ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2012, том 48, № 2, с. 15–29

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

УПРАВЛЕНИЕ ВОДНЫМИ РЕСУРСАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ОБОРОТНОГО ВОДОСНАБЖЕНИЯ*

© 2012 г. А.А. Фридман

(Москва)

В работе построена модель оптимального управления запасами двух ресурсов, где запас одного ресурса (отработанная вода) образуется в результате потребления другого (вода из истощаемого природного источника). Отработанные воды могут использоваться повторно, но с более высокими предельными издержками, чем подземные воды. В условиях ограничения на мощности резервуара для хранения запаса отработанных вод исследуются характеристики траектории оптимального водопотребления и динамики запасов истощаемого и производимого ресурса. Проанализировано влияние запаса истощаемого ресурса и уровня его пополнения, а также предельных издержек неистощаемого ресурса-заменителя на эффективные траектории.

Ключевые слова: истощаемые ресурсы, водные ресурсы, переработка, оптимальное управление.

ВВЕДЕНИЕ

Вопросу об оптимальном использовании истощаемых ресурсов и воспроизводимых ресурсов-заменителей посвящено множество исследований. Однако не все истощаемые ресурсы обладают одинаковыми экономическими характеристиками. Некоторые ресурсы, главным образом топливо, полностью утилизируются в процессе потребления. Другие, например металлы, представляют собой товары длительного пользования. Как показали (Hartwick, 1993; Levhari, Pindyck, 1981), рассматривая модели с истощаемыми ресурсами длительного пользования, где допускалась частичная амортизация запаса добытого ресурса, к этим ресурсам также применимо правило Хотеллинга с той лишь разницей, что в силу специфики этих ресурсов правило работает применительно не к потоку извлекаемого из недр ресурса, а к извлеченному запасу.

Однако существует еще одна категория истощаемых ресурсов, которая не укладывается ни в одну из упомянутых выше категорий, так как, с одной стороны, не является товаром длительного пользования, а с другой стороны, не утилизируется полностью в процессе потребления. Пример такого ресурса – чистая вода. Оставшиеся после использования сточные воды возвращаются в природные источники. Эффект пополнения запасов истощаемого ресурса рассматривался во множестве работ применительно к полезным ископаемым, но это пополнение являлось результатом целенаправленной геолого-разведочной деятельности, как, например, в (Pindyck, 1978), в то время как частичное пополнение запасов подземных вод происходит автоматически.

Существует еще одно важное отличие: сточные воды, сбрасываемые в природные водоемы, приводят к загрязнению природных источников. Определенный уровень загрязнения может быть со временем абсорбирован природной средой, поэтому проблему загрязнения решают, устанавливая нормативы для сточных вод, удовлетворение которым влечет дополнительные издержки на очистку сточных вод.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке факультета экономики НИУ ВШЭ (индивидуальный исследовательский грант 2011 г. "Эффективное использование связанных запасов истощаемых ресурсов (на примере водных ресурсов)").
Автор выражает признательность анонимному рецензенту за полезные замечания и предложения.

Альтернативой сброса сточных вод в природный источник выступают очистка и повторное использование отработанных вод. В этом случае истощение запаса одного ресурса (подземных вод) одновременно приводит к созданию другого запаса – отработанных вод, которые после соответствующей очистки могут вновь использоваться потребителями. Таким образом, мы сталкиваемся с задачей оптимального управления двумя взаимосвязанными запасами истощаемых ресурсов-заменителей, которая и является предметом настоящего исследования.

Экологический аспект переработки сырья рассмотрен в работе (Smith, 1977), где загрязнение окружающей среды является побочным продуктом производства и переработка отходов позволяет сократить накапливаемое отрицательное внешнее воздействие. Однако в этой работе в производственном процессе участвует лишь воспроизводимый фактор (труд), что существенно отличает ее от данного исследования.

Вопросы переработки вторичного сырья затрагивались в том числе и в работах, посвященных исследованию истощаемых ресурсов. Однако авторы в основном рассматривали переработку сырья как способ решения проблемы устойчивого роста экономики с истощаемыми ресурсами (см., к примеру, (Di Vita, 2001, 2006; Pittel et al., 2010)). Более того, в этих работах изначально предполагалось, что объем перерабатываемого вторичного сырья является экзогенной долей извлеченного из недр ресурса.

В (Roumasset, Wada, 2011) была построена модель, в которой источниками воды выступали подземные воды, дополняемые опресняемой морской водой и вторично используемой водой. На основе симуляции модели авторы получили, что выигрыш в благосостоянии при оптимальной эксплуатации технологии вторичной переработки воды составляет менее одного процента, в то время как слишком раннее переключение на эту технологию может привести к потерям, составляющим около 4%. Следует отметить, что построенная в данной работе модель никак не связывает объемы использованной воды с объемами, доступными для вторичной переработки, это существенно упрощает действительность.

Более интересным представляется подход, предложенный в работе (Schäfer, 1992). Автор рассматривает игру между агентом, добывающим ресурс, и агентом, занимающимся его переработкой. Однако в целях упрощения анализа автор не предполагает возможность накопления вторсырья. В действительности при наличии мощностей для хранения утилизация вторсырья может быть оптимальным образом распределена во времени.

В следующем разделе приведена модель оптимального управления двумя природными источниками водных ресурсов, один из которых является истощаемым с частичным пополнением, а второй выступает в роли неистощаемого ресурса заменителя и технологии, позволяющей накапливать не утилизированный в процессе потребления ресурс и затем повторно привлекать его после соответствующей переработки.

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим регион, где в качестве источника пригодной для потребления воды могут выступать три ресурса-заменителя: истощаемые подземные воды, альтернативный природный источник и технология оборотного водоснабжения с фиксированной мощностью хранения отработанной воды. В качестве альтернативного природного источника могут выступать опресненная морская вода (Tsur, Zemel, 2000; Roumasset, Wada, 2011) или импорт воды из соседнего региона (Holland, Moore, 2003). В обоих случаях предельные издержки для альтернативного источника оказываются выше: в первом случае из-за дороговизны опреснения, а во втором – в силу издержек и потерь при транспортировке.

Во многих вододефицитных регионах, например в Израиле, дополнительным источником воды является вторично переработанная вода. Отработанная вода может повторно употребляться (после соответствующей очистки) или накапливаться после первичной обработки в специальных резервуарах и использоваться в будущем. В Израиле в 2001 г. существовало более 200 подобных резервуаров, мощность хранения которых составляла около 120 млн м^3 (Friedler, 2001, с. 31). Если в 2005 г. в Израиле опресненная морская вода составляла около 2%, а повторно используемая вода – 13% от общего объема водопользования (Dreizin, Tenne, Hoffman, 2008), то в 2010 г. доля опресняемой воды возросла до 13%, а применение повторно перерабатываемой воды составило 18,5% совокупного водопотребления (Tenne, 2010). Более того, на сегодняшний день в Израиле перерабатывается 75%[1] всех сточных вод, что является лидирующим показателем в мире.

Заметим, что в Израиле, испытывающем острый дефицит водных ресурсов, перерабатываемая вода рассматривается не только как способ сглаживания сезонных колебаний, но и как "новый источник воды, который служит заменителем традиционных источников" (Friedler, 2001, с. 30). Таким образом, "в условиях экстремального дефицита свежей воды отработанные воды перестают рассматриваться с точки зрения проблемы их утилизации, а приобретают характер редкого ресурса" (Albert, 2001, с. 50).

Пусть запас подземных вод, доступный для использования в момент t, составляет величину $S_t \geq 0$, причем первоначальный запас задан и равен S_0. Если водозабор из подземного источника в момент t обозначить через g_t и предположить, что запас воды пополняется естественным образом на величину $\bar{g}$[2] в каждый момент времени, то динамика запаса описывается уравнением $\dot{S}_t = \bar{g} - g_t$. Заметим, что в отличие от модели, представленной в (Фридман, 2009), коэффициент при g_t, отражающий уровень безвозвратного водопотребления, равен единице. Это различие обусловлено тем фактом, что при наличии технологии оборотного водоснабжения забранная вода не поступает обратно в природный источник.

Помимо подземных вод может использоваться и альтернативный источник водоснабжения (например, опресняемая морская вода), который выступает в качестве неистощаемого ресурса-заменителя[3]. Объем водозабора из альтернативного источника в момент t обозначим через l_t. Будем предполагать, что предельные издержки водоснабжения для каждого источника постоянны, причем $c_g < c_l$, где индекс g соответствует подземным водам, l – поверхностным. Подобное соотношение отражает относительную дороговизну технологии опреснения.

Наконец рассмотрим третий источник водных ресурсов – технологию оборотного водоснабжения. Отработанные воды могут накапливаться в резервуаре, максимальная мощность которого составляет $\bar{Z}$[4]. Следует отметить, что зачастую в качестве резервуаров для хранения прошедших первичную обработку отработанных вод используют выработавшие свой ресурс подземные источники. Как отмечают исследователи, это позволяет не только снизить расходы на сооружение подобных резервуаров, но обеспечивает дополнительную естественную очистку стоков (Maliva et al., 2011).

Если запас воды в резервуаре в момент t обозначить через Z_t, а интенсивность использования технологии оборотного водоснабжения (т.е. объем повторно используемых вод) – через z_t, то динамика запаса воды в резервуаре может быть описана следующим уравнением: $\dot{Z}_t = (1-\alpha)(g_t + l_t + z_t) - z_t$, где α – коэффициент, отражающий степень утилизации воды в процессе использования. Кроме того, запас воды в резервуаре должен удовлетворять ограничению по мощности $Z_t \leq \bar{Z}$. В начальный момент запас отработанных вод отсутствует, т.е. $Z_0 = 0$.

Заметим, что максимальный размер мощности этой технологии $\bar{Z}$ предполагается экзогенно заданным, т.е. нас интересует вопрос оптимального использования этой технологии при задан-

[1] По данным национальной водоснабжающей компании Израиля "Мекорот" http://www.mekorot.co.il/Eng/Activities/Pages/WastewaterTreatmentandReclamation.aspx.

[2] Данная предпосылка впервые была использована в работе (Burt, 1966). Идея этой предпосылки такова: пополнение подземных вод для ограниченного бассейна можно считать константой, когда запас воды ниже некой пороговой отметки. Когда резервуар близок к заполнению, то пополнение становится убывающей функцией запаса. Поскольку в работе предполагается, что спрос достаточно велик по сравнению с величиной пополнения, то запас лишь истощается, а потому предпосылка о постоянном уровне пополнения является приемлемой.

[3] Например, согласно данным ООН, в ОАЭ в 2005 г. производство опресненной воды составляло практически треть объема водозабора из природных источников (база данных ООН по водным ресурсам AQUASTAT http://www.fao.org/nr/water/aquastat/data).

[4] Размеры подобных резервуаров могут существенно варьироваться от небольших прудов-накопителей до сооружений большой мощности. К примеру, в Израиле существуют резервуары для отработанной воды, мощность хранения которых варьируется от 50 тыс. до 6 млн м^3 (подробнее описание этих резервуаров представлено в гл. 21–24 книги (Juanico, Dor, 1999)).

ной вместимости резервуара. Само создание мощности естественно сопряжено со значительными капитальными затратами, которые, в свою очередь, зависят от величины $\bar{Z}$. В последующем анализе предполагается, что эти затраты уже сделаны в нулевой период. Модель может быть обобщена на случай, когда начальные мощности могут быть изменены посредством осуществления инвестиций не только в нулевой период и последующего использования дополнительных мощностей с учетом некоторого инвестиционного лага. Однако такая модификация существенно усложняет задачу и может рассматриваться как одно из направлений для дальнейших исследований.

Предельные издержки использования отработанных вод существенно варьируются: например, при использовании воды в качестве охладителя или транспортирующей среды отработанные воды характеризуются невысоким загрязнением. Ситуация, при которой оборотное водоснабжение характеризуется наименьшими предельными издержками по сравнению с остальными источниками, рассмотрена в работе (Фридман, 2010). В этом случае эффективность требует непрерывного использования отработанных вод, поэтому запас отработанной воды вдоль эффективной траектории равен нулю. В данной работе будем рассматривать случай, когда предельные издержки оборотного водоснабжения (c_z) выше предельных издержек подземного водоснабжения, т.е. $c_z > c_g$. Будем предполагать, что они все же ниже предельных издержек для альтернативного природного источника, т.е. $c_z < c_l$. Подобное предположение вполне оправданно при невысоком загрязнении отработанных вод и достаточно высоких издержках использования альтернативного источника. Заметим также, что если бы технология оборотного водоснабжения характеризовалась более высокими издержками по сравнению с альтернативным неистощаемым ресурсом, то не было бы смысла ее применять.

Следует отметить, что мы не моделируем явно расходы, связанные с предварительной очисткой поступающих на хранение стоков, потому что эти расходы можно неявно включить в издержки соответствующего источника, трактуя их как издержки не только водоснабжения, но и водоотведения. Действительно, если для некоторого источника i предельные издержки водоснабжения равны $\bar{c}_i$, а предельные издержки водоотведения – $\hat{c}_i$, то на единицу этого ресурса мы в целом потратим $c_i \equiv \bar{c}_i + (1-\alpha)\hat{c}_i$.

Таким образом, совокупное водопотребление в момент t составит $g_t + l_t + z_t$, что приносит полезность, равную $u(g_t + l_t + z_t)$, причем предполагается, что $u' > 0$, $u'' < 0$ и $u'(0) \to \infty$. Обозначив норму дисконтирования через r, получим следующую задачу максимизации совокупной приведенной стоимости общественного благосостояния для определения оптимальной динамики запасов и траекторий водопотребления:

$$\max_{l_t, g_t, z_t \geq 0} \int_0^\infty (u(g_t + l_t + z_t) - c_g g_t - c_l l_t - c_z z_t) e^{-rt} dt,$$

$$\dot{S}_t = \bar{g} - g_t,$$

$$\dot{Z}_t = (1-\alpha)(g_t + l_t + z_t) - z_t,$$

$$0 \leq Z_t \leq \bar{Z}, \quad Z_0 = 0,$$

$$S_t \geq 0, \quad S_0 - \text{задано}.$$

Пусть λ_t и μ_t – сопряженные функции, отражающие теневую оценку запаса подземных и отработанных вод соответственно. Тогда гамильтониан в терминах приведенной стоимости примет вид

$$H_t = (u(g_t + l_t + z_t) - c_g g_t - c_l l_t - c_z z_t) e^{-rt} + \lambda_t(\bar{g} - g_t) + \phi_t((1-\alpha)(g_t + l_t) - \alpha z_t).$$

Для того чтобы учесть условия неотрицательности и ограничения по мощности, построим лагранжиан $L_t = H_t + \mu_t S_t + \gamma_t(\bar{Z} - Z_t) + \beta_t Z_t$. Обозначим совокупное потребление воды через

$x_t \equiv g_t + l_t + z_t$. Дифференцируя лагранжиан по объемам водозабора и запасу подземных вод, получим следующие условия первого порядка:

$$u'(x_t) \le c_g + (\lambda_t - \phi_t(1-\alpha))e^{rt},\ \ g_t(u'(x_t) - c_g - (\lambda_t - \phi_t(1-\alpha))e^{rt}) = 0, \tag{1}$$

$$u'(x_t) \le c_l - \phi_t(1-\alpha))e^{rt},\ \ l_t(u'(x_t) - c_l + \phi_t(1-\alpha))e^{rt}) = 0, \tag{2}$$

$$u'(x_t) \le c_z + \alpha\phi_t e^{rt},\ \ z_t(u'(x_t) - c_z - \alpha\phi_t e^{rt}), \tag{3}$$

$$\dot{\lambda}_t = \begin{cases} 0, & \text{если } S_t > 0; \\ -\mu_t, & \text{если } S_t = 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$\dot{\phi}_t = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < Z_t < \bar{Z}; \\ \gamma_t, & \text{если } Z_t < \bar{Z}; \\ -\beta_t, & \text{если } Z_t = 0, \end{cases} \tag{5}$$

Поскольку рассматривается задача с бесконечным временным горизонтом и соответственно отсутствует условие на правом конце, необходимо выписать условия трансверсальности:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t S_t = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{t\to\infty} \phi_t Z_t = 0. \tag{7}$$

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОЙ ТРАЕКТОРИИ

Будем считать, что пополняемого запаса подземных вод даже с учетом их повторной переработки недостаточно для полного удовлетворения потребностей в воде, т.е. $u'(g/\alpha) > c_z$. Покажем, что в этих условиях запас отработанных вод (если таковой образуется) на эффективной траектории будет исчерпан полностью.

Утверждение 1. *Пусть $u'(\bar{g}/\alpha) > c_z$, тогда запас отработанных вод будет исчерпан полностью, т.е.* $\lim_{t\to\infty} Z_t = 0$.

Доказательство. От противного, пусть $\lim_{t\to\infty} Z_t \neq 0$. Поскольку запас должен быть не отрицателен, $Z_t > 0$. Тогда из условия трансверсальности (7) имеем $\lim_{t\to\infty} \phi_t = 0$, причем в силу положительности Z_t согласно (5) оценка запаса является константой, откуда заключаем, что $\phi = 0$. Тогда условия (2) и (3) примут вид $u'(x_t) \le c_z < c_l$, откуда следует, что $l_t = 0$. Заметим, что $x_t = g_t + l_t > 0$ для любого t, поскольку по условию $u'(0) > c_g$.

Так как $u'(x_t) \le c_z < u'(g/\alpha)$, то в силу убывания предельной полезности имеем $x_t \ge u'^{-1}(c_z) > g/\alpha$ для любого t. Это означает, что спрос не может быть удовлетворен лишь за счет пополнения запаса подземных вод и последующего их использования в соответствии с технологией оборотного водоснабжения, т.е. в каждый момент времени требуется дополнительный источник воды. Так как поверхностные воды при этом не будут задействованы, это означает, что запасы подземных и отработанных вод будут истощены. А так как эти запасы конечны, то в каждый момент времени необходимо дополнительное количество воды. Таким образом, $\lim_{t\to\infty} Z_t = 0$, т.е. мы пришли к противоречию. ■

Покажем на основе анализа условия трансверсальности (6), что запас подземных вод также будет полностью истощен.

Утверждение 2. *Пусть $u'(g/\alpha) > c_z$, тогда запас подземных вод будет исчерпан полностью, т.е.* $\lim_{t\to\infty} S_t = 0$.

Доказательство. От противного, пусть $\lim_{t\to\infty} S_t \neq 0$. Тогда $S_t > 0$, откуда следует, что $\lambda_t = \lambda$. Согласно условию трансверсальности (6) находим, что $\lambda = 0$.

Из условия (1) находим $u'(x_t) \le c_g < c_z < c_l$. В силу (2) и (3) имеем $z_t = l_t = 0$, т.е. потребности удовлетворяются лишь за счет подземных вод. Кроме того, поскольку $u'(x_t) < c_z < u'(g/\alpha)$, то $x_t > g/\alpha > g$. Это означает, что спрос не может быть удовлетворен за счет пополнения подземных вод, т.е. запас будет исчерпан полностью. ■

Покажем, что динамика запаса отработанных вод непосредственно связана с величиной запаса подземных вод, а именно положительный запас последних в течение некоторого периода не совместим с нулевым запасом отработанных вод.

Утверждение 3. *Не существует интервала ненулевой длины, в течение которого запас подземных вод положителен, а запас отработанных вод равен нулю.*

Доказательство. От противного, пусть на некотором интервале $S_t > 0$ и $Z_t = 0$. Для того чтобы в течение некоторого времени запас отработанной воды был равен нулю, использованная вода должна непрерывно очищаться и снова поступать в оборот, т.е. $\dot{Z}_t = Z_t = 0$, откуда следует, что $(1-\alpha)g_t = \alpha z_t > 0$. Так как $g_t > 0$ и $z_t > 0$, то из условий (1) и (3) находим, что $c_z - c_g = (\lambda_t - \phi_t)e^{rt}$. Заметим, что при положительном запасе подземных вод их теневая оценка λ остается неизменной в соответствии с условием (4). Тогда, дифференцируя по t полученное соотношение, находим $r(\lambda_t - \phi_t)e^{rt} - \dot{\phi}_t e^{rt} = 0$, т.е. $\dot{\phi}_t = r(\lambda - \phi_t) = r(c_z - c_g)e^{-rt} > 0$, что противоречит условию (5), поскольку при $Z_t = 0$ оценка запаса отработанной воды не может расти. Таким образом, этот случай не может иметь место. ■

Убедимся, что подземные воды будут использоваться в каждый момент времени, поскольку являются самым дешевым из имеющихся ресурсов.

Утверждение 4. *В каждый момент времени водозабор из подземных источников положителен.*

Доказательство. От противного, пусть на некотором интервале (t_0, t_1) подземные воды не используются, т.е. $g_t = 0$. Поскольку каждый момент времени запас подземных вод пополняется, то на рассматриваемом интервале $S_t > 0$. Однако согласно утверждению 2 запас подземных вод должен быть истощен. Это означает, что существует момент $t_1 > t_0$ такой, что $g_{t_1} > 0$, откуда в силу условия (1) имеем $u'(x_{t_1}) = c_g + \lambda_{t_1}e^{rt_1} - (1-\alpha)\phi_{t_1}e^{rt_1}$.

Поскольку $g_t = 0$, а водопотребление должно быть положительно в каждый момент времени, то либо $l_t > 0$, либо $z_t > 0$.

Начнем со случая $l_t > 0$. Согласно условиям (1) и (2) имеем $u'(x_{t_1}) = c_l - \phi_t(1-\alpha)e^{rt} \le c_g + \lambda_t e^{rt} - (1-\alpha)\phi_t e^{rt}$, откуда $c_l - c_g \le \lambda_t e^{rt}$.

Однако $u'(x_{t_1}) = c_g + \lambda_{t_1}e^{rt_1} - (1-\alpha)\phi_{t_1}e^{rt_1} \le c_l - (1-\alpha)\phi_{t_1}e^{rt_1}$, поэтому $c_l - c_g \ge \lambda_{t_1}e^{rt_1}$. Таким образом, заключаем, что $\lambda_t e^{rt} \ge \lambda_{t_1}e^{rt_1}$, что возможно лишь при $\lambda_t > \lambda_{t_1}$. Последнее неравенство согласно условию (4) может иметь место лишь при истощении запаса подземных вод, так как в противном случае их оценка не меняется со временем. Однако на рассматриваемом интервале запас подземных вод положителен, так как водозабор равен нулю, а при этом в каждый момент времени происходит естественное пополнение на величину g. Таким образом, приходим к противоречию.

Теперь обратимся к случаю $z_t > 0$. Согласно условиям (1) и (3) имеем $u'(x_t) = c_z + \alpha\phi_t e^{rt} \le c_g + \lambda_t e^{rt} - (1-\alpha)\phi_t e^{rt}$, откуда $c_z - c_g \le (\lambda_t - \phi_t)e^{rt}$. Но $u'(x_{t_1}) = c_g + \lambda_{t_1}e^{rt_1} - (1-\alpha)\phi_{t_1}e^{rt_1} \le c_z + \alpha\phi_{t_1}e^{rt_1}$, откуда $c_z - c_g \ge (\lambda_{t_1} - \phi_{t_1})e^{rt_1}$. Поэтому $(\lambda_t - \phi_t)e^{rt} \ge (\lambda_{t_1} - \phi_{t_1})e^{rt_1}$, а это влечет $\lambda_t - \phi_t > \lambda_{t_1} - \phi_{t_1}$. Поскольку на рассматриваемом интервале запас подземных вод положителен, то $\lambda_t = \lambda_{t_1} = \lambda$, тогда $\phi_t < \phi_{t_1}$. Согласно условию (5) возрастание ϕ возможно лишь при сдерживающем ограничении на мощности, т.е. при $Z_t = \bar{Z}$. Для того чтобы на некотором временном интервале ограничение на мощности было сдерживающим, требуется, чтобы $\dot{Z}_t = 0$, т.е. $z_t = (g_t + l_t)/\alpha$. Поскольку на рассматриваемом интервале $g_t = 0$, то $z_t = l_t/\alpha$. Следовательно, $l_t > 0$, так как в противном случае совокупное водопотребление равно нулю. Однако, как было показано выше, случай $l_t > 0$ невозможен. ■

Покажем, что если пополняемый запас подземных вод недостаточен для удовлетворения потребностей (т.е. $u'(g) > c_l$), то при наличии запаса отработанных вод и отсутствии запаса более дешевых подземных вод на любом временном интервале будет использоваться технология оборотного водоснабжения.

Утверждение 5. *Пусть $u'(\bar{g}) > c_l$ и в течение некоторого временного интервала $Z_t > 0$ и $S_t = 0$, тогда $z_t > 0$.*

Доказательство. От противного, пусть в течение некоторого периода $z_t = 0$. Поскольку согласно утверждению 1 запас отработанных вод должен быть исчерпан полностью, то существует момент $t + k > t$ – такой, что $z_{t+k} > 0$. Тогда согласно (3) с учетом неубывания ϕ в силу условия (5) имеем $u'(x_{t+k}) = c_z + \alpha\phi_{t+k}e^{r(t+k)} > C_z + \alpha\phi_t e^{rt} \geq u'(x_t)$.

Так как $x_t > 0$ и $z_t = 0$, то $g_t + l_t > 0$. Покажем, что $l_t > 0$. Действительно, при $l_t = 0$ имеем $x_t = g_t$. Тогда $u'(g_t) = c_g + \lambda_t e^{rt} - (1-\alpha)\phi_t e^{rt} \leq c_l - (1-\alpha)\phi_t e^{rt} \leq c_l$, откуда следует, что $u'(g_t) \leq c_l < u'(\bar{g})$. Последнее неравенство с учетом убывания предельной полезности влечет $g_t > \bar{g}$, что невозможно из-за отсутствия запаса подземных вод. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения. ■

Убедимся теперь в том, что при наличии запаса более дешевого ресурса (подземных или отработанных вод) не будет использоваться более дорогой альтернативный природный источник.

Утверждение 6. *Пусть $u'(g) > c_l$. Если $S_t > 0$ и/или $Z_t > 0$, то $l_t = 0$.*

Доказательство. От противного, пусть на некотором интервале $l_t > 0$, тогда согласно (2) имеем $u'(x_t) = c_t - \phi_t(1-\alpha)e^{rt}$. Поскольку $g_t > 0$ в силу утверждения 4, то из (1) следует, что $u'(x_t) = c_g + (\lambda_t - \phi_t(1-\alpha))e^{rt}$, откуда $\lambda_t = (c_l - c_g)e^{-rt}$, т.е. оценка подземных вод снижается со временем.

Если $S_t > 0$, то согласно условию (4) λ является константой, что противоречит полученному условию. Таким образом, пока запас подземных вод не истощен, агент не будет одновременно использовать подземные воды и альтернативный источник.

Рассмотрим случай, когда $S_t = 0$, но $Z_t = 0$. Тогда $z_t > 0$ согласно утверждению 5, что в соответствии с условием (3) влечет $u'(x_t) = c_z + \alpha\phi_t e^{rt}$. Принимая во внимание условие (1), получим $(\lambda_t - \phi_t)e^{rt} = (c_l - c_z)$. Подставляя полученное выше выражение для λ_t, находим $\phi_t e^{rt} = (c_z - c_g)$. Поскольку $Z_t > 0$, то согласно (5) ϕ_t не убывает. Это означает, что левая часть растет, в то время как правая является константой, откуда получаем противоречие. ■

Если в экономике имеется положительный запас подземных вод и запас отработанных вод ниже максимального предела, то, как будет показано ниже, потребности в воде будут удовлетворяться за счет более дешевого ресурса. Заметим, что условие относительно неэффективности ограничения на запас отработанных вод существенно, так как при достижении верхнего предела дальнейшее пополнение резервуара невозможно, что вынуждает наряду с подземными водами использовать технологию оборотного водоснабжения.

Утверждение 7. *Если $S_t > 0$ и $0 < Z_t < \bar{Z}$, то не существует интервала времени, в течение которого $z_t > 0$.*

Доказательство. От противного, пусть на некотором интервале $z_t > 0$. Поскольку согласно утверждению 4 имеем $g_t > 0$, то из условий (1) и (3) следует, что $c_z - c_g = (\lambda_t - \phi_t)e^{rt}$, причем в силу положительности запаса подземных вод $\lambda_t = \lambda$. Кроме того, поскольку $0 < Z_t < \bar{Z}$, то согласно (5) имеем $\phi_t = \phi$. В результате левая часть равенства является константой, а правая растет со временем, что невозможно. ■

АНАЛИЗ СИТУАЦИИ ПРИ НЕСДЕРЖИВАЮЩЕМ ОГРАНИЧЕНИИ НА МОЩНОСТИ

В начальный момент времени запас подземных вод положителен, а запас отработанной воды равен нулю. Однако, как следует из утверждения 3, подобная ситуация может иметь место только в какой-то один момент времени. Это означает, что использование подземных вод приведет к образованию положительного запаса отработанной воды, как показано на рис. 1. Итак, на начальном этапе $S_t > 0$ и $Z_t > 0$. Тогда согласно утверждению 6 поверхностные воды не будут задействованы вплоть до момента полного исчерпания обоих запасов. В соответствии

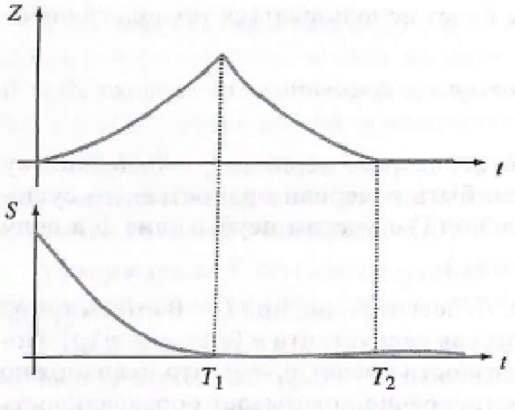

Рис. 1. Динамика запасов отработанных и подземных вод при несдерживающем ограничении на мощности

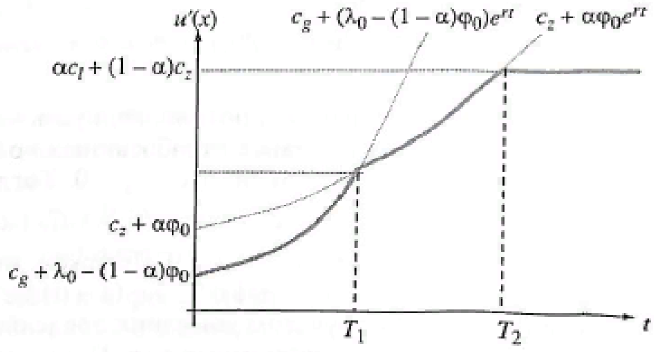

Рис. 2. Траектория предельной полезности водопотребления при большой мощности технологии оборотного водоснабжения

с утверждением 7 отработанные воды не будут эксплуатироваться вплоть до момента полного исчерпания подземных вод.

Пусть исчерпание подземных вод наступит в момент T_1. Тогда на интервале от 0 до T_1 имеем $z_t = l_t = 0$, $x_t = g_t$ и $u'(x_t) = c_g + (\lambda_0 - \phi_0(1-\alpha))e^{rt}$. Поскольку предельная полезность растет со временем (рис. 2) и является убывающей функцией водопотребления, то объем потребляемой воды снижается. Момент времени T_1 определяется условием $\int\limits_0^{T_1}(g_t - \bar{g})dt = S_0$.

К моменту T_1 запас отработанной воды составит $\int\limits_0^{T_1}(1-\alpha)g_t dt = Z_{t_1}$. С учетом полного исчерпания запаса подземных вод это условие можно переписать как $Z_{T_1} = (1-\alpha)(S_0 + \bar{g}T_1)$.

Далее мы имеем дело с нулевым запасом подземных вод и положительным запасом отработанной воды, что согласно утверждениям 4–6 означает, что до полного исчерпания запаса отработанной воды $z_t > 0$, $g_t > 0$ и $l_t = 0$. Поскольку запас подземных вод исчерпан, то водозабор из подземных источников ограничен величиной пополнения $\bar{g}$. Обозначим момент полного истощения запаса отработанных вод через T_2. Тогда на интервале от T_1 до T_2 в силу положительности z и g условия (1) и (3) влекут $\lambda_t = \phi_0 + (c_z - c_g)e^{-rt}$, причем в силу непрерывности водопотребления $\lambda_{T_1} = \lambda_0$. Кроме того, на рассматриваемом интервале $u'(x_t) = c_z + \alpha\phi_0 e^{rt}$, где $x_t = g + z_t$. Момент T_2 находится из условия $Z_{T_1} + \int\limits_{T_1}^{T_2}(1-\alpha)(\bar{g} + z_t)dt = \int\limits_{T_1}^{T_2} z_t dt$, что с учетом определения Z_{T_1} может быть переписано в виде $\int\limits_{T_1}^{T_2}(\alpha z_t - (1-\alpha)\bar{g})dt = (1-\alpha)(S_0 + \bar{g}T_1)$.

После истощения запасов потребности будут удовлетворяться за счет пополнения подземных вод, их переработки и использования альтернативного природного источника. Это означает, что после момента T_2 совокупное водопотребление составит $x = \bar{g} + l + (1-\alpha)(\bar{g} + l)/\alpha = (\bar{g} + l)/\alpha$. Из условий (1)–(3) находим, что $\phi_t e^{rt} = (c_l - c_z)$, $\lambda_t e^{rt} = (c_l - c_g)$ и $u'(x) = (1-\alpha)c_z + \alpha c_l$. Заметим, что в силу непрерывности $\phi_{T_2} = \phi_0$.

Таким образом, вдоль эффективной траектории предельная выгода текущего водопотребления равна:

$$u'(x_t) = \min\{c_g + (\lambda_0 - \phi_0(1-\alpha))e^{rt},\ c_z + \alpha\phi_0 e^{rt},\ (1-\alpha)c_z + \alpha c_l\}.$$

Выражение, стоящее в правой части, можно назвать предельными издержками общества.

Рассмотрим подробнее детерминанты этих издержек. Итак, на интервале от 0 до T_1 имеем $u'(x_t) = c_g + \lambda_0 e^{rt} - \phi_0(1-\alpha)e^{rt}$. Первые два слагаемые стандартны для модели с истощаемым ресурсом: они отражают предельные издержки водоснабжения для используемого источника и увеличивающуюся редкость подземных вод, что отражает рента, растущая темпом r. Появление третьего слагаемого вызвано тем, что отработанная вода обладает остаточной ценностью, так как может быть задействована повторно после соответствующей обработки.

Таким образом, в данном случае предельная выгода от текущего водопотребления отличается от ценности последней единицы ресурса, забранной из природного источника, так как последняя помимо $u'(x_t)$ включает и дополнительную выгоду в виде остаточной ценности отработанной воды, равную $(1-\alpha)\phi_0 e^{rt}$. Коэффициент $(1-\alpha)$ отражает тот факт, что лишь не утилизированная в процессе потребления часть воды $(1-\alpha)$ доступна для использования в технологии оборотного водоснабжения.

На втором интервале от T_1 до T_2 запас подземных вод исчерпан, а потому меняется величина предельных издержек общества: $u'(x_t) = c_z + \alpha\phi_0 e^{rt}$. Вместо предельных издержек для природного источника мы видим предельные издержки технологии оборотного водоснабжения. Второе слагаемое отражает ренту: каждая забранная единица истощает запас отработанных вод, но лишь частично, так как не вся вода утилизируется в процессе производства, а лишь некая доля, что и отражает коэффициент перед теневой оценкой ресурса ϕ. В соответствии с правилом Хотеллинга рента растет с темпом r.

Наконец на последнем интервале, после момента T_2, мы имеем дело со стационарным состоянием, где спрос удовлетворяется за счет пополняемого запаса подземных вод, опресняемых морских вод и технологии оборотного водоснабжения. Поскольку запасы ресурсов равны нулю, то рентная составляющая отсутствует, а потому предельные издержки общества равны средневзвешенной величине предельных издержек поверхностных вод и технологии оборотного водоснабжения. Веса отражают тот факт, что лишь доля $(1-\alpha)$ из единицы вод, забранных из природных источников, доступна для оборотного водоснабжения, а доля α утилизируется в процессе потребления.

АНАЛИЗ СИТУАЦИИ ПРИ СДЕРЖИВАЮЩЕМ ОГРАНИЧЕНИИ НА МОЩНОСТИ

Как показано на рис. 1 в предыдущем случае, запас отработанный воды рос в период истощения подземных вод от 0 до T_1 и достигал максимального значения в момент T_1. Если $\bar{Z}$ меньше величины Z_{T_1}, то в какой-то момент времени $\bar{T}$ ограничение по мощности окажется сдерживающим (рис. 3). Если мощность резервуара $\bar{Z}$ очень мала, то он почти сразу заполняется (т.е. на рис. 3 момент $\bar{T}$ близок к начальному), и, кроме того, период истощения запаса отработанных вод от T_1 до T_2 оказывается очень коротким: фактически экономика почти сразу после истощения подземных вод переходит в стационарный режим.

Момент выхода на ограничение по мощности для технологии оборотного водоснабжения определяется из условия $\int_0^{\bar{T}} (1-\alpha)g_t\,dt = Z_{\bar{T}} = \bar{Z}$, где g_t – решение уравнения $u'(g_t) = c_g + (\lambda_0 - \phi_0(1-\alpha))e^{rt}$.

Согласно утверждениям (4) и (6) в каждый момент времени будут потребляться подземные воды, но останутся незадействованными поверхностные воды. При эффективном ограничении на мощности будет иметь место одновременное использование подземных вод и технологии оборотного водоснабжения. Действительно, если бы это было не так, то продолжение забора подземных вод приводило бы к пополнению запасов отработанных вод, что превысило бы до-

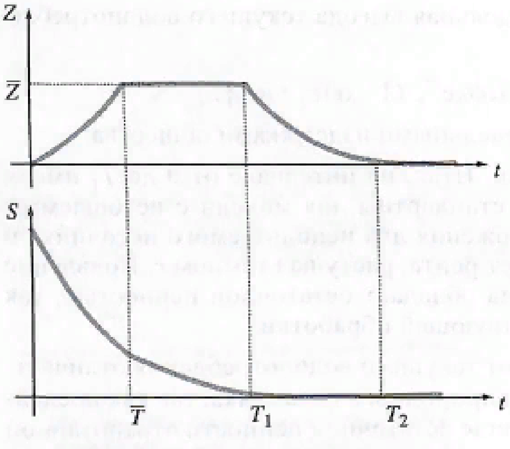

Рис. 3. Динамика запасов отработанных и подземных вод при сдерживающем ограничении на мощности

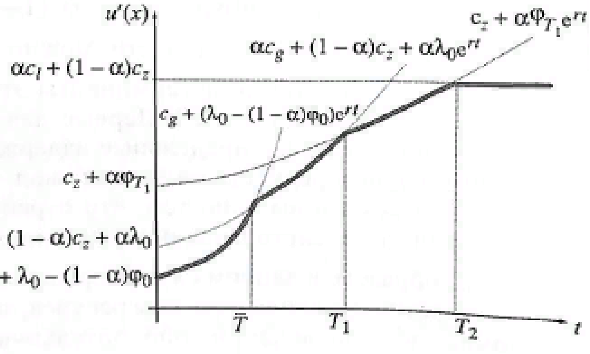

Рис. 4. Траектория предельной полезности водопотребления при малой мощности технологии оборотного водоснабжения

ступный размер мощностей. Поскольку $g_t > 0$ и $z_t > 0$, то из условий (1) и (3) находим, что теневая оценка отработанных вод будет расти со временем $\phi_t = \lambda_0 - (c_z - c_g)e^{-rt}$, причем в силу непрерывности траектории совокупного водопотребления $\phi_{\bar{T}} = \phi_0$.

Рассмотрим период от момента выхода на ограничение по мощности до момента истощения подземных вод, который, как и ранее, обозначим через T_1. Поскольку на протяжении этого периода ограничение по мощности является сдерживающим, то $Z_t = \bar{Z}$, откуда следует, что $\dot{Z} = 0$. Подставляя в ограничение по динамике отработанных вод, находим $z_t = (1-\alpha)g_t/\alpha$ и $x_t = g_t + z_t = g_t/\alpha$. При этом объем водопотребления x_t получается из решения уравнения (3), которое после подстановки найденного выше выражения для ϕ_t примет вид $u'(x_t) = (1-\alpha)c_z + \alpha(c_g + \lambda_0 e^{rt})$.

Так как к моменту T_1 произойдет истощение подземных вод, то $\int\limits_0^{\bar{T}}(g_t - \bar{g})dt + \int\limits_{\bar{T}}^{T_1}(g_t - \bar{g})dt = S_0$,

что с учетом полученного выше условия $\int\limits_0^{\bar{T}} g_t dt = \bar{Z}/(1-\alpha)$ можно переписать в виде

$$\int\limits_{\bar{T}}^{T_1}(g_t - \bar{g})dt - \bar{g}\bar{T} = S_0 - \bar{Z}/(1-\alpha).$$

Далее потребности в воде будут удовлетворяться за счет пополнения подземных вод и истощения запаса отработанных вод. Поскольку ограничение по мощности более не является сдерживающим, то теневая оценка запаса отработанных вод стабилизируется на значении, достигнутом в момент T_1, и не будет меняться вплоть до момента полного истощения этого запаса, который обозначим как T_2: $\phi_t = \phi_{T_1} = \lambda_0 - (c_z - c_g)e^{-rT_1}$ для всех $t \in [T_1, T_2]$. На этом интервале $x_t = \bar{g} + z_t$, причем $u'(\bar{g} + z_t) = cz + \alpha\phi_{T_1}e^{rt}$.

Вследствие полного истощения запаса подземных вод теневая оценка запаса более не является постоянной. Из условий (1) и (3) находим, что оценка запаса подземных вод будет падать со временем: $\lambda_t = (c_z - c_g)e^{-rt} + \phi_{T_1}$. Поскольку в момент T_2 происходит полное истощение запаса Z, то $\int\limits_{T_1}^{T_2}(z_t - (1-\alpha)(\bar{g} + z_t))dt = \bar{Z}$, что можно переписать в виде $\int\limits_{T_1}^{T_2}(\alpha z_t - (1-\alpha)\bar{g})dt = \bar{Z}$.

Начиная с момента T_2, спрос на воду удовлетворяется за счет пополняемых подземных вод, воды из альтернативного природного источника и их переработки. При этом совокупное водопотребление составит $x = g + l + (1 - \alpha)(g + l)/\alpha = (g + l)/\alpha$, где x – решение уравнения $u'(x) = (1 - \alpha)c_z + \alpha c_l$. При этом теневые оценки запасов падают таким образом, что их приведенная стоимость остается неизменной $\phi_t e^{rt} = (c_l - c_z)$ и $\lambda_t e^{rt} = (c_l - c_g)$. Непрерывность траектории совокупного водопотребления требует, чтобы $\phi_{T_2} = (c_l - c_z)e^{-rT_2} = \phi_{T_1} = \lambda_0 + (c_g - c_z)e^{-rT_1}$ и $\lambda_{T_1} = \lambda_{T_2}$.

Результирующая траектория предельной выгоды водопотребления изображена на рис. 4.

Заметим, что принципиальным отличием от траектории, изображенной на рис. 2, в данном случае является второй участок, т.е. интервал от $\overline{T}$ до T_1, где $u'(x_t) = (1 - \alpha)c_z + \alpha(c_g + \lambda_0 e^{rt})$. На этом интервале ограничение по мощности будет сдерживающим, что влечет одновременное использование как дешевых подземных вод, так и более дорогой технологии оборотного водоснабжения. В результате предельные издержки общества отражают средневзвешенные альтернативные издержки этих источников водоснабжения. Первая компонента соответствует предельным издержкам оборотного водоснабжения с учетом того, что из единицы использованной воды лишь доля $(1 - \alpha)$ доступна для оборотного водоснабжения. Второе слагаемое отражает предельные издержки и ренту для подземных вод, взятые с коэффициентом α, который соответствует безвозвратному водопотреблению.

АНАЛИЗ СРАВНИТЕЛЬНОЙ СТАТИКИ

Как мы видели, эффективные траектории определяются рядом экзогенных параметров, таких как предельные издержки водоснабжения для разных природных источников, предельные издержки и мощности технологии оборотного водоснабжения, запас воды в истощаемом источнике и уровень его естественного пополнения. Рассмотрим чувствительность эффективной траектории водопотребления к нескольким параметрам из приведенного выше списка.

Заметим, что сама эффективная траектория несколько различается в зависимости от того, является ли сдерживающим ограничение на мощность технологии оборотного водоснабжения. Однако случай сдерживающего ограничения представляется наиболее интересным, так как траектория для несдерживающего ограничения по мощности фактически – это лишь частный случай при $\overline{T} = T_1$. Итак, при сдерживающем ограничении по мощности эффективная траектория описывается условиями:

$$u'(g_t) = c_g + (\lambda_0 - \phi_0(1 - \alpha))e^{rt}, \quad t \in [0, \overline{T}] \tag{8}$$

$$u'(g_t/\alpha) = (1 - \alpha)c_z + \alpha(c_g + \lambda_0 e^{rt}), \quad t \in [\overline{T}, T_1], \tag{9}$$

$$u'(g + z_t) = c_z + \alpha\phi_{T_1} e^{rt}, \quad t \in [T_1, T_2], \tag{10}$$

$$(\lambda_0 - \phi_0)e^{r\overline{T}} = c_z - c_g, \tag{11}$$

$$(\lambda_0 - \phi_{T_1})e^{rT_1} = c_z - c_g, \tag{12}$$

$$\phi_{T_1} e^{rT_2} = c_l - c_z, \tag{13}$$

$$\int_0^{\overline{T}} g_t\,dt = \overline{Z}/(1 - \alpha), \tag{14}$$

$$\int_{\overline{T}}^{T_1} g_t\,dt = S_0 + \bar{g}T_1 - \overline{Z}/(1 - \alpha), \tag{15}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} (\alpha z_t - (1 - \alpha)\bar{g})\,dt = \overline{Z}. \tag{16}$$

Рассмотрим изменение трех параметров: предельных издержек альтернативного источника, запаса подземных вод и уровня их естественного пополнения. Удорожание ресурса-заменителя (т.е. рост c_l) повышает ценность запаса подземных вод, а потому на первый взгляд должно оказывать такое же влияние на эффективную траекторию водопотребления, как и снижение запаса подземных вод или сокращение уровня пополнения этого запаса. Как будет показано ниже, действительно все три изменения влекут повышение теневой оценки истощаемого ресурса. Это означает, что предельные издержки общества возрастают и снижается интенсивность эксплуатации подземных вод.

Утверждение 8. *Если* $\Delta c_l \geq 0$, $\Delta S_0 \leq 0$ *и* $\Delta g \leq 0$, *причем хотя бы одно неравенство строгое, то* $\Delta g_t < 0$ *для всех* $t \in [0, \overline{T}]$.

Доказательство. Сначала покажем, что указанные в утверждении изменения снижают водопотребление в начальный момент времени, т.е. $\Delta g_0 < 0$. От противного, пусть $\Delta g_0 \geq 0$, тогда согласно (8) с учетом убывания предельной полезности имеем $\Delta\lambda_0 - (1-\alpha)\Delta\phi_0 \leq 0$, что влечет $\Delta g_t \geq 0$ для всех $t \in [0, \overline{T}]$. Эти неравенства совместны с равенством (14) только при $\Delta\overline{T} \leq 0$, что с учетом (11) требует $\Delta\lambda_0 \geq \Delta\phi_0$. Таким образом, $\Delta\phi_0 \leq \Delta\lambda_0 \leq (1-\alpha)\Delta\phi_0$, откуда заключаем, что $\Delta\phi_0 \leq 0$ и $\Delta\lambda_0 \leq 0$.

При $\Delta\lambda_0 \leq 0$ в силу убывания $u'(\cdot)$ из (9) находим, что $\Delta g_t \geq 0$ для всех $t \in [\overline{T}, T_1]$. Покажем, что $\Delta T_1 \leq 0$. Если бы это было не так и $\Delta T_1 > 0$, тогда левая часть (15) возросла бы при неизменной или меньшей правой части, что невозможно. В случае $\Delta S_0 < 0$ или $\Delta g < 0$ можно утверждать, что $\Delta T_1 < 0$. Поскольку при неизменном T_1 левая часть (15) не возрастает, а правая – растет, то получаем противоречие.

Поскольку $\Delta T_1 \leq 0$ ($\Delta T_1 < 0$ при $\Delta S_0 < 0$ или $\Delta g < 0$) и $\Delta\lambda_0 \leq 0$, то из (12) следует, что $\Delta\phi_{T_1} \leq 0$, причем неравенство строгое, если $\Delta S_0 < 0$ или $\Delta g < 0$.

Полученный результат для изменения ϕ_{T_1} в силу (10) с учетом убывания предельной полезности означает, что $\Delta g + \Delta z_t \geq 0$ для всех $t \in [T_1, T_2]$, причем неравенства строгие, если $\Delta S_0 < 0$ или $\Delta g < 0$.

А так как $\Delta\phi_{T_1} \leq 0$ и $\Delta\phi_{T_1} < 0$ при $\Delta S_0 < 0$ и/или $\Delta g < 0$, то условие (13) с учетом $\Delta c_l \geq 0$ влечет $\Delta T_2 > 0$. Таким образом, имеем $\Delta T_1 \leq 0$, $\Delta T_2 > 0$ и при этом $\Delta g + \Delta z_t \geq 0$, что означает увеличение левой части (16) при неизменной правой части, т.е. полученные неравенства несовместны с равенством (16). Мы пришли к противоречию, которое означает, что $\Delta g_0 < 0$.

Снижение водопотребления в начальный момент времени влечет рост предельной полезности, что согласно условию (8) требует $\Delta\lambda_0 - (1-\alpha)\Delta\phi_0 > 0$. Таким образом, заключаем, что правая часть равенства (8) растет для любого $t \in [0, \overline{T}]$, откуда следует, что $\Delta g_t < 0$ для всех $t \in [0, \overline{T}]$. ■

Теперь обратимся к анализу второго участка эффективной траектории и покажем, что в силу снижения водопотребления на начальном этапе медленнее пополняется запас отработанной воды, что отдаляет начало использования технологии оборотного водоснабжения. При этом уровень водопотребления на интервале от $\overline{T}$ до T_1 также снижается.

Утверждение 9. *Если* $\Delta c_l \geq 0$, $\Delta S_0 \leq 0$ *и* $\Delta g \leq 0$, *причем хотя бы одно неравенство строгое, то* $\Delta\overline{T} > 0$ *и* $\Delta x_t = \Delta g/\alpha < 0$ *для всех* $t \in [\overline{T}, T_1]$.

Доказательство. Согласно утверждению (8) имеем $\Delta g_t < 0$ для всех $t \in [0, \overline{T}]$. Тогда равенство (14) влечет $\Delta\overline{T} > 0$, т.е. выгодно отсрочить использование технологии оборотного водоснабжения.

Покажем, что объем водопотребления на интервале от $\overline{T}$ до T_1 окажется ниже, чем на первоначальной траектории. Согласно условию (9) снижение водопотребления на этом интервале (при неизменных предельных издержках c_z и c_g) может быть вызвано лишь ростом теневой оценки запаса подземных вод, т.е. покажем, что $\Delta\lambda_0 > 0$.

Из условия (11) с учетом $\Delta\overline{T} > 0$ следует, что $\Delta\lambda_0 < \Delta\phi_0$. Кроме того, как было показано при доказательстве утверждения (9), имеет место неравенство $\Delta\lambda_0 - (1-\alpha)\Delta\phi_0 > 0$, откуда заключаем, что $0 < \Delta\lambda_0 < \Delta\phi_0$. Поскольку теневая оценка ресурса растет, то согласно (9) это влечет падение водопотребления, т.е. $\Delta x_t = \Delta g_t/\alpha < 0$ для всех $t \in [\overline{T}, T_1]$. ■

Наконец рассмотрим третий участок траектории от момента истощения подземных вод T_1 до момента истощения запаса отработанных вод T_2. На этом интервале потребности в воде удовлетворяются за счет пополняемого запаса подземных вод и истощения запаса отработанных вод. Покажем, что во всех рассматриваемых ситуациях будет наблюдаться повышение не только теневой оценки подземных вод, но вместе с ней возрастет и ценность истощаемого ресурса-заменителя (т.е. запаса отработанных вод), что приведет к снижению совокупного водопотребления при использовании технологии оборотного водоснабжения.

Утверждение 10. *Если* $\Delta c_l \geq 0$, $\Delta S_0 \leq 0$ *и* $\Delta \bar{g} \leq 0$, *причем хотя бы одно неравенство строгое, то* $\Delta \phi_{T_1} > 0$ *и* $\Delta x_t = \Delta \bar{g} + \Delta z_t < 0$ *для всех* $t \in [T_1, T_2]$.

Доказательство. Покажем, что $\Delta \phi_{T_1} > 0$. От противного, пусть $\Delta \phi_{T_1} \leq 0$, тогда из (10) следует, что $\Delta z_t + \Delta \bar{g} \geq 0$ для всех $t \in [T_1, T_2]$.

Как показано при доказательстве утверждения 9, $\Delta \lambda_0 > 0$. Тогда с учетом $\Delta \phi_{T_1} \leq 0$ получаем $\Delta \lambda_0 - \Delta \phi_{T_1} > 0$. В результате из условия (12) находим, что $\Delta T_1 < 0$.

Так как $\Delta z_t + \Delta g \geq 0$, то $\alpha \Delta z_t - (1-\alpha)\Delta g = \alpha(\Delta z_t + \Delta g) - \Delta g \ \geq 0$ при $\Delta g \leq 0$. Тогда с учетом $\Delta T_1 < 0$ заключаем, что равенство (16) может иметь место лишь при $\Delta T_2 < 0$. Таким образом, $\Delta \phi_{T_1} \leq 0$ и $\Delta T_2 < 0$, т.е. левая часть (13) падает, в то время как правая не убывает. Тем самым мы получили противоречие. Это означает, что $\Delta \phi_{T_1} > 0$.

Поскольку $\Delta \phi_{T_1} > 0$, то в соответствии с условием (10) заключаем, что $\Delta x_t = \Delta g + \Delta z_t < 0$ для всех $t \in [T_1, T_2]$. ■

Однако, несмотря на идентичное влияние рассматриваемых изменений на уровень водопотребления, мы будем наблюдать разные тенденции относительно изменения момента истощения запасов подземных и отработанных вод. При повышении предельных издержек альтернативного природного источника и в случае снижения запаса подземных вод истощение запаса подземных вод наступит позже. В случае снижения естественного пополнения подземных вод нельзя сделать однозначного вывода относительно изменения момента T_1, поскольку при сокращении совокупного водопотребления снижается и уровень используемых подземных вод, что не позволяет однозначно установить, как изменяется интенсивность использования технологии оборотного водоснабжения в каждый момент времени.

При этом можно однозначно утверждать, что снижение запаса подземных вод или интенсивности его пополнения приведет к более раннему переключению на использование альтернативного неистощаемого ресурса-заменителя, т.е. T_2 уменьшится. В то время как повышение предельных издержек производства заменителя (т.е. рост c_l), напротив, отсрочит момент переключения на этот ресурс.

Утверждение 11. *Если* $\Delta c_l > 0$ *и* $\Delta S_0 = \Delta \bar{g} = 0$, *то* $\Delta T_1 > 0$ *и* $\Delta T_2 > 0$.

Если $\Delta c_l = 0$, $\Delta S_0 \leq 0$ *и* $\Delta g \leq 0$, *причем хотя бы одно неравенство строгое, то* $\Delta T_2 > 0$.

Если $\Delta c_l = \Delta \bar{g} = 0$ *и* $\Delta S_0 < 0$, *то* $\Delta T_1 > 0$.

Доказательство. Начнем со случая изменения предельных издержек. Пусть $\Delta \bar{g} = 0$, $\Delta S_0 = 0$ и $\Delta c_l > 0$. Покажем, что $\Delta T_1 > 0$. Пусть это не так и $\Delta T_1 \leq 0$. Согласно утверждению 9 имеем $\Delta g_t < 0$ для всех $t \in [0, \bar{T}]$ и $\Delta \bar{T} > 0$, тогда при $\Delta T_1 \leq 0$ левая часть (15) падает, а правая – не убывает, т.е. условие (15) не выполняется. Это означает, что $\Delta T_1 > 0$. Поскольку $\Delta T_1 > 0$ и $\Delta x_t = \Delta g + \Delta z_t = \Delta z_t < 0$ для всех $t \in [T_1, T_2]$, то из (16) заключаем, что $\Delta T_2 > 0$.

Обратимся к случаю неизменных предельных издержек. Если $\Delta c_l = 0$, то изменение момента T_2 можно найти из условия (13). Поскольку $\Delta \phi_{T_1} > 0$ и правая часть (13) не меняется, то $\Delta T_2 < 0$.

Если, кроме того, $\Delta g = 0$, то из условия (16) следует, что $\Delta T_1 > 0$. Действительно, при $\Delta g = 0$ имеем $\alpha \Delta z_t - (1-\alpha)\Delta g = \alpha \Delta z_t < 0$. Тогда с учетом $\Delta T_2 < 0$ левая часть (16) будет падать, если $\Delta T_1 \leq 0$, в то время как правая часть остается неизменной. Полученное противоречие доказывает, что $\Delta T_1 > 0$.■

Рассматриваемые изменения окажут неодинаковое влияние на стационарное состояние. Уровень водопотребления в этом состоянии определяется средневзвешенными предельными издержками для поверхностных вод и технологии оборотного водоснабжения, а потому при снижении запаса или уровня пополнения подземных вод стационарный уровень водопотребления не изменится, хотя в последнем случае изменится его структура: произойдет замещение подземных вод обессоленными водами. Рост предельных издержек в отличие от предыдущих двух случаев приведет к снижению стационарного уровня водопотребления. При этом сокращение коснется объема обессоленных вод и интенсивности использования технологии оборотного водоснабжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Фридман А.А. (2009): Эффективное ценообразование на водные ресурсы при неоднородности потребителей // *Экономика и мат. методы*. Т. 45. № 4. С. 3–15.

Фридман А.А. (2010): Водосберегающая технология и эффективные тарифы // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 8. С. 35–54.

Albert J. (2001): "Unconventional Supplies" and the Water Dispute among the Riparians of the Jordan River Watershed // *J. of Contemporary Water Research and Education*. Vol. 118. № 1. P. 44–59.

Burt O.R. (1966): Economic Control of Groundwater Reserves // *J. of Farm Econ.* Vol. 48. P. 632–647.

Di Vita G. (2001): Technological Change, Growth and Waste Recycling // *Energy Econ.* Vol. 23. P. 549–567.

Di Vita G. (2006): Natural Resources Dynamics: Exhaustible And Renewable Resources, And The Rate Of Technical Substitution // *Resources Policy*. Vol. 31. № 3. P. 172–182.

Dreizin Y., Tenne A., Hoffman D. (2008): Integrating Large Scale Seawater Desalination Plants within Israel's Water Supply System // *Desalination*. Vol. 220. P. 132–149.

Friedler E. (2001): Water Reuse – an Integral Part of Water Resources Management: Israel as a Case Study // *Water Policy*. № 3. P. 29–39.

Hartwick J.M. (1993): The Generalized r% Rule for Semi-Durable Exhaustible Resources // *Resource and Energy Econ.* Vol. 15, № 3. P. 147–152.

Holland S., Moore M. (2003): Cadillac Desert Revisited: Property Rights, Public Policy, and Water-resource Depletion // *J. of Environmental Econ. and Management*. Vol. 46. P. 131–155.

Juanico M., Dor I. (eds). (1999): Reservoirs for Wastewater Storage & Reuse: Ecology, Performance & Engineering Design. Berlin: Springer, Environmental Science Series.

Levhari D., Pindyck R.S. (1981): The Pricing of Durable Exhaustible Resources // *The Quarterly J. of Econ.* Vol. 96, № 3. P. 365–378.

Maliva R.G., Missimer T.M., Winslow F.P. et al. (2011): Aquifer Storage and Recovery of Treated Sewage Effluent in the Middle East // *Arabian Journal for Science and Engineering*. Vol. 36. P.63–74.

Pindyck R.S. (1978): The Optimal Exploration and Production of Nonrenewable Resources // *J. of Political Econ.* Vol. 86. P. 841–861.

Pittel K., Amigues J.-P., Kuhn T. (2010): Recycling Under A Material Balance Constraint // *Resource and Energy Econ.* Vol. 32. № 3. P. 379–394.

Roumasset J., Wada C.A. (2011): Ordering Renewable Resources: Groundwater, Recycling, and Desalination // *The B.E. J. of Econ. Analysis & Policy*. Vol. 11. № 1 (Contributions). Article 28.

Schäfer M. (1992): Resource Extraction and Production of a Substitute // *Computers & Mathematics with Applications*. Vol. 24. № 8–9. P. 195–207.

Smith V.L. (1977): Control Theory Applied to Natural and Environmental Resources an Exposition // *J. of Environmental Econ. and Management*. Vol. 4. № 1. P. 1–24.

Tenne A. (2010): Sea Water Desalination in Israel: Planning, Coping with Difficulties, and Economic Aspects of Long-Term Risks. State of Israel Desalination Division Report. [Электронный ресурс] October 2010.

Режим доступа: http://www.water.gov.il/Hebrew/Planning-and-Development/Desalination/Documents/Desalination-in-Israel.pdf, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: 12 мая 2011 г.)

Tsur Y., Zemel A. (2000): R&D Policies for Desalination Technologies // *Agricultural Econ.* Vol. 24. № 1. P. 73–85.

Поступила в редакцию
17.09.2010 г.

Water Resources Management under Recycling

A.A. Friedman

Paper presents an optimal control model with the stocks of two resource: one is the stock of exhaustible resource (groundwater) and the other is the stock of waste water which is a by-product of water use. Waste water could be re-used but this resource has a higher marginal cost than the groundwater. The characteristics of efficient water consumption vector and dynamics of groundwater and waste water stocks are analyzed under the assumption of limited storage capacity of waste water stocks. The sensitivity of efficient vectors of exogenous parameters (groundwater stock and its refill, marginal cost of renewable substitute) is investigated.

Keywords: exhaustible resources, water resources, recycling, optimal control.