

чае полной информации и необходимость расчета по дополнительным при неполной информации; в) возможность раздельного подсчета требуемых капитальных вложений и эксплуатационных расходов на транспорте в условиях неполной информации и невозможность такого точного разделения в условиях неполной информации: в последнем случае целесообразно представление расценок в виде удельных приведенных величин (например, согласно (4)); г) неизменность удельных величин транспортных издержек и статистический подход к их определению в силу нелинейности и недетерминированности действительного процесса и линейности применяемых алгоритмов оптимизации; д) применение экстремальных информационных принципов (максимума энтропии и полного использования информации) для статистической оптимизации в условиях неопределенности и нелинейности.

Изложенный подход к определению расценки транспорта при размещении производства неоднократно обсуждался в ИКТП и был использован при составлении карто-схем поучастковых показателей удельных приведенных затрат, выпущенных институтом в 1967 году.

Новые карто-схемы, разработанные большим коллективом научных сотрудников ИКТП, предназначены для размещения производства всех отраслей народного хозяйства независимо друг от друга (т. е. в условиях неполной информации). Они являются дальнейшим развитием работ ИКТП по обоснованию нормативной базы и, естественно, кроме приведенных выше принципов при составлении новых карто-схем был использован целый ряд результатов исследований по незатронутым в настоящей статье вопросам (например, по таким важным для оптимизации размещения производства проблемам, как учет порожних направлений [12], дифференциация транспортных показателей в зависимости от рода используемого подвижного состава, погонной нагрузки и других факторов).

В настоящее время проводятся дальнейшие исследования по совершенствованию методики учета транспортных затрат при оптимальном отраслевом планировании, в частности в направлении более полного учета при определении величин с некоторых известных сведений о характере перспективных перевозок на участках сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. О. Чернявский. Эффективность экономических решений. М., «Экономика», 1965.
2. Б. С. Козин, И. Т. Козлов. Выбор схем этапного развития железнодорожных линий. М., «Транспорт», 1964.
3. А. Л. Лурье. О математических методах решения задач на оптимум при планировании социалистического хозяйства. М., «Наука», 1964.
4. А. Л. Лурье. Оптимальные оценки и норма эффективности. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, № 2.
5. А. Б. Залесский. Экономическое содержание показателей сравнительной экономической эффективности вариантов хозяйственных решений. Вопр. экономики, 1966, № 6.
6. Методика технико-экономических расчетов в энергетике. М., 1966.
7. Основные положения оптимального планирования развития и размещения производства. Москва — Новосибирск, «Наука», 1968.
8. Ф. П. Тарасенко. Введение в курс теории информации. Томск, Изд-во Томского ун-та, 1963.
9. И. В. Жукова. К вопросу об оценке транспортных затрат на однопутной линии при растущем потоке. Тр. ИКТП, вып. 3. Вопросы развития транспортной сети СССР, 1967.
10. А. А. Фельдбаум. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., «Наука», 1966.
11. Методика расчетов и экономические показатели для распределения перевозок между видами транспорта. Под ред. д-ра экон. наук В. И. Дмитриева. М., «Транспорт», 1966.
12. Н. И. Мезенев. Расходы, связанные с пробегами порожних вагонов. Тр. ИКТП, вып. 2. Экономика транспорта, 1966.

Поступила в редакцию
14 XI 1967

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ СВОБОДНЫМИ ЧЛЕНАМИ ОГРАНИЧЕНИЙ

Н. П. АРБУЗОВА

(Москва)

В настоящей работе, так же как в [1, 2], под стохастической устойчивостью задачи выпуклого программирования подразумевается постоянство оптимального базиса с вероятностью $1 - \varepsilon$. Вопрос об устойчивости решения задачи квадратичного программирования со случайными свободными членами ограничений исследуется в этой работе в параметрическом аспекте — путем выделения области устойчивости в пространстве случайных параметров задачи. Метод выделения области устойчивости в пространстве параметров задачи может быть применен также к вопросам параметрического и марковского программирования, поэтому имеет смысл изложить его отдельно.

Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$\min F(\omega, X), \quad A(\omega)X \geq B(\omega), \quad X \geq 0, \quad (1)$$

где ω — элемент пространства Ω всех параметров задачи. Компонентами вектора ω являются элементы матрицы $A(\omega)a_{ij}$, столбца $B(\omega)b_i$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) и все параметры целевой функции $F(\omega, X)$. Целевая функция непрерывна по совокупности аргументов, выпукла и аналитична по X при любом ω . Фиксирована некоторая точка $\bar{\omega}$. Это может быть математическое ожидание вектора ω в стохастической постановке задачи или начальное значение параметров в параметрической постановке. При $\omega = \bar{\omega}$ задача разрешима единственным образом. Ставится вопрос о выделении в пространстве Ω области устойчивости G такой, что при $\omega \in G$ оптимальный базис совпадает с оптимальным базисом при $\omega = \bar{\omega}$.

При каждом $\omega \in \Omega$ существует набор базисных, или меченых, в терминологии [2], индексов

$$i_1(\omega), \dots, i_{h(\omega)}(\omega); \quad j_1(\omega), \dots, j_{l(\omega)}(\omega)$$

тех ограничений, которым оптимальный план удовлетворяет как точным равенствам, т. е.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = i_1(\omega), \dots, i_{h(\omega)}(\omega); \\ x_j = 0, \quad j = j_1(\omega), \dots, j_{l(\omega)}(\omega).$$

Пусть ограничения и переменные перенумерованы так, что при $\omega = \bar{\omega}$ базисными индексами являются $1, \dots, k$; $k + p + 1, \dots, n$. Требуется выделить вокруг $\bar{\omega}$ окрестность G , в которой этот набор базисных индексов сохраняется.

Разобьем компоненты вектора X на группы

$$X^* = (z_1, \dots, z_k, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_{n-k-p}).$$

Введем матричные обозначения

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1, k+p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k, k+p} \end{pmatrix}, \quad K(\omega) = \begin{pmatrix} a_{1, k+p+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k, k+p+1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix},$$

$$N^*(\omega) = (b_1, \dots, b_k).$$

Для $\omega \in G$ любой оптимальный план удовлетворяет системе уравнений

$$M(\omega)Z = N(\omega), \quad V = 0, \quad (2)$$

причем в матрице $M(\omega)$ существует невырожденный минор k -го порядка. Будем считать, что при нашей нумерации переменных в $M(\omega)$ невырожденным является левый угловой минор k -го порядка.

Составим матрицу

$$L(\omega) = \begin{pmatrix} M(\omega) & K(\omega) \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix}$$

и введем вектор

$$Y = L(\omega)X.$$

На грани κ области допустимых планов, задаваемой системой уравнений (2), целевая функция при $\omega \in G$ имеет вид

$$F(\omega, X) = \Phi(\omega, Y) = \varphi(\omega, U),$$

а условный экстремум (1) превращается в безусловный $\min \varphi(\omega, U)$, который достигается в некоторой внутренней точке $U^0(\omega)$ многогранника κ . Оптимальный план в системе Y записывается в виде

$$Y^{0*}(\omega) = (b_1, \dots, b_k, u_1^0(\omega), \dots, u_p^0(\omega), 0, \dots, 0), \quad (3)$$

а в системе X

$$X^0(\omega) = L^{-1}(\omega)Y^0(\omega).$$

Можно выписать уравнения границ области G . Во-первых, план $X^0(\omega)$ перестает быть допустимым при переходе через границы

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^0(\omega) = b_i, \quad i = k+1, \dots, m;$$

$$x_j^0(\omega) = 0, \quad j = 1, \dots, k+p,$$

число которых равно $m+p$. Кроме того, целевой вектор может выйти из положительного конуса α , натянутого на базисные при $\omega \in G$ нормали. Целевой вектор, антиградиент целевой функции $(f_1(\omega), \dots, f_n(\omega))$, при $\omega \in G$ имеет нулевые компоненты $f_{k+1}(\omega) = 0, \dots, f_{k+p}(\omega) = 0$.

В системе Y целевой вектор имеет вид $g(\omega) = L(\omega)f(\omega)$, а матрица меченых нормалей, т. е. нормалей к ограничениям с мечеными индексами, записывается в виде

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-k-p} \end{pmatrix}.$$

Целевой вектор выходит из конуса α при переходе ω через границы

$$g_j(\omega) = 0, \quad j = 1, \dots, k; \quad k+p+1, \dots, n,$$

число которых равно $n-p$.

Поверхности $\Delta_v(\omega) = 0$, $v = 1, \dots, C_{k+p}^k$ где $\Delta_v(\omega)$ есть минор k -го порядка матрицы $M(\omega)$, не являются границами области G , за исключением того случая, когда $p = 0$. Обозначим левый угловой минор k -го порядка матрицы $M(\omega)$ через $\Delta(\omega)$. При $p = 0$ $\Delta(\omega)$ есть определитель матрицы $M(\omega)$, и при переходе ω через поверхность $\Delta(\omega) = 0$ конус α меняет ориентацию, проходя через вырождение. При этом целевой вектор остается вне конуса α , если только он не является в этой точке комбинацией меньшего, чем n , числа базисных нормалей, т. е. если данная точка поверхности $\Delta(\omega) = 0$ не принадлежит ранее выписанной границе области G . Но оптимальный план имеет вид (3) только для тех $\omega \in G$, для которых $\Delta(\omega) \neq 0$.

Выпишем границы области устойчивости для задачи квадратичного программирования со случайными свободными членами ограничений

$$\min X^*CX + DX, \quad AX \geq B(\omega), \quad X \geq 0,$$

где $C = \{c_{ii}\}$ — симметрическая матрица и квадратичная форма X^*CX положительно определена. Никаких предположений относительно независимости случайных величин $b_i(\omega)$ не делается. Даны $Eb_i(\omega) = b_i$ и $Db_i(\omega) = \sigma_i^2$. Пусть $\bar{\omega} = E\omega$, и при $\omega = \bar{\omega}$ базисными индексами являются $1, \dots, k$; $k+p+1, \dots, n$, причем $\Delta = \Delta(\bar{\omega}) \neq 0$. Введем обозначения

$$S = \begin{pmatrix} C_{k+1, k+1} & \dots & C_{k+1, k+p} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{k+p, k+1} & \dots & C_{k+p, k+p} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{p1} & \dots & q_{pp} \end{pmatrix},$$

где S — подматрица матрицы C , а строки матрицы Q получены путем введения квадратичной формы U^*SU к сумме квадратов

$$U^*SU = (QU)^*E(QU) = W^*EW.$$

Составим матрицу

$$L = \begin{pmatrix} M & K \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-k-p} \end{pmatrix}$$

и произведем замену переменных $Y = LX$.

Заметим, что $(y_{k+1}, \dots, y_{k+p}) = W^*$.

В системе переменных Y целевая функция записывается в виде

$$X^*CX = Y^*[(L^{-1})^*CL^{-1}]Y + (DL^{-1})Y = Y^*FY + HY,$$

причем по переменным $y_{k+1}, \dots, y_{k+p}$ квадратичная форма приведена к сумме квадратов. Оптимальный план $Y^0(\omega)$ принадлежит грани κ области допустимых планов, точки которой имеют вид

$$Y^* = (b_1, \dots, b_k, w_1, \dots, w_p, 0, \dots, 0).$$

Остается найти безусловный экстремум целевой функции на грани κ . Целевая функция на грани κ имеет вид

$$\sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} f_{ij}y_iy_j + \sum_{i=1}^n h_iy_i = \sum_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, k}} f_{ij}b_ib_j + 2 \sum_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, p}} f_{i, k+j}b_iw_j + \\ + \sum_{j=1}^p w_j^2 + \sum_{i=1}^k h_ib_i + \sum_{j=1}^p h_{k+j}w_j = \sum_{j=1}^p \left[w_j^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^k f_{i, k+j}b_i + \frac{1}{2}h_{k+j} \right) w_j + \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\sum_{i=1}^k f_{i, k+j} + \frac{1}{2} h_{k+j} \right]^2 - \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^k f_{i, k+j} b_i + \frac{1}{2} h_{k+j} \right)^2 + \\
& + \sum_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, k}} f_{ij} b_i b_j + \sum_{i=1}^k h_i b_i.
\end{aligned}$$

Эта квадратичная форма от переменных w_j имеет минимум при

$$w_j^0 = - \sum_{i=1}^k f_{i, k+j} b_i - \frac{1}{2} h_{k+j}.$$

Оптимальный план $Y^0(\omega)$ имеет вид $Y^0(\omega)^* = (b_1, \dots, b_k, w_1^0, \dots, w_p^0, 0, \dots, 0)$.

Выйдем границы области G . План $X^0(\omega) = L^{-1}Y^0(\omega)$ перестает быть допустимым при выходе ω через границы

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 = b_i \quad i = k+1, \dots, m, \quad x_j^0 = 0, \quad j = 1, \dots, k+p,$$

число которых равно $m+p$. Целевой вектор в точке X^0 имеет вид

$$Z^0 = -CX^0 = -CL^{-1}Y^0.$$

В системе Y он принимает вид $LZ^0 = -LCL^{-1}Y^0 = RY^0$.

Поэтому план $Y^0(\omega)$ перестает быть оптимальным при переходе ω через границы

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} y_j^0 = 0, \quad i = 1, \dots, k; \quad k+p+1, \dots, n.$$

Все полученные границы области G в количестве $m+n$ являются гиперплоскостями, так как линейно зависят от $B(\omega)$. Меру области G можно вычислить методом Монте-Карло, если известно распределение вектора $B(\omega)$, проверяя каждый раз знаки невязок ω с границами области G . Можно также произвести грубую оценку меры области G по неравенству Чебышева, а именно

$$P\{|\omega - \bar{\omega}| > d\} < \frac{M[|\omega - \bar{\omega}|^2]}{d^2} = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2/d^2,$$

где d вычисляется как минимальное расстояние от $\omega = \bar{\omega}$ до границ области G .

Уравнения границ области G могут быть использованы в задачах оптимального управления для решения задачи о вероятности пребывания случайного процесса в области устойчивости, о моменте первого выхода из нее и для других задач.

Автор выражает В. Л. Данилову глубокую признательность за постоянную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Арбузова, В. Л. Данилов. Об одной задаче стохастического линейного программирования и ее устойчивости. Докл. АН СССР 1965, т. 162, № 1.
2. Н. И. Арбузова, О стохастической устойчивости двойственных задач линейного программирования. Экономика и матем. методы, 1966, т. III, вып. 4.

Поступила в редакцию
8 II 1966

АЛГОРИТМ К ОДНОЙ ЧЕБЫШЕВСКОЙ ЗАДАЧЕ

Э. А. ЛОГИНОВ

(Москва)

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе предлагается алгоритм для следующей чебышевской задачи.

Пусть дано конечное множество A из N фиксированных точек $a_1, a_2, \dots, a_N$ в n -мерном евклидовом пространстве. Надо найти такие m n -мерных шаров одного диаметра, объединение которых содержит все множество A , а диаметр шара минимален. Легко видеть, что требование об одном и том же размере всех m шаров не обязательно и указанной формулировке эквивалентна следующая: найти такие m шаров $T_1, T_2, \dots, T_m$, которые вместе содержат все точки $a_i \in A, i = 1, 2, \dots, N$, и наибольший из которых имеет минимально возможный диаметр. Будем точки $a_i \in A$ называть узлами, а границу шара включать в шар.

Поставленную задачу можно иллюстрировать примером. Пусть в некотором населенном пункте, состоящем из 100 домов, требуется установить 7 почтовых ящиков так, чтобы житель, оказавшийся в наиболее неблагоприятных условиях, т. е. живущий особенно далеко от ближайшего почтового ящика, преодолевал возможно меньшее расстояние до этого ящика.

Рассматриваемая задача может быть сформулирована в иной форме (с использованием понятия «сеть» вместо шара), что сделано в разделе 4 этой работы.

2. ОБОСНОВАНИЕ ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ

Описанным, или минимальным, шаром произвольного множества A называется наименьший из всех шаров, содержащих множество A .

Хорошо известно, что для любого множества точек имеется ровно один описанный шар. Данный ниже алгоритм основан на следующей лемме.

Лемма. Пусть F произвольное n -мерное тело (т. е. замкнутое ограниченное множество в n -мерном евклидовом пространстве); n -мерный шар Q с границей q тогда, и только тогда, является описанным шаром тела F , когда $F \subset Q$ и центр шара Q принадлежит какому-либо k -мерному симплексу, $k \leq n$, все вершины которого одновременно принадлежат F и q .

Доказательство. Необходимость. Пусть Q — описанный n -мерный шар n -мерного тела F , но центр o шара, положим, не принадлежит ни одному k -симплексу, вершины которого содержатся в $A_1 = q \cap F$, где q — сфера шара $Q, k \leq n$.

Обозначим выпуклую оболочку точек множества A_1 через $\{A_1\}$. Известно, что выпуклая оболочка $\{A_1\}$ есть объединение всех симплексов, построенных на точках множества A_1 как на вершинах; так что если точка не принадлежит ни одному такому симплексу, она не принадлежит и $\{A_1\}$, и наоборот. Следовательно, $o \notin \{A_1\}$, и поэтому вся выпуклая оболочка $\{A_1\}$ лежит по одну сторону от некоторой гиперплоскости, содержащей центр o