малом числе случайных параметров, недостатком — наличие систематических ошибок, связанных с неучетом нелинейностей.

Наконец, в практически встречающихся случаях удобным оказывается применение метода приведенных возмущений.

В данном случае определение среднеквадратичного отклонения производится по формуле

$$\sigma = M(B) \left[N(\xi_1 \pm \sigma_{\xi_1}; \xi_2 \pm \sigma_{\xi_2}; \ldots; \xi_N \pm \sigma_{\xi_N}) - N(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_N) \right], \qquad (30)$$

где

$$M(B) = \sqrt{\frac{(N-1)v^2 + N}{N}}; \qquad v = \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}. \qquad (31)$$

Знаки «+» и «—» выбираются таким образом, чтобы N изменялось в одну сторону (например, в сторону увеличения N). Обычно это просто делается из физического смысла. Этот метод наименее трудоемок, но приводит к ошибкам, величина которых убывает с ростом N.

Итак, в результате решения задачи прогнозирования характеристик оборудования и объема задач, выполняемых оборудованием, а также расчета потребного количества оборудования и его дисперсии будут получены две функции $N_x(t_{n_i}; t)$ и $D_{N_x}(t_{n_i}; t)$, после чего можно приступать к решению задачи о назначении оптимальных сроков разработки нового оборудования.

Выбрав шаг дискретности ΔT, который определяется методикой планирования (для крупных изделий это обычно год, так как планы утверждаются ежегодно), можно представить все возможные политики замены в форме двоичного графа (рис. 3), который условно можно записать в форме двоичного числа, где каждый разряд соответствует номерам дискретных моментов времени, а нуль или единица означают, была в данный дискретный момент времени окончена разработка нового типа оборудования или нет.

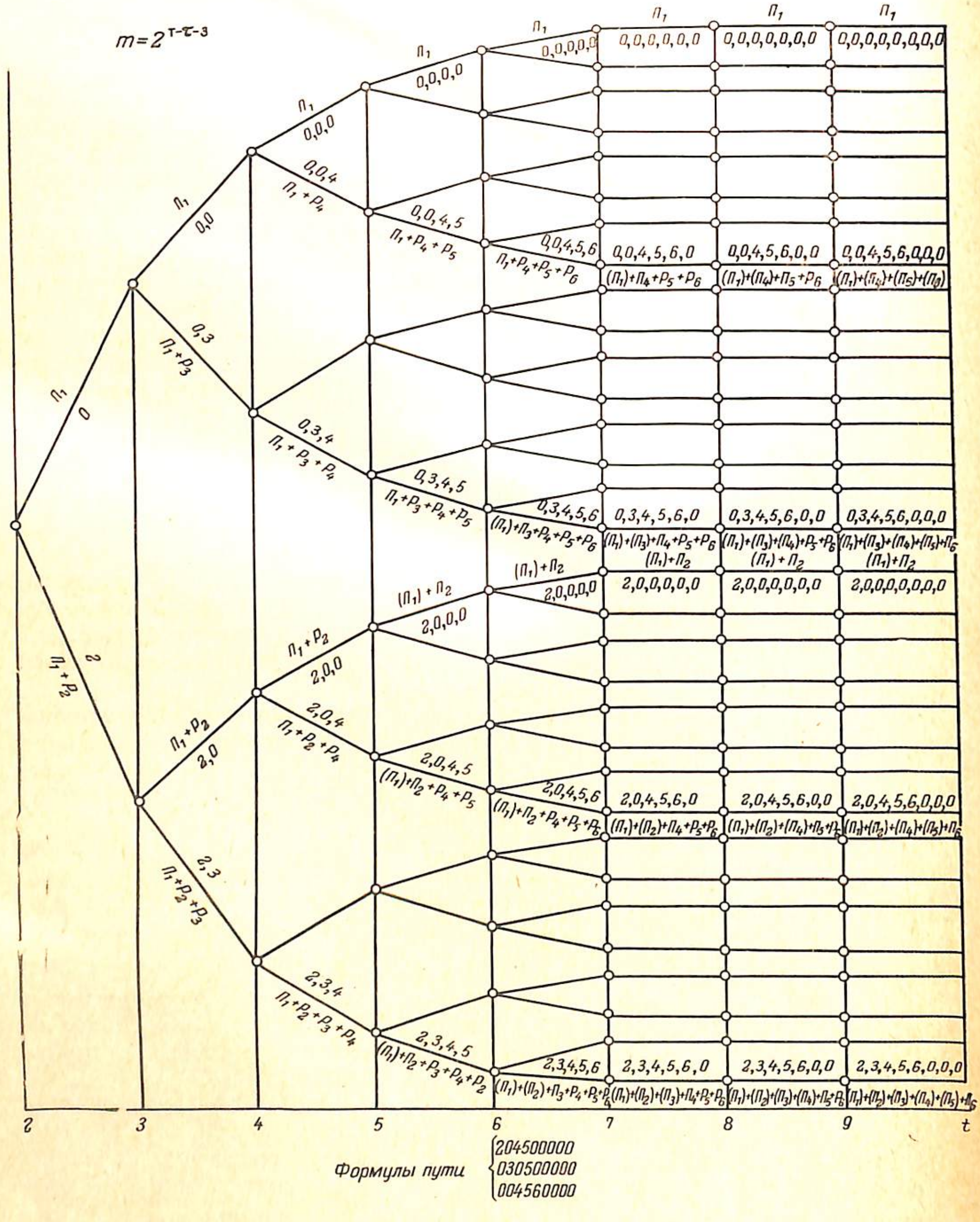

Рис. 3. Сетевой график задачи замены

Задавшись политикой замены $\bar{t}_{n_i}$, с помощью формулы (4) можно определить суммарные затраты к любому моменту времени t. Если из каких-то соображений определить момент времени T, к которому следует минимизировать затраты, то можно решать задачу о выборе оптимальной политики замены.

Это решение можно проводить путем полного перебора, причем нетрудно видеть, что число вариантов равно $2^{T/\Delta T}$. Используя ЭВМ при $T / \Delta T <$

< 20, эту задачу можно решить за 2—3 часа. Весьма эффективным оказалось применение случайного поиска, позволившее получать решения, близкие к оптимальным (отличие до 5% по C_Σ) при экономии машинного времени в 20 раз.

Принципиально возможно в данном случае и применение дискретного принципа максимума [3], хотя рассматриваемый процесс и относится к числу немарковских.

Отметим одну особенность, которую, с нашей точки зрения, следует учитывать при решении рассматриваемой задачи. Очевидно, что ежегодные затраты C_j будут определяться с разной степенью точности, причем, зная величину σ_N или $D_{N_x}(t_{ni}; t)$, нетрудно вычислить $D_c(t_{ni}; t_j)$. Тогда целесообразно в качестве оптимизируемого функционала принять не

$$C_\Sigma = \sum_{j=1}^{J} C_j, \qquad (32)$$

а

$$C_\Sigma' = \sum_{j=1}^{J} a_j C_j, \qquad (33)$$

где a_j определяется из условия минимума дисперсии C_Σ' при соблюдении условия $C_\Sigma = C_\Sigma'$.

При независимых C_j получаем следующую формулу для a_j:

$$a_j = K \frac{C_j}{D_c(t_{ni}; t_j)}, \qquad (34)$$

где K — константа.

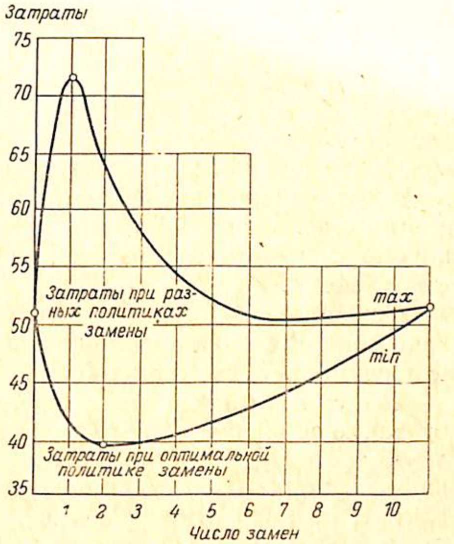

Рис. 4. Зависимость затрат от числа замен

В качестве примера изложенным методом была решена серия задач. На рис. 4 изображена зависимость суммарной стоимости от числа разработок нового оборудования при разных политиках замены. График показывает возможность существенной экономии при выборе оптимальной политики замены оборудования.

Исследование вопроса о влиянии величины T на оптимальную политику замены показывает, что при достаточно больших величинах T оптимальная политика на первых этапах оказывается независимой от T. Это чрезвычайно важно, так как величина T во многих случаях нам неизвестна.

Простейшая задача о замене оборудования приведена для иллюстрации возможности применения общего подхода к решению проблемы о замене. Ее можно обобщить и использовать для таких более сложных случаев, как необходимость разработки комплекса оборудования, состоящего из нескольких типов взаимосвязанных объектов, разработка нескольких видов оборудования при наличии ограничений мощности конструкторских бюро и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Кофман. Методы и модели исследования операций. М., «Мир», 1966.
2. Д. Кокс, В. Смит. Теория восстановления. М., «Сов. радио», 1967.
3. Фан Лянь-Цэнь, Вань Чу-Сен. Дискретный принцип максимума. М., «Мир», 1967.

Поступила в редакцию
1 IV 1968