

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ УСТРОЙСТВ СБОРА И ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ В АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЕМ

В. М. СОКОВ

(Москва)

Данная работа представляет собой дальнейшее рассмотрение задачи, изложенной в [1] и поставленной также применительно к потребностям автоматизированных систем управления промышленными предприятиями. Решается задача по определению оптимального числа устройств сбора и передачи информации, постановка которой отличается тем, что устройства описываются не идеализированной экспоненциальной функцией обслуживания, а функцией, полученной на основе экспериментальных данных, т. е. реальной функцией обслуживания.

Основными рассматриваемыми вопросами являются получение экспериментальных функций обслуживания и решение оптимальной задачи.

Для получения экспериментальной функции обслуживания устройств необходимо собрать статистические данные о времени обслуживания устройствами поступивших требований; на основе полученной статистики определить вид и параметры аппроксимирующей функции.

За время обслуживания принимается отрезок времени с момента, когда оператор взял требование (документ) в руки, до момента, когда он его отложил в сторону, чтобы перейти к обслуживанию следующего требования.

Обслуживание требований с помощью устройств сбора и передачи данных в условиях автоматизированных систем управления заключается в выполнении ряда операций по фиксации информации на документе и печатной ленте с одновременным занесением данных на перфоленгу или с передачей информации по каналам связи, а также операций по первичной обработке информации. Занесение данных происходит с пульта устройства, с машинных носителей информации с помощью считывающих приспособлений, а также с подключаемых вводных устройств. Фиксация информации может происходить на исходных, вновь образуемых или на постоянных документах, хранящихся в картотеках. Время обслуживания включает в себя также время, затрачиваемое на поиск и возврат на место нужного постоянного документа и входного машинного носителя информации. Организация входного потока требований при этом не играет роли.

Для получения представительной статистики испытания проводятся в различное время рабочего дня, в различные дни месяца, а также с различными операторами, чтобы учесть различную производительность операторов, их утомляемость, влияние загрузки операторов, меняющейся в течение месяца.

На автозаводе им. Лихачева автором была собрана статистика для двух типов устройств: регистратора производства РП-70 и бухгалтерской машины «Аудит-733» (оба итальянские, фирмы Оливетти). На регистраторах

№ п.п.		Функции	Центры интервалов, сек.												28	30
			10	12	14	16	18	20	22	24	26					
1		$\bar{f}$	3	9	73	134	343	631	714	671	552	486	409			
2		$\bar{f}$	0,00049	0,00146	0,01184	0,02173	0,05562	0,10232	0,11578	0,10880	0,08951	0,07881	0,06632			
3		$\bar{f}$	3	12	85	219	562	1193	1907	2578	3130	3616	4025			
4		$\bar{f}$	0,0005	0,0020	0,0138	0,0355	0,0911	0,1935	0,3092	0,4180	0,5076	0,5864	0,6527			
5		$\ln(1-\bar{f})$					-0,096	-0,215	-0,370	-0,541	-0,708	-0,884	-1,060			
6		$\bar{f}$	0	0	0	0	0	0,1647	0,3023	0,4173	0,5181	0,5975	0,6638			
7		$ \bar{f}-F $							0,0069	0,0007	0,0105	0,0111	0,0111			

№ п.п.		Функции	Центры интервалов, сек.												52	54
			32	34	36	38	40	42	44	46	48	50				
1		$\bar{f}$	377	283	234	218	167	160	122	90	90	63	59	47		
2		$\bar{f}$	0,06113	0,04589	0,03794	0,03535	0,02708	0,02594	0,01978	0,01459	0,01459	0,01022	0,00957	0,00762		
3		$\bar{f}$	4402	4685	4919	5137	5304	5464	5586	5676	5766	5829	5888	5935		
4		$\bar{f}$	0,7138	0,7597	0,7976	0,8330	0,8601	0,8860	0,9058	0,9204	0,9350	0,9452	0,9548	0,9624		
5		$\ln(1-\bar{f})$	-1,251	-1,427	-1,608	-1,784	-1,973	-2,180	-2,351	-2,531	-2,733	-2,904	-3,096	-3,280		
6		$\bar{f}$	0,7192	0,7678	0,8060	0,8380	0,8647	0,8870	0,9065	0,9219	0,9348	0,9455	0,9545	0,9624		
7		$ \bar{f}-F $	0,0054	0,0081	0,0084	0,0050	0,0046	0,0010	0,0007	0,0015	0,0002	0,0003	0,0003	0,0000		

№ п.п.		Функции	Центры интервалов, сек.												76	78
			56	58	60	62	64	66	68	70	72	74				
1		$\bar{f}$	45	37	30	24	28	17	10	10	15	5	8	3		
2		$\bar{f}$	0,00730	0,00600	0,00486	0,00389	0,00454	0,00276	0,00162	0,00162	0,00243	0,00081	0,00130	0,00049		
3		$\bar{f}$	5980	6017	6047	6071	6099	6116	6126	6136	6151	6156	6164	6167		
4		$\bar{f}$	0,9697	0,9757	0,9805	0,9844	0,9890	0,9917	0,9934	0,9950	0,9974	0,9982	0,9995	1,0000		
5		$\ln(1-\bar{f})$	-3,496	-3,716	-3,942	-4,166	-4,510	-4,795	-5,015	-5,724	-5,993	-6,386	-7,627	-∞		
6		$\bar{f}$	0,9686	0,9738	0,9781	0,9818	0,9850	0,9877	0,9900	0,9909	0,9926	0,9939	0,9950	0,9959		
7		$ \bar{f}-F $	0,0011	0,0019	0,0024	0,0026	0,0040	0,0040	0,0034	0,0041	0,0048	0,0043	0,0045	0,0041		

№ п.п.	Функции	Центры интервалов, сек.											
		70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	
1	$\bar{t}$	35	124	136	122	104	94	70	59	30	25	19	
2	$\bar{t}$	0,04084	0,14469	0,15869	0,14236	0,12135	0,10968	0,08168	0,06884	0,03501	0,02917	0,02217	
3	$\bar{F}$	35	159	295	417	521	615	685	744	774	799	818	
4	$\bar{F}$	0,0408	0,1855	0,3442	0,4866	0,6080	0,7177	0,7994	0,8682	0,9032	0,9324	0,9546	
5	$\ln(1-\bar{F})$	-0,042	-0,205	-0,423	-0,667	-0,936	-1,266	-1,609	-2,032	-2,335	-2,694	-3,090	
6	F	0,0861	0,3363	0,5132	0,6394	0,6394	0,7382	0,8080	0,8605	0,8977	0,9250	0,9450	
7	$ \bar{F}-F $			0,0079	0,0266	0,0314	0,0205	0,0086	0,0077	0,0055	0,0074	0,0096	

№ п.п.	Функции	Центры интервалов, сек.										
		180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	
1	$\bar{t}$	10	5	6	5	1	5	1	1	2	3	
2	$\bar{t}$	0,01167	0,00583	0,00700	0,00533	0,00117	0,00583	0,00117	0,00117	0,00233	0,00350	
3	$\bar{F}$	828	833	839	844	845	850	851	852	854	857	
4	$\bar{F}$	0,9663	0,9721	0,9791	0,9849	0,9861	0,9919	0,9930	0,9942	0,9965	1,0000	
5	$\ln(1-\bar{F})$	-3,387	-3,576	-3,863	-4,193	-4,269	-4,808	-4,962	-5,144	-5,654	—∞	
6	F	0,9596	0,9676	0,9785	0,9834	0,9899	0,9918	0,9939	0,9955	0,9966	0,9975	
7	$ \bar{F}-F $	0,0067	0,0045	0,0006	0,0015	0,0038	0,0001	0,0009	0,0013	0,0001	0,0025	

производился складской учет поступления и выдачи деталей на постоянных документах — картах складского учета, на бухгалтерских машинах составлялись сводные фактуры к счетам на выдачу запасных частей заказчикам.

Для регистраторов производства статистика собиралась по восьми операторам в различное время рабочего дня в течение месяца, а для бухгалтерских машин — по двум операторам в тех же условиях. Было проведено соответственно 6167 и 857 испытаний.

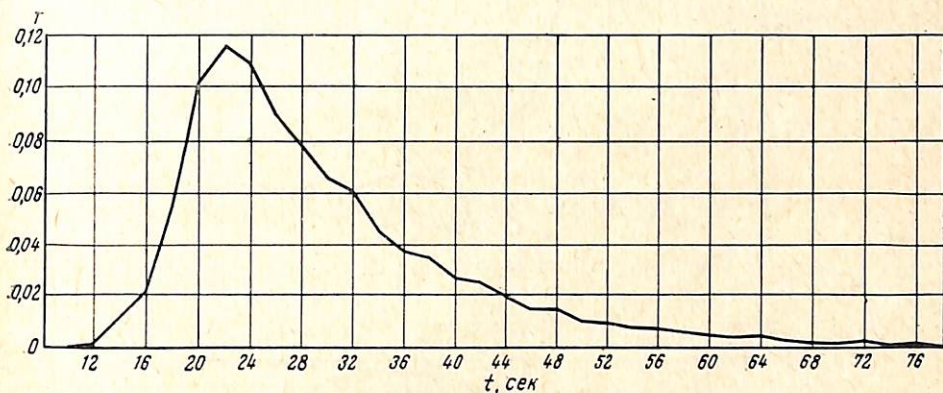


Рис. 1

Результаты испытаний представлены в виде ранжированных вариационных рядов: для регистраторов производства — в табл. 1 с интервальной разностью в 2 сек., для бухгалтерских машин — в табл. 2 с интервальной разностью в 10 сек. За центры интервалов приняты в первом случае четные значения времени обслуживания, во втором — значения времени, кратные 10. В первой строке таблиц записаны частоты соответствующих интервалов, обозначенные $\bar{f}$, во второй строке — частоты, обозначенные $\bar{f}$, в третьей строке — накопленные частоты, обозначенные $\bar{F}$, в четвертой строке — накопленные частоты, обозначенные $\bar{F}$.

Изображенные на рис. 1 и 2 кривые можно толковать как экспериментальные кривые распределения соответственно для регистраторов производства и бухгалтерских машин с единицей измерения времени, равной соответствующей интервальной разности. Кривые построены по данным строки 2 табл. 1 и 2. На рис. 3 и 4 сплошными линиями показаны экспериментальные функции распределения, построенные по данным строки 4, соответственно для регистраторов производства и бухгалтерских машин.

По своему виду экспериментальные функции распределения очень схожи с экспонентой, сдвинутой по оси абсцисс, и отличаются от нее только переходными участками, соединяющими переменную часть функции с постоянной.

Полученные функции распределения показывают, что время обслуживания не может быть меньше, чем некоторая определенная величина [4]. Действительно, реальное обслуживание при сборе и передаче информации требует затраты времени на выполнение некоторого, не меньше минимального, набора операций и никогда не происходит мгновенно.

Возникновение переходных участков объясняется тем, что кривые распределения в конце начального постоянного участка достигают своего максимального значения не скачком, а с ограниченной скоростью (см. рис. 1 и 2).

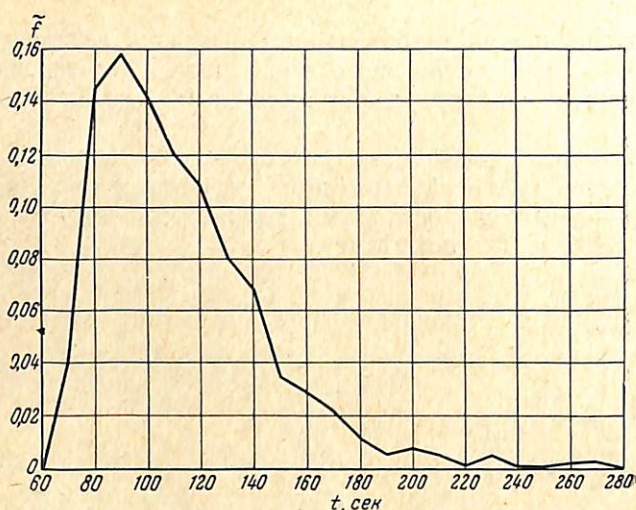


Рис. 2

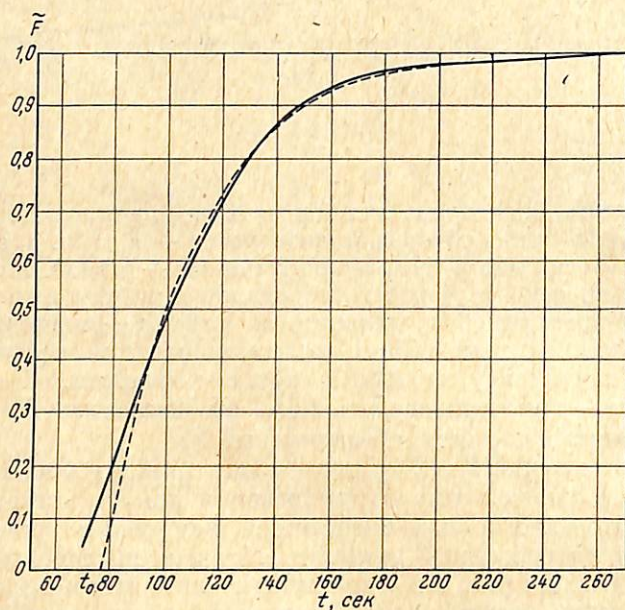


Рис. 3

Правая ветвь кривой распределения, если ее мысленно сгладить, образует кривую, близкую к убывающей экспоненте, т. е. производная функции распределения подтверждает близость последней к сдвинутой экспоненте.

Если пренебречь переходным участком функции распределения, то последнюю можно аппроксимировать следующим образом

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t \leq t_0, \\ 1 - e^{-v(t-t_0)} & \text{для } t > t_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь t_0 — величина постоянного участка функции распределения; v — показатель экспоненты; t — текущее время.

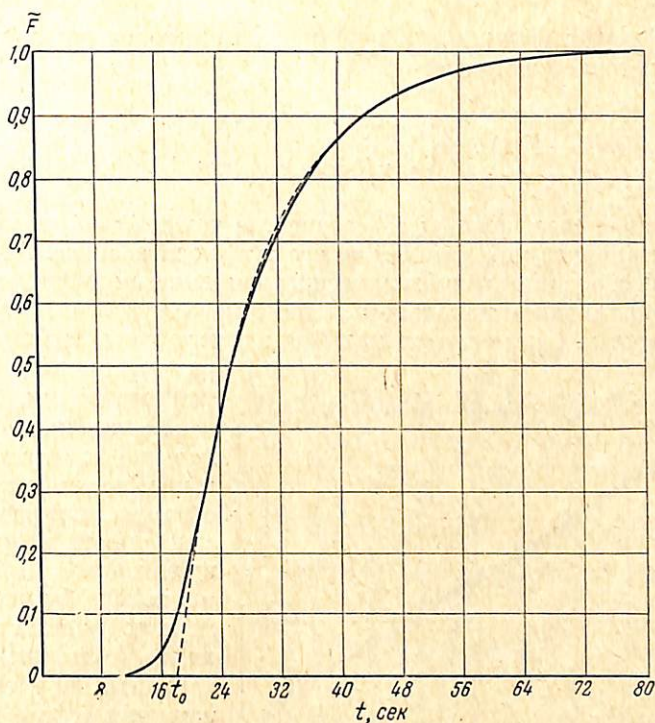


Рис. 4

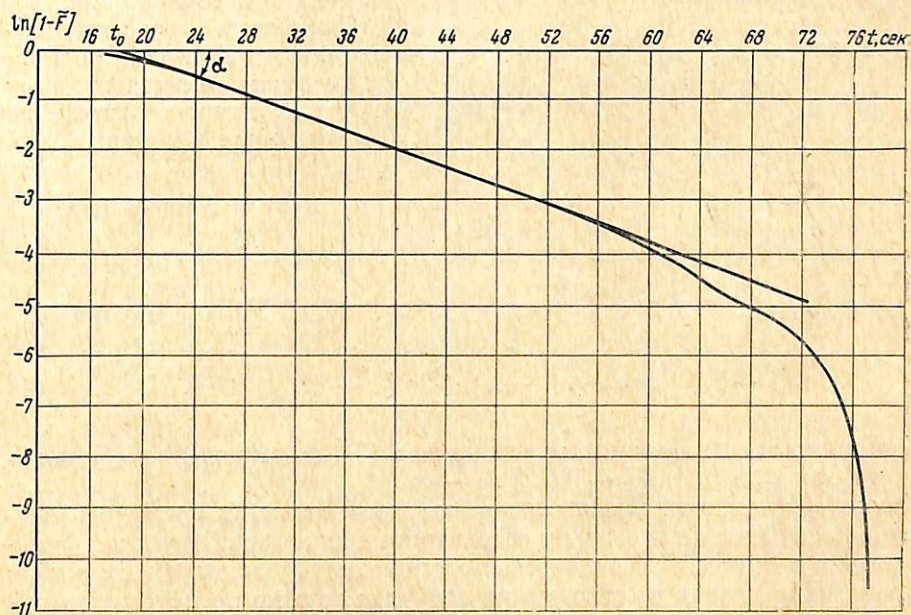


Рис. 5

Параметры аппроксимированной функции определим следующим образом. По данным строки 4 табл. 1 и 2 найдем значения $\ln [1 - F(t)]$, которые запишем в строку 5. По полученным результатам построим зависимости $\ln [1 - F(t)] = f(t)$ (см. рис. 5 и 6) соответственно для регистраторов производства и бухгалтерских машин.

Логарифмическая функция, полученная из аппроксимированной функции распределения, будет иметь вид

$$\ln[1 - F(t)] = \begin{cases} 0 & \text{для } t \leq t_0, \\ -v(t - t_0) & \text{для } t > t_0, \end{cases}$$

т. е. это прямая, пересекающая ось абсцисс в точке $t = t_0$ и проходящая в четвертом квадранте под углом $\alpha = \arctg v$ к оси абсцисс. Аналогичная зависимость, построенная по эмпирическим данным, как видно из рис. 5 и 6, отличается искривлением начального и конечного участков. Искривление начального участка определяется наличием переходного участка в экспериментальной функции распределения.

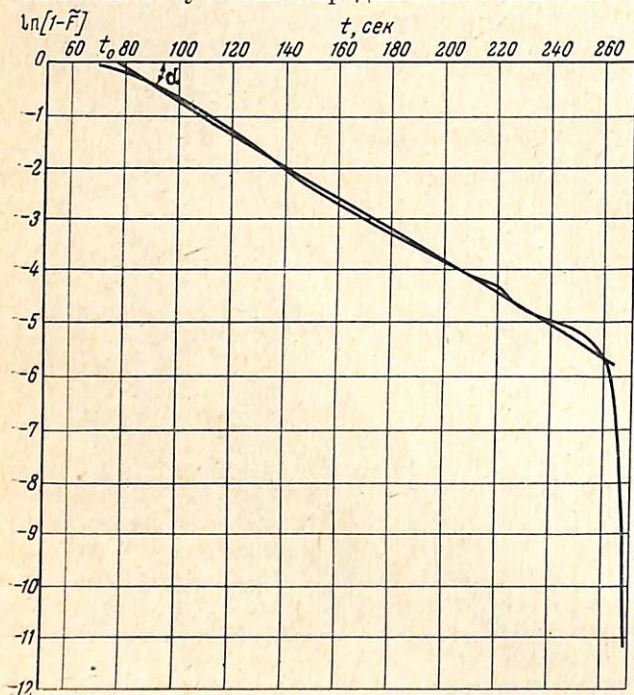


Рис. 6

Искривление конечного участка логарифмической зависимости определяется ограниченностью экспериментальной функции распределения. Действительно, каково бы ни было число n испытаний в эксперименте, зафиксированные варианты времени обслуживания будут иметь некоторое максимальное значение. Обозначим его t_m . Поскольку экспериментальная функция распределения отличается от своей аппроксимации на некоторую величину $\delta(t)$, т. е.

$$\tilde{F}(t) = F(t) + \delta(t), \quad (2)$$

то для $t \geq t_m$ действительно

$$\delta(t) = e^{-v(t-t_0)}. \quad (3)$$

$$\ln[1 - \tilde{F}(t)] = -v(t - t_0) + \ln[1 - \delta(t)e^{v(t-t_0)}]. \quad (4)$$

Принимая теперь во внимание равенство (3), из выражения (4) получим, что для $t \geq t_m$ $\ln[1 - \tilde{F}(t)] = -\infty$.

Таким образом, при максимальном значении варианта времени обслуживания t_m в вариационном ряду рассматриваемая логарифмическая функция уходит в минус бесконечность. Отклонение функции от прямой и быстрое ее нарастание по абсолютной величине должно происходить в той зоне, где $\delta(t)$ приближается по величине к значению $e^{-v(t-t_0)}$. Ясно, что это должно проявиться только в хвосте экспериментальной функции распределения, как следует из (2). Эта картина целиком подтверждается полу-

Учтя в выражении $\ln[1 - \tilde{F}(t)]$ соотношение (2), получим членными результатами (см. рис. 5 и 6).

Линейный участок функции $\ln[1 - \tilde{F}(t)]$, получаемый на графике, оказывается вполне достаточным для определения обоих параметров ап-

проксимации — v и t_0 . Продолжая его до пересечения с осью абсцисс, получим в точке пересечения значение t_0 . Выразив a в радианах, получим значение показателя экспоненты v .

Таким образом, получаем для регистратора производства $t_0 = 18$ сек., $v = 0,0908$ 1/сек.; для бухгалтерской машины $t_0 = 77$ сек., $v = 0,0312$ 1/сек.

По полученным параметрам рассчитаем аппроксимирующую функцию распределения и проверим, являются ли расхождения между эмпирической и аппроксимирующей кривой случайными, несущественными, или, напротив, эти расхождения закономерны. В последнем случае принятую теоретическую аппроксимацию экспериментальной функции распределения нельзя считать допустимой.

В строке 6 таблиц вычислены значения аппроксимирующей функции, которая показана на рис. 3 и 4 пунктиром.

Для определения близости аппроксимации воспользуемся критерием согласия Колмогорова, согласно которому должно выполняться условие

$$P(D_n \geq \lambda_0) = 1 - K(\lambda_0) > 0,01.$$

Здесь D_n — случайная величина распределения Колмогорова $K(\lambda)$;

$$\lambda_0 = K^0 \sqrt{n} = \max |F(t) - F(t)| \sqrt{n};$$

$$K(\lambda_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \lambda_0^2};$$

n — объем совокупности.

Вычислив значение λ_0 , найдем по таблицам Н. В. Смирнова значение функции $1 - K(\lambda_0)$. Если эта вероятность окажется весьма малой ($< 0,01$), то это будет означать, что наступило маловероятное событие, а поэтому расхождение между теоретической аппроксимацией и эмпирической функцией нельзя объяснить случайностью наблюдаемых значений и следует считать существенным. Если же полученная вероятность не мала ($> 0,01$), то расхождение между функциями следует считать несущественным, а принятое теоретическое распределение — согласованным с экспериментом [2].

При отыскивании максимальной величины расхождения между эмпирическим распределением и теоретической аппроксимацией не будем принимать во внимание переходной участок, которым мы пренебрегли, так как аппроксимирующая функция выбиралась с целью наилучшего приближения к экспериментальной функции на ее основных участках. Ясно, что это ограничение не может сколько-нибудь заметно повлиять на конечные результаты.

Для регистраторов из строки 7 табл. 1 находим $K^0 = 0,0111$. Тогда $\lambda_0 = 0,0111 \cdot \sqrt{6167} = 0,872$.

По таблицам Н. В. Смирнова находим $1 - K(\lambda_0) = 0,4326 > 0,01$.

Для бухгалтерских машин из строки 7 табл. 2 определяем $K^0 = 0,0314$. Тогда $\lambda_0 = 0,0314 \cdot \sqrt{857} = 0,949$. По таблицам находим $1 - K(\lambda_0) = 0,3670 > 0,01$.

Таким образом, критерий согласия подтверждает правильность принятого теоретического распределения.

Определим число испытаний n , которое нужно провести для получения функции распределения с заданной точностью.

Согласно интегральной теореме Муавра — Лапласа, если μ есть число наступлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления этого события постоянна и равна p , причем $0 < p < 1$, то равномерно относительно a и b ($-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$) при

$n \rightarrow \infty$ имеет место соотношение [3]

$$P \left\{ a \leq \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < b \right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz \rightarrow 0.$$

Здесь $q = 1 - p$.

Рассматривая аппроксимацию экспериментальной функции обслуживания, заметим, что для любого фиксированного t вероятность появления в i -м испытании события A , заключающегося в том, что время обслуживания t_i в данном испытании будет удовлетворять соотношению $t_i \leq t$, не зависит от i и равна

$$p(t_i \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t \leq t_0, \\ 1 - e^{-v(t-t_0)} & \text{для } t > t_0. \end{cases}$$

Вероятность противоположного события $\bar{A}$ равна q , которое определяется соотношением

$$q(t_i > t) = \begin{cases} 1 & \text{для } t \leq t_0, \\ e^{-v(t-t_0)} & \text{для } t > t_0. \end{cases}$$

Таким образом, условия испытаний удовлетворяют теореме Муавра — Лапласа.

Пользуясь этой теоремой, определим наименьшее число испытаний, которое нужно провести, чтобы для заданного t отклонение частоты появления события A от вероятности p на величину, не превышающую $\varepsilon > 0$, происходило с вероятностью, не меньшей, чем β , т. е.

$$P \left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right\} \geq \beta.$$

Из теоремы следует, что

$$\begin{aligned} P \left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right\} &= P \left\{ -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leq \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right\} \approx \\ &\approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-x^2/2} dx, \end{aligned}$$

т. е. должно выполняться неравенство

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-x^2/2} dx \geq \beta. \quad (5)$$

При всех известных прочих величинах отсюда можно найти величину n .

Теорема Муавра — Лапласа неприменима к значениям p , близким к нулю и единице. Однако с ее помощью можно определить требуемое число испытаний для основной части функции распределения.

Заметим, что поскольку произведение pq имеет максимальное значение при $p = q = 0,5$, то при сдвиге влево и вправо от момента ϑ , соответствующего $p = F(\vartheta) = 0,5$, число испытаний n_t ($t \neq \vartheta$), которое необходимо провести при сохранении величин ε_ϑ и β_ϑ , будет удовлетворять соотношению $n_t < n_\vartheta$, т. е. n_ϑ максимально во всей допустимой зоне t .

Действительно, сравним два выражения:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon \sqrt{n_0/p_0 q_0}} e^{-x^2/2} dx = \beta \text{ и } \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon \sqrt{n_t/p_t q_t}} e^{-x^2/2} dx = \beta.$$

Из сравнения следует, что

$$\frac{n_0}{p_0 q_0} = \frac{n_t}{p_t q_t},$$

а поскольку $p_t q_t < p_0 q_0$, то $n_t < n_0$.

Поэтому для области функции обслуживания, где она существенно отличается от нуля и единицы, достаточно определить требуемое наименьшее число испытаний при $p = q = 0,5$. Это будет наибольшее из всех наименьших значений n для данной области.

Определим, например, n_0 при $\varepsilon = 0,02$, $\beta = 0,99$.

Подставляя в (5) известные величины, получим

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{0,02 \sqrt{n/0,5^2}} e^{-x^2/2} dx = 0,99.$$

По таблицам, приведенным в [3], определяем значение верхнего предела интегрирования $0,04\sqrt{n} = 2,575$. Отсюда $n = 4140$.

Поскольку по регистраторам производства число сделанных испытаний больше минимально необходимого числа при заданных величинах ε и β , то можно решить задачу определения наихудшей величины ε , которая обеспечивается при заданных β и n .

Поскольку значение верхнего предела интегрирования остается таким же, как и в предыдущем примере, то получим

$$\varepsilon = \frac{2,575}{\sqrt{6167/0,5^2}} = 0,016.$$

Вероятность $\beta = 0,99$, с которой обеспечивается расхождение $\varepsilon = 0,016$ экспериментальной частоты от вероятности появления события A , определяемой принятым теоретическим распределением, практически означает достоверность. Поэтому можно сказать, что расхождение между полученным экспериментальным распределением и его теоретической аппроксимацией в области, где p существенно отличается от нуля и единицы, нигде не превысит данного ε . Действительно, полученные фактические расхождения (см. строку 7 табл. 1) нигде не превышают заданной величины.

Аналогично для бухгалтерских машин находим

$$\varepsilon = \frac{2,575}{\sqrt{857/0,5^2}} = 0,044.$$

Фактические расхождения с достоверностью подтверждают этот результат.

Точность экспериментального и полученного по нему теоретического распределения для бухгалтерских машин несколько ниже точности распределения для регистраторов вследствие меньшего количества проведенных испытаний, но вполне удовлетворительна для решения рассматриваемой ниже задачи.

Постановка задачи приведена в [1], за исключением п. 4, в котором экспоненциальная функция обслуживания заменяется функцией (1).

Заметим, что параметр v теперь является просто показателем экспоненты. Величиной же, аналогичной параметру обслуживания, будет теперь параметр

$$\xi = \frac{1}{t_0 + (1/v)} = \xi v.$$

Из приведенного соотношения следует, что при одинаковых величинах v в обоих случаях всегда выполняется неравенство $\xi < v$, так как $\xi < 1$.

Поэтому следует ожидать, что искомое число аппаратов обслуживания, а также затраты на создание и эксплуатацию системы обслуживания в случае реальной функции будут больше, чем в идеализированном случае.

Для определения математического ожидания затрат необходимо знать зависимость затрат при N аппаратах в системе обслуживания от времени и функцию распределения вероятностей времени обслуживания $F_N^h(t)$ k требований N аппаратами.

Из постановки задачи следует, что функция затрат $G(N, t)$ остается прежней, т. е. описывается выражениями

$$G_1(N, t), \quad G_2(N, t) \quad \text{и} \quad G_3(N, t).$$

Для определения требуемой функции $F_N^h(t)$ запишем прежде всего функцию распределения вероятностей времени обслуживания l требований одним аппаратом

$$F_1^l(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t \leq lt_0, \\ 1 - e^{-v(t-lt_0)} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{v^i (t-lt_0)^i}{i!} & \text{для } t > lt_0. \end{cases} \quad (6)$$

Она легко получается по индукции из выражения (1) интегрированием по всем возможным ситуациям для 2, 3, 4, ..., l требований.

Запишем также выражение для выходного потока $\bar{f}_1^m(t)$ из одного аппарата, образующегося при обслуживании накопленных требований. Для любого $\bar{m} \leq 1$ действительно следующее выражение

$$\bar{f}_1^m(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t \leq \bar{m}t_0, \\ 1 - e^{-v(t-\bar{m}t_0)} \sum_{i=0}^{\bar{m}-1} \frac{v^i (t-\bar{m}t_0)^i}{i!} & \text{для } \bar{m}t_0 < t \leq (\bar{m}+1)t_0, \\ e^{-v[t-(\bar{m}+1)t_0]} \sum_{i=0}^{\bar{m}} \frac{v^i [t-(\bar{m}+1)t_0]^i}{i!} - \\ - e^{-v(t-\bar{m}t_0)} \sum_{i=0}^{\bar{m}-1} \frac{v^i (t-\bar{m}t_0)^i}{i!} & \text{для } t > (\bar{m}+1)t_0. \end{cases} \quad (7)$$

Функция $\bar{f}_1^m(t)$ задает вероятность, с которой один аппарат за заданное время t обслужит точно $\bar{m}$ требований. Она получается путем интегрирования следующего выражения

$$\bar{f}_1^m(t) = \int_0^t [1 - F(t-\xi)] \frac{d}{d\xi} F_1^{\bar{m}}(\xi) d\xi.$$

Нетрудно убедиться, что для накопленного входного потока требований независимо от вида функции (1) можно записать следующее рекур-

рентное выражение

$$F_N^k(t) = F_1^k(t) + \sum_{j=0}^{k-1} F_{N-1}^{k-j}(t) f_1^j(t). \quad (8)$$

Здесь $F_N^k(t)$ получается как сумма вероятностей по полному набору взаимно исключающих друг друга ситуаций, возникающих при распределении k требований между одним и $N-1$ аппаратами. Поскольку $F_1^k(t)$ и $f_1^j(t)$ известны и определяются соотношениями (6) и (7), то выражение (8) полностью определено для любого N .

Чтобы упростить выражение для математического ожидания затрат, примем T за единицу времени, измеряя остальные временные величины в долях смены, и введем следующие обозначения в функциях затрат [1]

$$a = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{m} D + \beta + \gamma, \quad b = \delta_1 \gamma, \quad c = \delta_2 \gamma, \quad \vartheta = \theta/T.$$

Тогда получим следующие выражения для функции затрат $G_1 = Na$, $G_2 = N[a + b(t-1)]$, $G_3 = N[a + \vartheta b + c(t-1-\vartheta)]$. И математическое ожидание затрат примет следующий вид

$$\begin{aligned} MG_N = & \int_0^1 Na \frac{dF_N^k(t)}{dt} dt + \int_1^{1+\vartheta} N[a + b(t-1)] \frac{dF_N^k(t)}{dt} dt + \\ & + \int_{1+\vartheta}^{\infty} N[a + \vartheta b + c(t-1-\vartheta)] \frac{dF_N^k(t)}{dt} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Для получения численных результатов функция интегрируется численно для последовательного числа 1, 2, 3, ..., N , $N+1$ аппаратов, пока величина MG_N не начнет возрастать. Тогда искомое число аппаратов будет равно N , т. е. такому числу, при котором MG_N минимальна.

Расчеты показывают, что результаты, полученные для реальной функции обслуживания, тем сильнее отличаются от результатов в идеализированном случае, чем больше величина k и t_0 и чем меньше значение γ .

Рассмотренную задачу можно решить также и для случая непостоянной величины k .

Если известно распределение $P(k)$, а нижней и верхней границами изменения k являются соответственно k_1 и k_2 , то математическое ожидание затрат будет определяться по формуле

$$MMG_N^k = \sum_{k=k_1}^{k_2} MG_N^k P(k), \quad (10)$$

где MG_N^k определяется по формуле (9).

Действительно, при фиксированной величине k , независимо от N , величина MG_N^k имеет ту же вероятность, что и k .

Определение оптимального значения N происходит так же, как и в случае постоянного k , т. е. производится расчет для 1, 2 и так далее числа аппаратов и определяется такое число N , при котором величина MMG_N^k минимальна.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Гринев, В. М. Соков. Одна задача выбора оптимального числа аппаратов системы сбора и передачи информации. В сб. Экономико-математические модели. М., «Наука», (в печати).
2. А. И. Карасев. Основы математической статистики, М., Росвузиздат, 1962.
3. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1965.
4. Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. Введение в теорию массового обслуживания, М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию
25 VII 1968