$$+\left.\sum_{i=1}^{k} f_{i,\,k+j}+\frac{1}{2} h_{k+j}\right)^{2}\Bigg]-\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{k} f_{i,\,k+j} b_{i}+\frac{1}{2} h_{k+j}\right)^{2}+$$

$$+\sum_{\substack{i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,k}} f_{ij} b_i b_j+\sum_{i=1}^{k} h_i b_i.$$

Эта квадратичная форма от переменных w_j имеет минимум при

$$w_j^0=-\sum_{i=1}^{k} f_{i,\,k+j} b_i-\frac{1}{2} h_{k+j}.$$

Оптимальный план $\mathrm{Y}^0(\omega)$ имеет вид $\mathrm{Y}^0(\omega)^*=(b_1,\dots,\ b_k,\ w_1^0,\dots,\ w_p^0,0,\dots,0)$.

Выпишем границы области G. План $\mathrm{X}^0(\omega)=L^{-1}\mathrm{Y}^0(\omega)$ перестает быть допустимым при выходе ω через границы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0=b_i \quad i=k+1,\dots,m,\ x_j^0=0,\ j=1,\dots,k+p,$$

число которых равно $m+p$. Целевой вектор в точке X^0 имеет вид

$$\mathrm{Z}^0=-C\mathrm{X}^0=-CL^{-1}\mathrm{Y}^0.$$

В системе Y он принимает вид $L\mathrm{Z}^0=-LCL^{-1}\mathrm{Y}^0=R\mathrm{Y}^0$.

Поэтому план $\mathrm{Y}^0(\omega)$ перестает быть оптимальным при переходе ω через границы

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j^0=0, \quad i=1,\dots,k;\ k+p+1,\dots,n.$$

Все полученные границы области G в количестве $m+n$ являются гиперплоскостями, так как линейно зависят от $B(\omega)$. Меру области G можно вычислить методом Монте-Карло, если известно распределение вектора $B(\omega)$, проверяя каждый раз знаки невязок ω с границами области G. Можно также произвести грубую оценку меры области G по неравенству Чебышева, а именно

$$P\{|\omega-\bar{\omega}|>d\}<\frac{M[|\omega-\bar{\omega}|^2]}{d^2}=\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2/d^2,$$

где d вычисляется как минимальное расстояние от $\omega=\bar{\omega}$ до границ области G.

Уравнения границ области G могут быть использованы в задачах оптимального управления для решения задачи о вероятности пребывания случайного процесса в области устойчивости, о моменте первого выхода из нее и для других задач.

Автор выражает В. Л. Данилову глубокую признательность за постоянную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Арбузова, В. Л. Данилов. Об одной задаче стохастического линейного программирования и ее устойчивости. Докл. АН СССР 1965, т. 162, № 1.
2. Н. И. Арбузова, О стохастической устойчивости двойственных задач линейного программирования. Экономика и матем. методы, 1966, т. III, вып. 4.

Поступила в редакцию
8 II 1966

ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1969
ТОМ V, вып. 1

АЛГОРИТМ К ОДНОЙ ЧЕБЫШЕВСКОЙ ЗАДАЧЕ

Э. А. ЛОГИНОВ

(Москва)

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе предлагается алгоритм для следующей чебышевской задачи.

Пусть дано конечное множество A из N фиксированных точек $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_N$ в n-мерном евклидовом пространстве. Надо найти такие m n-мерных шаров одного диаметра, объединение которых содержит все множество A, а диаметр шара минимален. Легко видеть, что требование об одном и том же размере всех m шаров не обязательно и указанной формулировке эквивалентна следующая: найти такие m шаров $T_1, T_2, \ldots, T_m$, которые вместе содержат все точки $a_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, N$, и наибольший из которых имеет минимально возможный диаметр. Будем точки $a_i \in A$ называть узлами, а границу шара включать в шар.

Поставленную задачу можно иллюстрировать примером. Пусть в некотором населенном пункте, состоящем из 100 домов, требуется установить 7 почтовых ящиков так, чтобы житель, оказавшийся в наиболее неблагоприятных условиях, т. е. живущий особенно далеко от ближайшего почтового ящика, преодолевал возможно меньшее расстояние до этого ящика.

Рассматриваемая задача может быть сформулирована в иной форме (с использованием понятия «сеть» вместо шара), что сделано в разделе 4 этой работы.

2. ОБОСНОВАНИЕ ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ

Описанным, или минимальным, шаром произвольного множества A называется наименьший из всех шаров, содержащих множество A.

Хорошо известно, что для любого множества точек имеется ровно один описанный шар. Данный ниже алгоритм основан на следующей лемме.

Лемма. *Пусть F произвольное n-мерное тело (т. е. замкнутое ограниченное множество в n-мерном евклидовом пространстве); n-мерный шар Q с границей q тогда, и только тогда, является описанным шаром тела F, когда $F \subset Q$ и центр шара Q принадлежит какому-либо k-мерному симплексу, $k \leqslant n$, все вершины которого одновременно принадлежат F и q.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть Q — *описанный n-мерный шар n-мерного тела F, но центр o шара, положим, не принадлежит ни одному k-симплексу, вершины которого содержатся в* $A_1 = q \cap F$, где q — *сфера шара Q, $k \leqslant n$.*

Обозначим выпуклую оболочку точек множества A_1 через $\{A_1\}$. Известно, что выпуклая оболочка $\{A_1\}$ есть объединение всех симплексов, построенных на точках множества A_1 как на вершинах; так что если точка не принадлежит ни одному такому симплексу, она не принадлежит и $\{A_1\}$, и наоборот. Следовательно, $o \notin \{A_1\}$, и поэтому вся выпуклая оболочка $\{A_1\}$ лежит по одну сторону от некоторой гиперплоскости, содержащей центр o

и не имеющей общих точек с $\{A_1\}$. Но тогда найдется шар $Q_1 \supset \{A_1\}$ меньшего, чем у Q, диаметра (на основании свойства шара: если шар диаметра d рассечен гиперплоскостью на две неравные части, то меньшую часть можно вписать в шар диаметра $< d$).

Легко видеть вместе с тем, что в силу замкнутости F некоторый шар Q_1, меньший, чем Q, содержит все тело F. Таким образом, предположение, что ни один указанный симплекс не содержит центр o описанного шара Q, противоречит условию, что Q — описанный, или минимальный, шар, и потому предположение неверно.

Достаточность. Пусть Δ — некоторый k-симплекс, все вершины которого — элементы множества $A_1 = q \cap F$, причем $\Delta \ni o$.

Из выпуклости Δ вытекает, что всякое полупространство с принадлежащей ему границей — гиперплоскостью $\Gamma \ni o$ содержит хотя бы одну вершину симплекса. Расстояние от любой отличной от o точки o' хотя бы до одной из вершин симплекса Δ больше, чем радиус шара Q. Действительно, возьмем гиперплоскость $P \ni o$ перпендикулярно к отрезку oo'. Тогда расстояние от вершины симплекса Δ, не лежащей по одну с точкой o' сторону относительно P, до точки o' больше, чем до точки o.

Лемма доказана.

Поскольку описанный шар произвольного множества узлов — это наименьший шар, содержащий все это множество, то данная лемма облегчает поиск, отметая как заведомо не относящиеся к решению все те шары, которые не являются описанными для принадлежащих им узлов. Из формулировки леммы видно, что описанный шар любого множества узлов является одновременно описанным шаром симплекса, построенного на некоторых узлах этого множества как на вершинах. Пользуясь этим обстоятельством и учитывая, что простоты ради алгоритм достаточно дать для $n = 3$, приходим к следующему результату. Искомые шары $T_1, T_2, \ldots, T_m$ задачи для трехмерного пространства достаточно искать среди множества шаров $\{Q\}$, являющегося суммой четырех, вообще говоря, пересекающихся подмножеств $\{Q_1\}$, $\{Q_2\}$, $\{Q_3\}$ и $\{Q_4\}$.

1. $\{Q_1\}$ — множество из $C_1 = N$ шаров, каждый из которых совпадает с каким-то узлом $a_i \in A$, имея нулевой диаметр.

2. $\{Q_2\}$ — множество из $C_2 = C_N^2$ шаров, каждый из которых построен на отрезке, соединяющем два любых узла из A, как на диаметре.

3. $\{Q_3\}$ — множество из $C_3 \leqslant C_N^3$ шаров, диаметральный круг каждого из которых проходит через любые три узла, являющиеся вершинами остроугольного треугольника.

4. $\{Q_4\}$ — множество из $C_4 \leqslant C_N^4$ шаров, каждый из которых проходит через любые такие четыре узла, что построенный на них, как на вершинах, тетраэдр содержит центр данного шара. Здесь C_N^i — число сочетаний из N по i. Множество тех узлов, на которых построен данный шар $Q_j \in \{Q\}$, обозначим $X(Q_j) = X_j$.

Легко показать, что описанный круг треугольника проходит через все его вершины тогда, и только тогда, когда треугольник не является тупоугольным, а также, что шар, проходящий через все вершины тетраэдра, является описанным шаром его тогда, и только тогда. когда центр шара лежит по ту же сторону от всякой грани, что и противоположная ей вершина тетраэдра.

Прежде чем двигаться дальше, докажем, что решение задачи о шарах существует. Из конечности множества A вытекает конечность множества M всех описанных шаров, построенных для всевозможных подмножеств множества A. Обозначим Σ любую комбинацию (любой набор) таких m описанных шаров из множества M, объединение которых содержит все множество A. Пусть $D_{\max}$ — диаметр наибольшего шара в указанной произвольной комбинации Σ. В силу конечности числа различных Σ среди них найдется такая $\Sigma = \Sigma^*$, что для нее диаметр $D^*_{\max}$ не больше $D_{\max}$ для всякой Σ. Это и означает ,что комбинация Σ^* из m шаров есть оптимальная система шаров, дающая решение задачи, ибо всякая другая комбинация из m шаров, вместе содержащих множество A, имеет какой-то шар диаметра не меньше $D^*_{\max}$. Легко видеть, что решение может быть не единственным, т. е. иногда можно указать несколько оптимальных систем из m шаров; общим для этих систем является то, что диаметр максимального шара в них один и тот же.

Допустим, что все шары множеств $\{Q_1\}$, $\{Q_2\}$, $\{Q_3\}$ и $\{Q_4\}$ найдены, их суммарное число равно $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. Среди числа C всех этих описанных шаров могут быть и абсолютно одинаковые (одного размера и с общим центром), но построенные исходя из разных наборов узлов множества A и для удобства различаемые нами. Например, если центр описанного шара какого-то подмножества узлов множества A принадлежит трем различным симплексам, вершинами которых являются те узлы указанного подмножества, что лежат на границе описанного шара, то удобно различать описанные шары трех указанных симплексов, хотя каждый из них есть фактически один и тот же шар. Каждый из таких шаров имеет свое множество $X(Q_j)$ и получит свой собственный номер. Все C указанных описанных шаров обозначим $Q_1, Q_2, \ldots, Q_c$, образовав ряд (1) в порядке уменьшения (невозрастания) диаметров, т. е. $D(Q_1) \geqslant D(Q_2) \geqslant \ldots \ldots \geqslant D(Q_c)$. Например, если A — множество вершин квадрата $a_1a_2a_3a_4$, то $C = 14$ и $X_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$, $X_2 = \{a_2, a_3, a_4\}$, $X_3 = \{a_1, a_3, a_4\}$, $X_4 = \{a_1, a_2, a_4\}$, $X_5 = \{a_1, a_3\}$, $X_6 = \{a_2, a_4\}$, $X_7 = \{a_1, a_2\}$, $X_8 = \{a_2, a_3\}$, $X_9 = \{a_3, a_4\}$, $X_{10} = \{a_1, a_4\}$, $X_{11} = a_1$, $X_{12} = a_2$, $X_{13} = a_3$, $X_{14} = a_4$. Рассмотрим произвольный шар Q_j, $j = 1, 2, \ldots, C$. Из сказанного ясно, что множество X_j тех узлов, на которых построен шар Q_j (все они лежат, конечно, на его границе), может не совпадать со множеством Y_j всех узлов, лежащих на границе шара Q_j. Другими словами, $Y_j \supseteq X_j$, где Y_j—множество всех граничных узлов шара Q_j. Лежащее на границе шара Q_j множество узлов X_j однозначно определяет шар Q_j, так что можно даже обозначить Q_j через $\{X_j\}$ и записать ряд (1) в виде $\{X_1\}$, $\{X_2\}, \ldots, \{X_c\}$. Множество всех узлов $a_i \in Q_j$ обозначим $|Q_j|$, т. е. $|Q_j| = A \cap Q_j$. Отметим, наконец, следующее простое свойство. Если для множества $A^j = A \setminus |Q_j|$ требуется построить ряд всех описанных шаров, аналогичный ряду (1) для множества A, то это можно сделать так: оставим в ряду (1) все те шары Q_s, у которых $X_s \cap |Q_j| = \phi$, где ϕ — пустое множество. Оставшийся ряд и будет искомым.

3. АЛГОРИТМ

Опишем словами алгоритм нахождения оптимальной системы шаров. Заметим сразу, что в общем случае решение получается в результате весьма трудоемкого перебора. Полагаем для заданного множества A ряд (1) составленным, а множества X_j, $|Q_j|$, $j = 1, 2, \ldots, C$, наряду с $D(Q_j)$ и центрами шаров Q_j уже известными. Получение этих данных представляет собой достаточно трудоемкую работу, выполнение которой несколько облегчается тем, что проделать ее для заданного A надо лишь один раз, независимо от m.

I. *Случай* $m = 1$. Шар Q_1 ряда (1) является искомым оптимальным шаром как наибольший среди всех шаров множества $\{Q\}$. Это следует из двух условий: во-первых, по сказанному, оптимальный шар следует искать только среди описанных, т. е. среди $Q_j \in \{Q\}$, а во-вторых, оптимальный шар не может быть меньше шара Q_1, являющегося описанным шаром не-которого множества узлов $|Q_1| \in A$. Таким шаром только и является шар Q_1 диаметра $D(Q_1)$ *.

II. *Случай* $m = 2$. Оба искомых шара T_1 и T_2 (будем считать для определенности $D(T_1) \geqslant D(T_2)$) оптимальной системы входят в ряд (2), который получим из ряда (1), оставляя в нем только те шары Q_j, для которых $Y_1 \cap |Q_j| \neq \phi$, другими словами, оставляя те шары, которым принадлежит хотя бы один граничный узел шара Q_1. Обозначим шары ряда (2) в порядке убывания диаметров $Q_{11}, Q_{12}, \ldots, Q_{1C_1}$, причем, очевидно, $Q_{11} = Q_1$. Заметим заодно, что так как A — конечное множество, то всегда найдутся два шара, вместе содержащие множество узлов A и меньшие, чем шар Q_1. Это вытекает из возможности разбиения сферы шара диаметральной плоскостью на две части так, что ни один узел на сфере (т. е. ни один граничный узел шара) не попадает на данную плоскость. Итак, $D(T_1) < D(Q_1)$. Производим $C_1 - 1$ раз следующий общий шаг. Взяв из ряда (2) очередной шар Q_{1s}, $s = 2, 3, \ldots, C_1$, находим в том же ряду (2), но левее Q_{1s}, такой первый слева шар $Q_{1p(s)}$, у множества $X_{1p(s)}$ которого нет общего узла с шаром Q_{1s}, т. е. $X_{1p(s)} \cap |Q_{1s}| = \phi$. Если такой дополняющий шар есть, то это значит, что $|Q_{1p(s)}| \cup |Q_{1s}| = A$; если для данного s нет шара $Q_{1p(s)}$, то это значит, что минимальный шар $Q'_{1p(s)}$, содержащий вместе с Q_{1s} все множество A, лежит в (2) правее шара Q_{1s}. На каком-то шаге мы, конечно, дойдем и до этого шара $Q'_{1p(s)}$, и тогда указанный шар Q_{1s} будет первым слева шаром, дополняющим $Q'_{1p(s)}$.

Как легко установить, минимальный из всех найденных шаров $Q_{1(p)s}$ является оптимальным шаром T_1, а шар T_2 есть дополняемый им соответствующий шар Q_{1s} (иногда удобно условно принимать $D(Q_{1p(s)}) = D(Q_{1s})$, если для данного Q_{1s} дополняющего шара нет).

III. *Случай* $m \geqslant 3$. Для этого случая придется прибегнуть к более громоздкому и трудоемкому перебору шаров за неимением ничего лучшего.

Выше рассмотрен ряд (1) $Q_1, Q_2, \ldots, Q_c$ и ряд (2) $Q_{11}, Q_{12}, \ldots, Q_{1c_1}$. Легко видеть, что хотя бы два шара оптимальной системы при $m > 2$ входят в ряд (2). Для каждого s-го шара ряда (2), $s = 1, 2, \ldots, c_1$, составим ряд (3_s), подчеркивая индексом s соответствие данного ряда шару Q_{1s}. Ряд (3_s) для шара Q_{1s} представляет собой ряд (2), в котором оставлены лишь те из шаров, лежащих слева от шара Q_{1s}, которые не содержат граничных узлов шара Q_{1s} и, кроме того, граничные узлы которых сами не принадлежат Q_{1s}. Иными словами, ряд (3_s) $Q_1{}^s, Q_2{}^s, \ldots, Q_{c_2}{}^s$, отвечающий шару Q_{1s}, состоит лишь из тех шаров Q_{1j} ряда (2), лежащих левее Q_{1s} (т. е. $j < s$), для которых $|Q_{1s}| \cap X_{1j} = X_{1s} \cap |Q_{1j}| = \phi$.

Наконец, для произвольного шара $Q_t{}^s$ ряда (3_s) образуем ряд (4_{st}), состоящий из всех тех шаров Q_j ряда (1), для которых $(|Q_{1s}| \cup |Q_t{}^s|) \cap X_j = (X_{1s} \cup X_t{}^s) \cap |Q_j| = \phi$. Обозначим шары ряда ($4_{st}$) в порядке убывания диаметров так: $Q_1{}^{st}, Q_2{}^{st}, \ldots, Q_{c_3}{}^{st}$ (4_{st}), а объединение $\bigcup_{j=1}^{c_3} X_j{}^{st}$ всех шаров ряда (4_{st}) обозначим $A_1{}^{st}$. Ища оптимальную систему шаров для $m = 3$, мы будем рассматривать различные наборы из трех шаров множества $\{Q\}$. В качестве первого шара набора по очереди будем брать шары Q_{1s}, $s = 2, 3, \ldots, C_1$, ряда (2), при фиксированном шаре Q_{1s} в качестве второго шара — поочередно шары $Q_t{}^s$ ряда ($3s$), $t = 1, 2, \ldots, C_2$, а в качестве третьего — первый шар $Q_1{}^{st}$ ряда (4_{st}). Из множества всех таких троек шаров Q_s, $Q_t{}^s$ и $Q_1{}^{st}$ оптимальной будет тройка, в которой диаметр наибольшего шара минимален (по сравнению с наибольшим диаметром в любой другой тройке). Ища оптимальную систему

* Рассматривая изложенную задачу при $m=1$ как задачу линейного программирования, проф. С. И. Зуховицкий дал для нее соответствующий алгоритм в 1951 г.

шаров при $m > 3$, будем, как и при $m = 3$, по очереди брать первым шар Q_{1s} ($s = 2, 3, \ldots, C_1$), вторым при фиксированном первом будем брать шар $Q_t{}^s$. Зафиксировав указанные шары Q_{1s} и $Q_t{}^s$, мы должны из (4_{st}) выбрать $m_1 = m - 2$ шаров, являющихся решением чебышевской задачи для множества узлов $A_1{}^{st}$ и $m_1 = m - 2$. Другими словами, для всяких выбранных Q_{1s} и $Q_t{}^s$ мы получаем множество узлов $A_1{}^{st}$, аналогичное исходному множеству узлов A, и ряд (4_{st}), аналогичный ряду (1), и нам надо решать новую задачу уже для меньшего числа оптимальных шаров $m_1 = m - 2$, сводя ее, если $m_1 > 3$, к случаю $m_2 = m_1 - 2$ и множеству $A_2 \subset A_1$, и т. д. Хотя множество $A_1{}^{st} \subset A$ состоит из значительно меньшего числа узлов, чем множество A, а ряд (4_{st}) существенно короче ряда (1), все же с ростом m и N объем вычислений лавинообразно возрастает. Действительно, решать приведенную задачу при $m_1 = m - 2$ для различных зависящих от s и t множеств узлов A_1 требуется, вообще говоря, много более чем A раз. Тем не менее для $m > 3$ задача отыскания оптимальной системы шаров сводится к многократному решению задачи отыскания оптимальной системы из $m = 2$ шаров для разных подмножеств узлов множества A. Тем самым найден алгоритм в принципе для любого целого числа $m > 0$, хотя практически данный алгоритм, видимо, становится непригоден для $n = 2$ уже при $m = 4$ и одновременно $N > 50$.

Попутно коснемся двух вопросов.

1) Если всякий из узлов множества A прикреплять дугой (прямолинейным отрезком) к одному из m центров, а длину дуги, соединяющей узел $a_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, N$, с ближайшим к нему центром, обозначить d_i, то возникает задача: дать алгоритм такого (оптимального) размещения m центров, что всегда $\sum\limits_i (d_i{}^*)^\varphi \Big/ \sum\limits_i (d_i)^\varphi \leqslant 1$, где φ — положительная постоянная, суммирование распространено на все i, а $d_i{}^*$ и d_i — длина i-й дуги в оптимальной и произвольной сети.

При $\varphi = 1$ приходим к задаче минимизации суммы длин всех дуг сети (сеть будет, вообще говоря, несвязной); при $\varphi = 2$ задача состоит в разбиении множества A на такие m подмножеств узлов, сумма моментов инерции которых относительно центров тяжести узлов этих подмножеств минимальна. Эта задача при $m > 2$, по-видимому, до сих пор не имеет удовлетворительного решения. Данная чебышевская задача может формально рассматриваться как предельный случай сформулированной задачи, когда $\varphi \to \infty$.

2) Можно потребовать, чтобы всякий шар содержал не менее $\varepsilon > 0$ узлов, где ε — целое число. Это условие не существенно. Для его реализации достаточно изъять из ряда (1) те шары, которые этому условию не удовлетворяют (т. е. убрать шары, в которых оказалось менее ε узлов), и применять алгоритм без изменений к оставшемуся ряду.

4. ОДНО ОБОБЩЕНИЕ

Для простоты ограничимся случаем $n = 2$. Введем на плоскости $P \supset A$ декартову систему координат с осями x, y. Тогда расстояние d от произвольной точки плоскости $d(x_\alpha, y_\alpha)$ до любого узла $a_i(x_i, y_i)$, $a_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, N$, равное

$$d(a_i, \alpha) = \sqrt{(x_i - x_\alpha)^2 + (y_i - y_\alpha)^2},$$

далее будет называться реальным расстоянием от точки α до a_i.

Для обобщения рассмотренной задачи припишем всякому узлу a_i произвольное положительное число k_i и введем функцию двух аргументов $f(k, d)$, которая при фиксированном значении одного аргумента является монотонно возрастающей функцией другого аргумента. Величину $\rho(a_i, \alpha)$, равную $f[k_i, d(a_i, \alpha)]$, назовем взвешенным расстоянием между a_i и α или, иначе, k-длиной дуги $a_i\alpha$. Присвоенные узлам числа k_i называют весовыми коэффициентами, их множество обозначим K. Сетью с m центрами называют сеть, полученную соединением m произвольных точек плоскости, называемых центрами, с некоторыми узлами $a_i \in A$ таким образом, что всякий узел связан дугой с некоторым центром, и наоборот. Обозначим наибольшую k-длину дуг данной сети через $\rho_{\max}$. Тогда чебышевская сеть $\lambda(m)$ с m-центрами, построенная на множестве узлов A,— это такая сеть с m-центрами и тем же множеством узлов A, для которой величина $\rho_{\max}$ минимальна. Из определения $\lambda(m)$ вытекает, что каждый узел достаточно связывать только с ближайшим к нему центром, хотя для дальнейшего это несущественно. Итак, везде далее λ обозначает чебышевскую сеть.

Рассматриваемое обобщение данной выше задачи о шарах как раз состоит в построении для заданных n, m, A и K чебышевской сети $\lambda(m)$. Не останавливаясь на доказательстве существования решения, рассмотрим лишь простейший и вместе с тем важный для приложений (например, для градостроительства) случай, когда $n = 2$ и функция $f(k, d)$ линейно зависит от каждого аргумента, точнее, $f(k, d) = kd$.

Таким образом, взвешенное расстояние $\rho(a_i, \alpha)$ между точкой α и узлом a_i в k_i раз больше реального расстояния $d(a_i, \alpha)$ между ними. Вообще говоря, для произвольных точек α и β плоскости взвешенное расстояние $\rho(\alpha, \beta)$ не определено в отличие от $d(\alpha, \beta)$. Остановимся на простейших примерах чебышевской сети λ для $m = 1$.

1. $N = 1$. Здесь центр c совпадает с единственным узлом.

2. $N = 2$. Легко видеть, что центр c сети λ лежит на отрезке, связывающем узлы a_1 и a_2, и делит отрезок в строго определенном отношении; k-длины дуг, связывающих c с a_1 и c с a_2, равны

$$\rho(a_1, c) = \rho(a_2, c) = \rho,$$

откуда

$$\frac{\rho}{k_1} + \frac{\rho}{k_2} = d(a_1, a_2) = d \text{ и } \rho = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} d.$$

3. $N = 3$. Тогда либо 1°) на каких-то двух узлах (обозначим их для определенности a_1 и a_2) из трех данных можно построить такую λ с центром c, что $\rho(a_1, c) = \rho(a_2, c) \geqslant \rho(a_3, c)$, 2°) либо такую λ построить нельзя.

В случае 1°, соединив центр c сети λ для узлов a_1 и a_2 с узлом a_3, получим, очевидно, чебышевскую сеть для трех узлов. В случае 2°) центр c сети λ для узлов a_1, a_2 и a_3 лежит, очевидно, внутри $\Delta a_1 a_2 a_3$ и $\rho(a_1, c) = \rho(a_2, c) = \rho(a_3, c)$. Координаты x_c, y_c центра c являются корнями следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} k_1^2[(x_c - x_1)^2 + (y_c - y_1)^2] = k_2^2[(x_c - x_2)^2 + (y_c - y_2)^2] \\ k_1^2[(x_c - x_1)^2 + (y_c - y_1)^2] = k_3^2[(x_c - x_3)^2 + (y_c - y_3)^2]. \end{cases}$$

Легко показать, что центр c сети λ при этом определяется однозначно.

По аналогии с множеством шаров $\{Q\}$ строим для данных A и K всевозможные сети λ' (с одним центром) трех следующих видов:

1) λ' состоит только из одного произвольного узла;

2) λ' построена на двух произвольных узлах;

3) λ' построена на любых трех узлах, удовлетворяющих условию 2°).

Найдем k-длину $\rho_{\max}$ максимальной дуги в каждой λ' и перенумеруем все λ' в порядке убывания k-длин. Получим аналогичный (1) ряд (8): $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_e'$, где $\rho_{1\max} \geqslant \rho_{2\max} \geqslant \ldots \geqslant \rho_{e\max}$. Вошедшие в λ_j' узлы образуют множество X_j. Возьмем теперь любую построенную сеть λ_j' с центром cj и максимальной дугой $\rho_{j\max}$ и присоединим к cj все те узлы $a_i \in A$, для которых $\rho(a_i, c_j) \leqslant \rho_{j\max}$. Преобразованную так сеть λ_j' обозначим через λ_i, множество всех входящих в нее узлов — $|Q_j|$, множество сетей λj — G.

Требуемая для заданных A, K и m сеть $\lambda(m)$ может быть получена как совокупность m некоторых сетей $\lambda j \in G$. Действительно, пусть искомая сеть $\lambda(m)$ уже найдена. Если какой-то центр сети $\lambda(m)$ вместе с выходящими из него дугами и их замыкающими узлами образуют подсеть, не являющуюся чебышевской сетью, то всегда эту подсеть можно заменить чебышевской сетью для тех же узлов, а следовательно, заменить и сетью $\lambda_j \in G$. Максимум k-длин дуг $\rho_{\max}$ сети $\lambda(m)$ при такой замене, очевидно, не изменится, а вся сеть $\lambda(m)$ в результате превратится в чебышевскую сеть, состоящую лишь из сетей $\lambda_j \in G$. Таким образом, наша задача — выбрать из множества G такие m сетей, объединение которых содержит все множество узлов A, а величина $\rho_{\max}$ минимальна. Но эта задача при известных X_j и $|Q_j|$ решается с помощью алгоритма, данного выше для шаров. При $n = 2$ задача о шарах является частным случаем задачи о сетях λ, когда $k_1 = k_2 = \ldots = k_N = 1$ и для нахождения решения с помощью данного алгоритма требуется знать только ряд (8) и множества узлов X_j и $|Q_j|$, $j = 1, 2, \ldots, e$; зная эти вещи, можно без изменений использовать указанный алгоритм, влияние же K учитывается при нахождении множества G, и это является, конечно существенным усложнением для практической реализации и без того трудоемкого алгоритма.

Поступила в редакцию
3 III 1967