ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1969 том V, вып. 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПАРТИИ ЗАПУСКА С УЧЕТОМ ФОРМ ДВИЖЕНИЯ ПРЕДМЕТА ТРУДА

А. Г. ТЕРУШКИН, Э. Б. ФИГУРНОВ

(Москва)

В серийном производстве текущие затраты уменьшаются при увеличении равномерности производства и при увеличении размера партии запуска. Поскольку располагаемый фонд времени использования оборудования, длительность производственного цикла и нормы затрат зависят от размера партии запуска, то до его определения нельзя осуществить оптимальное календарное распределение производственной программы. Поэтому определение размера партии запуска является первой задачей календарного планирования серийного производства.

Движение предмета труда партией ведет, с одной стороны, к сокращению доли подготовительно-заключительного времени, приходящегося на единицу изделия, к повышению производительности труда рабочего в результате многократного повторения одного и того же процесса труда и к упрощению организации и планирования производства, а с другой стороны — к росту оборотных средств в незавершенном производстве и в готовой продукции. Поэтому возникает задача определения размера партии запуска, минимизирующего общие затраты.

Применяемые в промышленности способы определения партии запуска [1—3], плохо учитывают действие указанных факторов. Получаемые с помощью этих способов размеры партии запуска не обеспечивают минимизации затрат на производство и хранение деталей, ибо размер партии запуска выбирается по этим способам вне зависимости от основных элементов затрат, подлежащих минимизации: расходов на наладку, потерь от простоя оборудования во время наладки, потерь от связывания оборотных средств. Расчет партии запуска по формулам, приведенным в [1—3], осуществляется на основе некоторых «нормативных» показателей, к которым вполне применимо замечание, сделанное С. А. Думлером еще в 1934 году: «Такие «нормативы», очевидно, совершенно произвольны» [4, стр. 167]. Задавать такие показатели априорно, что по существу предлагается в [1—3],— это значит не только не решать, но и не ставить задачи минимизации затрат общественного труда в незавершенном производстве. Подробный разбор указанных способов расчета партии запуска имеется в [5].

Принципиальные основы расчета размера партии запуска, минимизирующего общие затраты, были развиты еще в 1915 г. В СССР в 30-х годах был опубликован ряд работ, посвященных расчету оптимального размера партии запуска [4, 6—9]. Однако практического применения ни одна из рекомендованных в них формул не получила, главным образом в силу распространенного у большинства экономистов мнения о «несоответствии» начисления процентов на вложенные средства природе социалистического хозяйства. Теория оптимального планирования доказала, что использование нормативов эффективности фондов и ресурсов не только применимо, но и является обязательным условием правильного определения выгодности отдельных хозяйственных мероприятий. Введение платы за фонды значительно повышает материальную ответственность предприятий в рациональном использовании фондов и экономически принуждает коллективы предприятий к использованию нормативов эффективности фондов при принятии хозяйственных решений.

Однако в работах [4, 6—10], помимо недостаточного обоснования правомерности и необходимости исчисления потерь от связывания оборотных средств, не исследовалась взаимосвязь между величиной партии запуска и формами движения предмета труда. Настоящая статья представляет собой попытку восполнить этот пробел.

УРАВНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕРА ПАРТИИ

Обозначим: $i = 1, 2, \ldots, k$ — индекс операций обработки и транспортировки, перечисляющий операции в их технологической последовательности; t_i, c_i, q_i — соответственно время обработки единицы предмета труда на i-й операции, количество станков, выполняющих данную операцию, количество деталей, обрабатываемых одновременно на одном станке; Z — общая сумма затрат и z — сумма затрат на наладку ($z_{н}$) и потерь от простоев оборудования ($z_{п}$) на одну партию деталей ($z_{п}$ возникают в случае, когда наладка производится во время рабочей смены и равны $\sum\limits_{i=1}^{k} \Phi_i \tau_i E_i / F_i$, где Φ_i — стоимость i-го вида оборудования, используемого для обработки рассматриваемой партии деталей; τ_i — время, затрачиваемое на его переналадку; F_i — годовой фонд располагаемого времени i-го вида оборудования; E_i — плата с одного рубля фондов i-го вида), $z_{х}$ — издержки хранения одной готовой детали в течение года; d_0 — стоимость предмета труда при его поступлении на первую операцию и d_i — стоимость затрат, добавленных на i-й операции; $T_{с}$ — длительность производственного цикла; T — длительность планового периода (год); E — плата за рубль оборотных средств, используемых в течение года; N — годовая программа выпуска деталей; n_i — размер партии запуска на i-й операции технологической последовательности и n — единый размер партии запуска на всех операциях технологической последовательности.

Первый вопрос, возникающий при выборе размера партии, следующий: выбирать ли размер партии различным для каждой операции или одинаковым для всех операций технологического процесса обработки предмета труда. При определении размера партии для каждой отдельной операции, как правило, возникает несовпадение величин партий, во многих случаях приводящее к росту издержек производства.

Пусть $n_i < n_{i+1}$. Тогда на i-й операции нет смысла работать партиями n_i, так как для $(i+1)$-й операции требуется n_{i+1} деталей, прошедших i-ю операцию. Обработка деталей на i-й операции должна продолжаться до тех пор, пока не будут обработаны все n_{i+1} деталей. Перерывы на i-й операции до обработки n_{i+1} штук деталей лишь удлинили бы цикл производства. Кроме того, если n_{i+1} / n_i — нецелое число, то для обеспечения работы партиями на $(i+1)$-й операции на i-й операции следует произвести $([n_{i+1} / n_i] + 1)$ партий деталей. Разность в $\{([n_{i+1} / n_i] + 1) n_i - n_{i+1}\}$ штук деталей останется лежать на складе по крайней мере до начала обработки на $(i+1)$-й операции следующих n_{i+1} деталей. Это равносильно бесполезному росту незавершенного производства.

Поэтому допустимо лишь уменьшение размера партии по ходу технологического процесса, но не его увеличение.

Пусть $n_i > n_{i+1}$. В этом случае общие для обеих операций издержки не обязательно будут минимальными.

Во-первых, если $n_i / n_{i+1} \neq [n_i / n_{i+1}]$, то на протяжении нескольких периодов производства будут лежать без использования $((n_i / n_{i+1}) - [n_i / n_{i+1}]) n_{i+1}$ деталей, обусловливая дополнительные расходы на хранение и омертвляя оборотные средства. Поэтому вполне возможно, что общие издержки для двух операций уменьшатся, если взять n_i^* и n_{i+1}^*, близкие к n_i и n_{i+1} и такие, что их отношение является целым числом. Ясно, что может быть несколько способов такого округления.

Во-вторых, из обработанных на i-й операции n_i деталей n_{i+1} будут переданы на $(i+1)$-ю операцию, а $(n_i - n_{i+1})$ деталей будут отправлены на склад. Нужно будет нести расходы по их хранению и омертвить оборотные средства. Если бы размер партии запуска на обеих операциях был одинаков, то эти расходы не возникли бы.

В-третьих, неодинаковый размер партий запуска на каждой операции сильно затрудняет планирование и оперативное управление ходом производства, что также приводит к некоторому удорожанию производства.

В силу этих факторов в большинстве случаев целесообразно выбирать размер партии запуска, одинаковый для всей технологической цепочки производства. Этот вывод, конечно, не исключает случая, когда общие издержки производства при выполнении соотношений $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_k$ будут меньше издержек производства при одинаковом размере партии. Вероятность такого случая велика, если на начальных по ходу технологии обработки операциях расходы на переналадку значительно больше, чем на последующих операциях. В этом случае следует всю технологическую последовательность операций разбить на группы, в каждой из которых расходы на переналадку лишь незначительно колеблются по операциям, и такие, что средняя величина наладочных расходов в каждой предшествующей группе больше средней величины наладочных расходов в каждой последующей группе. Определив величину партии запуска для той группы операций, после которой деталь подается на сборку или считается готовой продукцией, рассчитываем размер партии для следующей против хода технологического процесса группы операций. Обязательным условием расчета должна быть кратность партий на смежных группах операций.

Найдем уравнение определения оптимального размера партии. Средний размер незавершенного производства в течение производственного цикла одной партии при неравномерном нарастании добавленных затрат равен стоимости предмета труда при его поступлении на первую операцию плюс средняя арифметическая добавленных затрат, взвешенных по длительности нахождения этих затрат в производстве. Длительность нахождения затрат в производстве зависит от длительности времени обработки и от величины межоперационных перерывов. Поскольку как время обработки, так и величина межоперационных перерывов зависят от величины партии, то точный характер неравномерного роста затрат до определения размера партии установить невозможно. Естественным путем преодоления этого затруднения является предположение о равномерности роста добавленных затрат. Тогда средний размер незавершенного производства в течение производственного цикла будет

$$n\left(d_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1} d_i\right).$$

При определении среднего размера незавершенного производства в течение периода T следует учесть, что производство партиями является регулярно повторяющимся производством, в котором в каждый момент времени в среднем находится $T_c N / Tn$ партий деталей. В самом деле, N / n показывает число запусков, необходимых для выполнения производственной программы, а T / T_c — сколько отрезков времени, равных производственному циклу, содержится в плановом периоде. Частное этих двух величин отражает среднее число партий деталей, находящихся в обработке. Значит, средний размер незавершенного производства в течение периода T равен

$$\frac{T_c}{T} N\left(d_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} d_i\right).$$

Работа партиями может потребовать увеличения оборотных средств в готовой продукции. Средний размер средств в готовой продукции при равномерном потреблении деталей в течение планового периода и при средней себестоимости детали, не включающей расходов на наладку, равной C, будет

$$\frac{n}{2}\left(d_0 + \frac{z_н}{n} + \sum_{i=1}^{k} d_i + z_x\right) = \frac{nC + z_н}{2}.$$

Размер партии запуска следует выбирать таким, чтобы достигался минимум общей суммы затрат на наладку оборудования, незавершенное производство, обработку и транспортировку предмета труда и на хранение готовых изделий

$$Z = \frac{T_c}{T} NE\left(d_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} d_i\right) + E \cdot \frac{nC + z_н}{2} + \frac{Nz}{n} + N\sum_{i=1}^{k} d_i + \frac{nz_x}{2} = \min. \qquad (1)$$

Это уравнение не учитывает некоторых факторов, в ряде случаев влияющих на размер партии, которые можно назвать натуральными границами размера партии. Это размеры свободных площадей, используемых под хранение заделов, стойкость инструмента, обусловливающая период работы оборудования от одной переточки до другой, стойкость штампа. Размеры свободных площадей и стойкость штампа ставят для размера партии предел сверху. Эти натуральные границы размера партии можно учесть после того, как по (1) определен размер партии, не учитывающий этих границ.

Теоретически длительность операций и величина добавленных затрат на каждой операции зависят от величины партии, ибо с ростом размера партии производительность труда рабочих повышается. Однако существующие нормативы времени обработки детали и величины добавленных затрат на операции не учитывают подобной зависимости. Эти нормативы отражают среднюю длительность операции и средние добавленные затраты на операции при выполнении этой операции разными рабочими в условиях движения предмета труда именно партиями. Поскольку, однако, на время обработки детали и на величину затрат, кроме размера партии, оказывают влияние также такие факторы, как индивидуальные особенности и мастерство рабочего, частота повторения данной операции, состояние оборудования, то реальной базой для расчета размера партии запуска следует считать лишь существующие нормативы времени обработки детали и величины добавленных затрат на операции. При их применении длительность выполнения операции и величины добавленных затрат становятся независимыми от размера партии. При этом условии из (1) получаем

$$\frac{dZ}{dn} = \frac{NE}{T}\left(d_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} d_i\right)\frac{dT_c}{dn} + \frac{EC}{2} - \frac{Nz}{n^2} + z_x = 0. \tag{2}$$

Из (2) получаем формулу для оптимального размера партии

$$n = \sqrt{Nz\left[\frac{NE}{T}\left(d_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} d_i\right)\frac{dT_c}{dn} + \frac{EC}{2} + z_x\right]^{-1}}.$$

Уравнение (2) включает длительность производственного цикла партии. Как показано в [5, 11], длительность производственного цикла можно определить по формуле $T_c = t^*\alpha\beta$, где t^* — длительность технологического цикла партии, т. е. время, в течение которого хотя бы одна деталь партии находится в процессе обработки, контроля или транспортировки; α — коэффициент нережимности, выражающий отношение полного календарного фонда времени планового периода к располагаемому времени этого же периода и исчисляемый по формуле $24\gamma/T_g\varepsilon\rho$ (γ — число календарных дней в плановом периоде, T_g — средняя длительность рабочего дня, ε — сменность, ρ — число рабочих дней в плановом периоде); β — коэффициент, учитывающий влияние случайных факторов и календарной взаимосвязи работ и исчисляемый по формуле $T_{c0}/t_0^*\alpha_0$ (T_{c0}, t_0^*, α_0 — соответственно средняя фактическая длительность производственного цикла в данном цехе, средняя фактическая длительность технологического цикла в данном цехе и коэффициент нережимности в предшествующем плановом периоде). Учитывая, что коэффициенты α и β не зависят от n, получаем для оптимального размера партии запуска

$$n = \sqrt{Nz\left[\frac{NE}{T}\left(d_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} d_i\right)\alpha\beta\,\frac{dt^*}{dn} + \frac{EC}{2} + z_x\right]^{-1}}. \tag{3}$$

ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ЦИКЛА

Длительность технологического цикла равна сумме длительности технологического цикла на участках прерывного и непрерывного движения предмета труда за вычетом длительности смещений между смежными участками прерывного и непрерывного движения предмета труда.

Непрерывный вид движения предмета труда характеризуется отсутствием пролеживания предмета труда возле рабочих мест в ожидании обработки. Длительность технологического цикла в этом случае равна

$$t^* = (n-q)\max_i\left\{\frac{t_i}{c_i q}\right\} + \sum_{i=1}^{k} t_i. \tag{4}$$

При прерывном движении предмета труда отсутствуют простои станков, что при отсутствии синхронизации длительности операций ведет к пролеживанию деталей в ожидании обработки. Длительность технологического цикла для этого случая может быть определена по формуле

$$t^* = \sum_{i=1}^{k} \frac{nt_i}{c_i q_i} - \sum_{i=1}^{k} [n - \max(q_i, q_{i+1})] \min\left(\frac{t_i}{c_i q_i}, \frac{t_{i+1}}{c_{i+1} q_{i+1}} \right). \qquad (5)$$

Если прерывный участок движения предмета труда предшествует непрерывному, то смещение L между первой операцией непрерывного участка и последней операцией прерывного участка равно

$$L = [n - \max(q_j, q_{j+1})] \min\left\{ \frac{t_j}{c_j q_j}, \max_{i \in U} \frac{t_i}{c_i q_i} \right\} \qquad (6)$$

где U — множество индексов непрерывного участка; j — индекс последней операции предшествующего участка. Если прерывный участок следует за непрерывным, то смещение равно

$$L = [n - \max(q_j, q_{j+1})] \min\left\{ \max_{i \in U} \frac{t_i}{c_i q_i}, \frac{t_{j+1}}{c_{j+1} q_{j+1}} \right\}. \qquad (7)$$

Обоснование этих формул дано в [5, 11].

Формулы (4) — (7) показывают, что длительность технологического цикла определяется однозначно лишь при заданных участках прерывного и непрерывного движения предмета труда. Поэтому еще до исчисления размера партии запуска нужно определить участки прерывного и непрерывного движения предмета труда. Поскольку прерывное движение предмета труда сокращает производственный цикл, но приводит к простоям станков, а непрерывное движение исключает последние, но удлиняет технологический цикл, то для выбора формы движения предмета труда нужно сопоставить выгоды от сокращения длительности цикла с потерями от простоя станков и рабочей силы и наоборот.

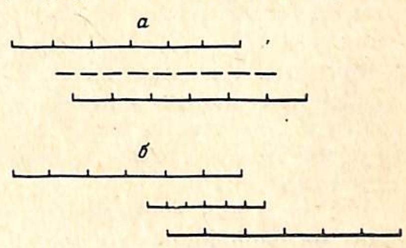

Рис. 1.

Рис. 1 иллюстрирует ход технологического процесса при непрерывном (случай «а») и прерывном (случай «б») движении предмета труда, если имеются три технологические операции, каждая из которых выполняется на одном станке.

В случае «а» потери от простоя станка на второй операции выразятся величиной $(n-1)(t_2 - t_1)\Phi_2 E_2 F_p^{-1}$, а потери от простоя рабочей силы будут равны $(n-1)(t_2 - t_1)\Delta F_p^{-1}$, где Δ — оплата простоев рабочей силы (если они оплачиваются), занятой обслуживанием второго станка, за год; F_p — располагаемый фонд времени планового периода.

В случае «б» потери от удлинения технологического цикла будут $(n-1)(t_2 - t_1)(d_0 + d_1) nEF_p^{-1}$. Если

$$(n-1)(t_2 - t_1)(\Phi_2 E_2 + \Delta) F_p^{-1} > (n-1)(t_2 - t_1)(d_0 + d_1) nEF_p^{-1}$$

или

$$n < \frac{\Phi_2 E_2 + \Delta}{(d_0 + d_1)E}, \qquad (8)$$

то выгоднее прерывный вид движения.

Формула (8) лишь немногим преобразится, если вместо $(n-1)$ поставить $(n-q)$, вместо $(t_2 - t_1)$ поставить $((t_2/c_2 q_2) - (t_1/c_1 q_1))$ и вместо Φ_2 взять $c_2\Phi_2$, характерные для общего случая. В общем случае: на i-й операции прерывный вид движения выгоднее; если

$$n < \frac{c_i \Phi_i E_i + \Delta_i}{\left(d_0 + \sum\limits_{j=1}^{i-1} d_j\right) E} = l_i\,, \tag{9}$$

где Δ_i показывает оплату простоев рабочей силы, занятой обслуживанием всех c_i станков в течение года.

Из (9) следует, что выгодность прерывного или непрерывного движения предмета труда зависит от размера партии запуска. В свою очередь оптимальный размер партии запуска через длительность технологического цикла зависит от выбора участков прерывного и непрерывного движения предмета труда.

ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕРА ПАРТИИ ЗАПУСКА

Выходом из упомянутого «круга» может служить следующий итерационный процесс определения оптимального размера партии запуска: выбрав некоторый размер партии n_1, определяем участки непрерывного и прерывного движения предмета труда по неравенству (9); зная эти участки, исчисляем производную от длительности технологического цикла, используя (4) — (7) (это будет сумма коэффициентов при n в указанных формулах); по найденной формуле определяем по (3) размер партии n_2. Если полученный размер партии совпадает с исходным ($n_2 = n_1$), то он и будет оптимальным. Если нет, то повторяем расчет, исходя из размера партии n_2. В результате получаем некоторую последовательность значений $n_1, n_2, n_3, \ldots$.

Как и для всякого итерационного процесса, необходимо получить ответ на следующие вопросы: во-первых, будет ли этот процесс сходиться; во-вторых, если процесс сходится, то будет ли его предел оптимальным размером партии; в-третьих, если на первые два вопроса получен положительный ответ, какова скорость сходимости этого процесса. Для ответа на эти вопросы предварительно докажем одно общее утверждение.

Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — две функции. Рассмотрим итерационный процесс $x_{s+1} = \varphi[f(x_s)]$. Для того чтобы он существовал, необходимо и достаточно, чтобы область изменения $f(x)$ составляла часть области определения $\varphi(y)$ и область изменения $\varphi(y)$ составляла часть области определения $f(x)$.

Теорема 1. *Если $f(x)$ и $\varphi(y)$ — одинаково монотонные функции, то последовательность $\{x_s\}_1^\infty$ монотонна.*

Доказательство. Если $x_{s+1} \geqslant x_s$, то при убывании $f(x)$ $y_{s+1} = f(x_{s+1}) \leqslant f(x_s) = y_s$ и при возрастании $f(x)$ $y_{s+1} \geqslant y_s$. Но тогда при убывании $\varphi(y)$ $x_{s+2} = \varphi(y_{s+1}) \geqslant \varphi(y_s) = x_{s+1}$ и при возрастании $\varphi(y)$ $x_{s+2} \geqslant x_{s+1}$, т. е. в условиях теоремы из $x_{s+1} \geqslant x_s$ следует $x_{s+2} \geqslant x_{s+1}$. Теорема доказана.

Следствие. Если в условиях теоремы множество значений $\varphi(y)$ ограничено, то процесс сходится.

В рассматриваемом нами процессе

$$\frac{dt^*}{dn} = f(n) \text{ и } n = \varphi\left(\frac{dt^*}{dn}\right).$$

Функция $f(n)$ определяется следующим образом. Заданы упорядоченные наборы положительных чисел: $1, 2, \ldots, k$ — операции; $l_1, l_2 \ldots, l_k$ — критерии отнесения операций к непрерывным или прерывным участкам движения предмета труда; $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — длительности операций *.

Пусть n — некоторое неотрицательное действительное число. Если $n < l_i$, то на i-й операции применяется прерывный вид движения предмета труда; если $n \geqslant l_i$, то на i-й операции применяется непрерывный вид движения предмета труда. Для взятого n все операции разделяются на осуществляемые при прерывном движении предмета труда и на осуществляемые при непрерывном движении предмета труда. Пусть $p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_r$ — участки (отрезки) ряда $1, 2, \ldots, k$, содержащие операции, принадлежащие к одному виду движения предмета труда, так что $p_1, p_3, \ldots$ — участки операций, где осуществляется непрерывный (прерывный) вид движения предмета труда, а $p_2, p_4, \ldots$ — участки операций с прерывным (непрерывным) движением предмета труда.

Для каждого участка непрерывного движения предмета труда p_ν определим число $\max\limits_{i \in p_\nu} t_i$; для каждого участка прерывного движения предмета труда p_μ определим число $\sum\limits_{i \in p_\mu} [t_i - \min(t_i, t_{i+1})]$, причем для последней операции этого участка полагаем $\min(t_i, t_{i+1}) = 0$.

Для каждого стыка непрерывного p_ν и прерывного p_μ участков определяем число $\min\{\max\limits_{i \in p_\nu} t_i, {}^{(\mu)}t_j$, где ${}^{(\mu)}t_j$ — длительность первой операции в p_μ. Для каждого стыка прерывного p_μ и непрерывного p_ν участков определим число $\min\{t_j^{(\mu)}, \max\limits_{i \in p_\nu} t_i\}$, где $t_j^{(\mu)}$ — длительность последней операции в p_μ.

Тогда

$$\frac{dt^*}{dn} = f(n) = \begin{cases} \max\limits_{i \in p_1} t_i - \min\{\max\limits_{i \in p_1} t_i, {}^{(2)}t_j\} + \sum\limits_{i \in p_2} [t_i - \min(t_i, t_{i+1})] - \\ \qquad - \min\{t_j^{(2)}, \max\limits_{i \in p_3} t_i\} + \ldots, \\ \qquad \text{если } p_1 \text{ — участок с непрерывным движением;} \\ \sum\limits_{i \in p_1} [t_i - \min(t_i, t_{i+1})] - \min\{t_j^{(1)}, \max\limits_{i \in p_2} t_i\} + \max\limits_{i \in p_2} t_i - \\ \qquad - \min\{\max\limits_{i \in p_2} t_i, {}^{(3)}t_j\} + \ldots, \\ \qquad \text{если } p_1 \text{ — участок с прерывным движением,} \end{cases}$$

т. е.

$$\frac{dt^*}{dn} = f(n) = \sum_\nu \max_{i \in p_\nu} t_i + \sum_\mu \sum_{i \in p_\mu} [t_i - \min(t_i, t_{i+1})] - \tag{10}$$

$$- \sum_{\nu=\mu-1} \min\{\max_{i \in p_\nu} t_i, {}^{(\mu)}t_j\} - \sum_{\nu=\mu+1} \min\{t_j^{(\mu)}, \max_{i \in p_\nu} t_i\}.$$

* Для простоты мы предполагаем, что на каждой операции занят один станок ($c_i = 1$) и на каждом станке обрабатывается одна деталь ($q_i = 1$). Этот случай наиболее важен для практики, однако и в общем случае, когда вместо t_i следует рассматривать $t_i / c_i q_i$, все рассуждения дословно сохраняются.

Теорема 2. *$f(n)$ есть неотрицательная ступенчатая убывающая функция* (рис. 2).

Доказательство. 1. Неотрицательность $f(n)$ следует из (10), ибо для каждого отрицательного слагаемого в выражение $f(n)$ входит положительное слагаемое с неменьшей абсолютной величиной.

Рис. 2

2. Пусть $l_{i_1} \leqslant l_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant l_{i_k}$ — критерии отнесения операций к непрерывному или прерывному виду движения предмета труда, расположенные в порядке возрастания. Из определения функции $f(n)$ видно, что при всех n, для которых $l_{i_p} \leqslant n < l_{i_{p+1}}$, функция $f(n)$ не меняет своего значения, ибо разделение операций на прерывные и непрерывные при таких n одно и то же. Поэтому $f(n)$ есть ступенчатая функция, принимающая не более k различных значений.

3. Пусть $n < l_{i_1}$. Тогда все операции прерывны и функция $f(n)$ принимает значение $f(n) = \sum_{i=1}^{k} [t_i - \min(t_i, t_{i+1})]$. Если n возрастает, то все непрерывные операции остаются непрерывными, а некоторые прерывные могут стать непрерывными. Пусть $l_{i_{p-1}} \leqslant n_1 < l_{i_p}$ и $l_{i_p} \leqslant n_2 < l_{i_{p+1}}$; при переходе n от n_1 к n_2 операция i_p станет непрерывной*. Возможны следующие случаи:

а) $i_p = 1$, а 2-я операция непрерывна; б) $i_p = 1$, а 2-я операция прерывна; в) $i_p = k$, а $(k-1)$-я операция непрерывна; г) $i_p = k$, а $(k-1)$-я операция прерывна; д) $1 < i_p < k$, а $(i_p - 1)$-я и $(i_p + 1)$-я операции непрерывны; е) $1 < i_p < k$, а $(i_p - 1)$-я и $(i_p + 1)$-я операции прерывны; ж) $1 < i_p < k$, а $(i_p - 1)$-я операция непрерывна и $(i_p + 1)$-я операция прерывна; з) $1 < i_p < k$, а $(i_p - 1)$-я операция прерывна и $(i_p + 1)$-я операция непрерывна.

Рассмотрим $f(n_1) - f(n_2)$ во всех этих случаях. Способ изучения написанной разности во всех случаях аналогичен, поэтому здесь мы изучим $f(n_1) - f(n_2)$ лишь в некоторых случаях, содержащих определенные различия. В ниже приведенных равенствах i_0 и i_0' означают начало или конец соответствующего непрерывного участка.

В случае «а»

---

* Если $l_{i_p} = l_{i_{p+1}} = \ldots = l_{i_{p+m-1}}$, то при переходе n от $n_1 (l_{i_{p-1}} \leqslant n_1 < l_{i_p})$ к $n_2 (l_{i_p} \leqslant n_2 < l_{i_{p+m}})$ непрерывными станут m операций: $i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{p+m-1}$. Разбор этого случая осуществляется в m шагов, на каждом из которых непрерывной становится (как в основном тексте) только одна операция в дополнение к тем, которые стали непрерывными на предыдущих шагах. Действительно, в этом случае

$$f(n_1) - f(n_2) = [f(n_1) - s_{i_p}] + [s_{i_p} - s_{i_p, i_{p+1}}] + \ldots + [s_{i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{p+m-2}} - f(n_2)],$$

где $s_{i_p, i_q, \ldots, i_r}$ — правая часть (10), в которой прерывные операции $i_p, i_q, \ldots, i_r$ заменены на непрерывные.

$$f(n_1)-f(n_2)=t_1-\min\{t_1, \max_{1<i\leqslant i_0} t_i\}+\max_{1<i\leqslant i_0} t_i-\max_{1\leqslant i\leqslant i_0} t_i=0,$$

$$\text{как при } t_1\leqslant \max_{1<i\leqslant i_0} t_i, \text{ так и при } t_1>\max_{1<i\leqslant i_0} t_i.$$

В случае «в»

$$f(n_1)-f(n_2)=\max_{i_0\leqslant i<k} t_i-\min\{\max_{i_0\leqslant i<k} t_i, t_k\}+t_k-\max_{i_0\leqslant i\leqslant k} t_i=0,$$

$$\text{как при } t_k\leqslant \max_{i_0\leqslant i<k} t_i, \text{ так и при } t_k>\max_{i_0\leqslant i<k} t_i.$$

В случае «д»

$$f(n_1)-f(n_2)=\max_{i_0\leqslant i<i_p} t_i-\min\{\max_{i_0\leqslant i<i_p} t_i, t_{i_p}\}+t_{i_p}-$$
$$-\min\{t_{i_p}, \max_{i_p<i\leqslant i_0'} t_i\}+\max_{i_p<i\leqslant i_0'} t_i-\max_{\substack{i_0\leqslant i<i_p\\ i=i_p\\ i_p<i\leqslant i_0'}} t_i.$$

В этом случае при $\max\limits_{i_0\leqslant i<i_p} t_i\leqslant \max\limits_{i_p<i\leqslant i_0'} t_i$

$$f(n_1)-f(n_2)=\begin{cases}(\text{если } t_{i_p}\leqslant \max\limits_{i_0\leqslant i<i_p} t_i)\\ \max\limits_{i_0\leqslant i<i_p} t_i-t_{i_p}+t_{i_p}-t_{i_p}+\max\limits_{i_p<i\leqslant i_0'} t_i-\max\limits_{i_p<i\leqslant i_0'} t_i\geqslant 0;\\ (\text{если } \max\limits_{i_0\leqslant i<i_p} t_i<t_{i_p}<\max\limits_{i_p<i\leqslant i_0'} t_i)\\ \max\limits_{i_0\leqslant i<i_p} t_i-\max\limits_{i_0\leqslant i<i_p} t_i+t_{i_p}-t_{i_p}+\max\limits_{i_p<i\leqslant i_0'} t_i-\max\limits_{i_p<i\leqslant i_0'} t_i=0;\\ (\text{если } t_{i_p}\geqslant \max\limits_{i_p<i\leqslant i_0'} t_i)\\ \max\limits_{i_0\leqslant i<i_p} t_i-\max\limits_{i_0\leqslant i<i_p} t_i+t_{i_p}-\max\limits_{i_p<i\leqslant i_0'} t_i+\max\limits_{i_p<i\leqslant i_0'} t_i-t_{i_p}=0.\end{cases}$$

Аналогично, в этом случае при $\max\limits_{i_0\leqslant i<i_p} t_i>\max\limits_{i_p<i\leqslant i_0'} t_i$ $f(n_1)-f(n_2)\geqslant 0$.

В случае «ж»

$$f(n_1)-f(n_2)=\max_{i_0\leqslant i<i_p} t_i-\min\{\max_{i_0\leqslant i<i_p} t_i, t_{i_p}\}+t_{i_p}-\min(t_{i_p}, t_{i_{p+1}})-$$
$$-\max_{i_0\leqslant i\leqslant i_p} t_i+\min\{\max_{i_0\leqslant i\leqslant i_p} t_i, t_{i_{p+1}}\}=$$

$$=\begin{cases}(\text{если } t_{i_p}\geqslant \max\limits_{i_0\leqslant i<i_p} t_i)\\ \max\limits_{i_0\leqslant i<i_p} t_i-\max\limits_{i_0\leqslant i<i_p} t_i+t_{i_p}-\min(t_{i_p}, t_{i_{p+1}})-t_{i_p}+\min(t_{i_p}, t_{i_{p+1}})=0;\\ (\text{если } t_{i_p}<\max\limits_{i_0\leqslant i<i_p} t_i)\\ \max\limits_{i_0\leqslant i<i_p} t_i-t_{i_p}+t_{i_p}-\min(t_{i_p}, t_{i_{p+1}})-\max\limits_{i_0\leqslant i<i_p} t_i+\min\{\max\limits_{i_0\leqslant i<i_p} t_i, t_{i_{p+1}}\}\geqslant 0.\end{cases}$$

В остальных случаях также $f(n_1) - f(n_2) \geqslant 0$.

Следовательно, $f(n)$ — убывающая функция. Теорема доказана.

Заметим, что, как видно из доказательства, функция $f(n)$ может иметь скачки лишь в точках l_{ip}, но возможно не во всех таких точках, т. е. количество различных значений, принимаемых $f(n)$ (количество ступенек на ее графике) может быть меньше числа операций.

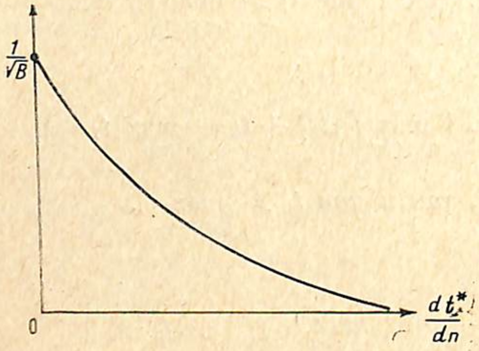

Рис. 3

Функция (dt^*/dn) есть согласно (3)

$$n = \varphi\left(\frac{dt^*}{dn}\right) = \left(A\frac{dt^*}{dn} + B\right)^{-1/2},$$

где A и B — некоторые положительные константы, а $dt^*/dn \geqslant 0$ в силу теоремы 2. Как легко видеть, это — убывающая функция, множество значений которой при $dt^*/dn \geqslant 0$ ограничено: $0 < n \leqslant B^{-1/2}$ (рис. 3).

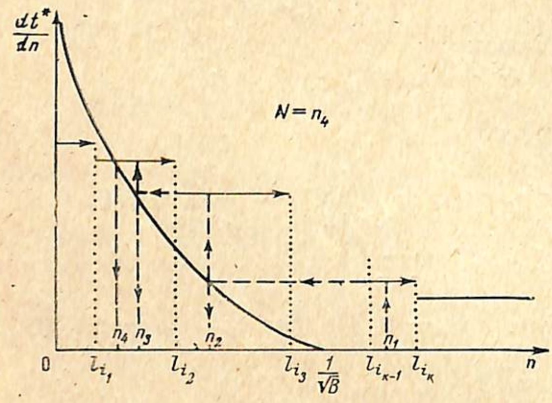

Рис. 4

В силу теоремы 1 и следствия из нее из предыдущего вытекает, что рассматриваемый нами итерационный процесс $n_{s+1} = \varphi[f(n_s)]$ монотонно сходится к некоторому числу N: $\lim\limits_{s\to\infty} n_s = N$. Так как функция $f(n)$ принимает конечное число значений (не более k) и последовательность $\{n_s\}_1^\infty$ монотонна, то сходимость процесса означает, что в последовательности $\{n_s\}_1^\infty$ все члены, начиная с некоторого номера s_0 (причем $s_0 \leqslant k$), одинаковы, т. е.

$$n_{s_0} = n_{s_0+1} = n_{s_0+2} = \ldots = N,$$

причем справедливо равенство

$$N = \varphi[f(N)]. \tag{11}$$

Таким образом, не более чем за k шагов применения рассматриваемого итерационного процесса мы найдем число N, которое является в силу (11) искомым оптимальным размером партии запуска.

Графически рассматриваемый итерационный процесс показан на рис. 4. Для некоторого ускорения нахождения N можно рекомендовать брать значение $n_1 \leqslant B^{-1/2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Теплов. Планирование на машиностроительных заводах. М., Машгиз, 1960.
2. К. Г. Татевосов. Основы оперативно-производственного планирования на машиностроительном предприятии. М.— Л., «Машиностроение», 1965.

3. Типовая методика непрерывного оперативно-производственного планирования. Экономическая газета, 1965, № 41.
4. С. А. Думлер. Основные моменты расчета величины наивыгоднейшей партии. В сб. Методика расчетов серийного производства. М.— Л., «Стандартизация и рационализация», 1934.
5. ЦЭМИ АН СССР. Научный отчет по теме «Некоторые модели оптимального планирования оборотных средств промышленных предприятий». М., 1966.
6. Б. О. Архипов. Расчет серий при планировании производства. «Предприятие», 1930, № 21—22.
7. К. Андлер. Рационализация производства и оптимальная величина партии. М.— Л., «Техника управления», 1931.
8. В. Г. Баньковский. Организация работы оптимальными партиями в крупносерийном производстве. «Органинформация», 1935, № 1.
9. В. К. Семенченко. К вопросу об определении наивыгоднейшего количества деталей в партии. «Предприятие», 1930, № 13—14.
10. К. Г. Татевосов. Нормативные расчеты равномерного производства в серийном машиностроении. М.— Л., Машгиз, 1961.
11. Ю. Т. Калиберда. Теоретические основы расчета длительности производственного цикла предметов труда. Труды Казанского авиационного института, Казань, 1961, вып. 67.

Поступила в редакцию
21 V 1966