

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ И ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА ПРОДУКТА МОДЕЛЬЮ ВЕРХУЛСТА

© 2012 г. В.К. Семенычев, В.Н. Кожухова, Е.В. Семенычев

(Самара)

На тестовых выборках различного объема, в широких диапазонах сочетаний параметров модели и мощности помехи сравнивается точность известных аналитических методов идентификации модели логистической динамики Верхулста (Перла–Рида). Показано преимущество применения метода Левенберга–Марквардта для реализации метода наименьших квадратов, возможность его использования при моделировании жизненного цикла продукта типа “фетиш”.

Ключевые слова: модель Верхулста, моделирование, прогнозирование, методы идентификации, точность, метод Левенберга–Марквардта, модель жизненного цикла продукта типа “фетиш”.

Логистические тренды находят широкое применение в экономике при моделировании цен на товары, уровней спроса, емкости рынков, демографических процессов и т.д. Динамика подобных показателей является эволюционирующей: вначале следует стадия медленного роста, который затем ускоряется и снова замедляется в период зрелости, достигая затем насыщения.

При моделировании жизненного цикла продуктов обычно выделяют четыре стадии: внедрение на рынок, рост, насыщение и упадок. Одной из наиболее трудных для идентификации моделей жизненного цикла является модель “фетиш”, в которой продукт (например, новогодние товары, компьютерные игры и др.) очень быстро достигает пика популярности (продаж) и так же быстро переходит к стадии упадка. Кумулятивную (накопленную) динамику уровней таких циклов (например, продаж или спроса) отражает логистическая модель и ее обобщения.

В настоящее время известно более десяти моделей логистической динамики (Семёнычев В., Семёнычев Е., 2006, гл. 5) уровней показателя Y_k , из которых наиболее распространенной можно считать нелинейную по параметрам модель Верхулста (Перла–Рида) для тренда и с аддитивной (ее часто называют основной) структурой стохастической компоненты (помехи) ε_k :

$$Y_k = \frac{A_0}{1 + A_1 e^{-\alpha k \Delta}} + \varepsilon_k, \quad (1)$$

где A_0 , A_1 , α – параметры логистического тренда, $k = 1, \dots, N$ – номер наблюдения, N – объем выборки, Δ – период опроса (дискретизации).

В экономической практике выполнение условий Гаусса–Маркова (центрированность, гомоскедастичность, отсутствие автокорреляции, нормальный закон распределения) для ε_k в (1) считается справедливым и достаточно оправданным требованием, которое позволяет получать оптимальные (несмещенные, эффективные и состоятельные) оценки параметров тренда (Бородич, 2001, гл. 5) с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

Все известные методы идентификации модели Верхулста основываются на использовании тех или иных преобразований модели тренда, приводящих к моделям, линейным по параметрам. При этом для стохастической компоненты принимают “удобные” (для применения МНК) предположения о ее свойствах и/или о месте ее вхождения в структуру модели.

Статья посвящена актуальной, не решенной до настоящего времени задаче сравнения точности моделирования и прогнозирования известных методов идентификации модели (1) в широком диапазоне сочетаний параметров, при различной мощности помехи, а также предложению по повышению точности идентификации.

Наиболее распространенный в настоящее время метод идентификации модели (1) заключается в переходе к обратным значениям уровней ряда. При этом предполагаются “удобные” для реализации метода свойства модели: стохастическая компонента ε_k находится в знаменателе модели тренда, она мультипликативна по отношению к экспоненциальной функции и имеет логарифмически нормальное распределение. Кроме того, уровень насыщения A_0 считается априорно известным (обычно он представляет самостоятельный интерес для определения). Такую преобразованную модель ряда можно логарифмировать, а затем применить МНК к полученной парной линейной регрессии с параметрами $\ln A_1$, α и нормальным законом распределения помехи $\ln \varepsilon_k$ (Мхитарян, 2008, гл. 7):

$$Y_k = \frac{A_0}{1 + A_1 e^{-\alpha k \Delta} \varepsilon_k}, \quad \frac{A_0}{Y_k} - 1 = A_1 e^{-\alpha k \Delta} \varepsilon_k \Rightarrow \ln(A_0/Y_k - 1) = \ln A_1 - \alpha k \Delta + \ln \varepsilon_k.$$

Добавим, что МНК минимизирует в этом случае другую среднеквадратическую невязку – на логарифмах значений $\ln(A_0/Y_k - 1)$ и $\ln A_1$.

Принятие указанных свойств можно считать недостатками данного метода идентификации, ограничивающими область его применения. Поэтому перейдем к обзору и сравнению других девяти методов идентификации модели (1).

В известном *методе трех сумм* исходный ряд динамики разбивается на три равных отрезка, затем вычисляются суммы значений ряда внутри каждого отрезка и определяются разности этих сумм (Четыркин, 1977, гл. 4). Параметры модели оцениваются по следующим формулам:

$$\alpha^o = \frac{1}{m} \left(\ln \left(\frac{1}{\sum_1 Y_k} - \frac{1}{\sum_2 Y_k} \right) - \ln \left(\frac{1}{\sum_2 Y_k} - \frac{1}{\sum_3 Y_k} \right) \right),$$

$$A_0^o = m \left(\frac{1}{\sum_1 Y_k} \left(\frac{1}{\sum_1 Y_k} - \frac{1}{\sum_2 Y_k} \right)^2 / \left(\frac{1}{\sum_1 Y_k} + \frac{1}{\sum_3 Y_k} \right) \right)^{-1},$$

$$A_1^o = \left[A_0^o \left(\frac{1}{\sum_1 Y_k} - \frac{1}{\sum_2 Y_k} \right)^2 (1 - e^{-\alpha^o \Delta}) / \left(\left(\frac{1}{\sum_1 Y_k} + \frac{1}{\sum_3 Y_k} \right)^2 (1 - m e^{-\alpha^o \Delta}) \right) \right],$$

где m – длина отрезка;

Методы Фишера и *Готеллинга* предполагают исследование дифференциального уравнения логистической функции $dY/dk = Y\alpha - Y^2\alpha/A_0$. В обоих методах используются приближения для расчета производной.

В *методе Фишера* (Четыркин, 1977, гл. 4) приближенно вычисляются темпы прироста:

$$\frac{dY}{dj} \frac{1}{Y_k} \approx 0,5 \ln \frac{Y_{k+1}}{Y_{k-1}}, \quad \alpha^o, B^o = \arg \min_{\alpha, B} \sum_{k=2}^{N-1} (0,5 \ln(Y_{k+1}/Y_{k-1}) - \alpha + B Y_{k-1})^2, \quad A_0^o = \alpha^o / B^o.$$

В *методе Готеллинга* (Суслов, Ибрагимов, Талышева, 2005, гл. III, разд. 11) производная рассчитывается как разность текущего и предшествующего значений показателя Y_k : $dY/dk \approx \Delta Y/\Delta k = Y_k - Y_{k-1}$.

Данные методы, как и приведенные ниже, предполагают аддитивное “включение” в модель стохастической компоненты, отвечающей условиям Гаусса–Маркова, уже после проведения линеаризующих преобразований.

В частности, для метода Готеллинга будем иметь $\Delta Y_k = Y_k - Y_{k-1} = \alpha Y_{k-1} - Y_{k-1}^2 / A_0 + \eta_k$, где η_k – “новая” (не равная ε_k в (1)) стохастическая компонента.

Оценки параметров α , B находятся с помощью МНК:

$$\alpha^o, B^o = \arg \min_{\alpha^o, B^o} \sum_{k=2}^N (Y_k - Y_{k-1} - Y_{k-1} \alpha + B Y_{k-1}^2)^2, \quad A_0^o = \alpha^o / B^o.$$

Метод Юла сводит задачу идентификации параметров модели (1) к идентификации параметров регрессии темпов прироста $(Y_{k+1} - Y_k) / Y_k$ на Y_{k+1} :

$$(Y_{k+1} - Y_k) / Y_k = (e^{-\alpha \Delta} - 1) - Y_{k+1} (e^{-\alpha \Delta} - 1) / A_0 + \phi_k,$$

где ϕ_k – “новая” стохастическая компонента.

Нелинейно входящие в уравнение параметры заменяют линейными $e^{-\alpha \Delta} - 1 = Q$, $(e^{-\alpha \Delta} - 1) / A_0 = P$ и применяют МНК:

$$Q^o, P^o = \arg \min_{Q, P} \sum_{k=1}^{N-1} ((Y_{k+1} - Y_k) / Y_k - Q + P Y_{k+1})^2.$$

Метод Родса (Четыркин, 1977, гл. 4) основан на взятии разности между соседними обратными значениями ряда, при этом идентификация осуществляется относительно параметров $(1 - e^{-\alpha \Delta}) / A_0$ и $e^{-\alpha \Delta}$:

$$\frac{1}{Y_{k+1}} - \frac{1}{Y_k} = \frac{(1 - e^{-\alpha \Delta})}{A_0} + e^{-\alpha \Delta} \frac{1}{Y_k} + \xi_k,$$

где ξ_k – “новая” стохастическая компонента.

Метод Нейра использует регрессию разности соседних обратных значений ряда на их сумму. Решение осуществляется относительно параметров $(e^{-\alpha \Delta} - 1) / (e^{-\alpha \Delta} + 1)$ и $[(e^{-\alpha \Delta} - 1) / (e^{-\alpha \Delta} + 1)] \times (2 / A_0)$:

$$\frac{1}{Y_{k+1}} - \frac{1}{Y_k} = \frac{e^{-\alpha \Delta} - 1}{e^{-\alpha \Delta} + 1} \times \frac{2}{A_0} - \frac{e^{-\alpha \Delta} - 1}{e^{-\alpha \Delta} + 1} \times \left(\frac{1}{Y_{k+1}} + \frac{1}{Y_k} \right) + \psi_k,$$

где ψ_k – “новая” стохастическая компонента.

Все перечисленные методы предполагают последовательное вычисление оценок параметров модели: на первом этапе производится расчет оценок параметров α^o , A_0^o , на втором – оценки параметра A_1^o .

В работах (Четыркин, 1977, гл. 4; Суслов, Ибрагимов, Талышева, 2005, гл. III, разд. II) предлагается оценивать значение параметра A_1 методом моментов: $A_0 / Y_k - 1 = A_1 e^{\alpha k \Delta}$, $\ln A_1 = \alpha k \Delta + \ln(A_0 / Y_k - 1)$, а затем находить средние значения $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln A_1 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \alpha k \Delta + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln(A_0 / Y_k - 1)$. Учитывая, что $\sum_{k=1}^N k = 0,5N(N+1)$, получаем оценку

$$A_1^o = \exp \left(\frac{1}{N} \left(0,5 \alpha^o \Delta N(N+1) + \sum_{k=1}^N \ln(A_0^o / Y_k - 1) \right) \right).$$

Однако при наличии в выборке значений, превышающих найденную оценку уровня насыщения логистической кривой A_0^o , метод моментов становится неработоспособным, поскольку возникает отрицательное число под знаком логарифма. Казалось бы, оценка параметра A_1^o может быть найдена с помощью перехода к обратным значениям уровней ряда и МНК:

$$A_1^o = \arg \min_{A_1} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{Y_k} - \frac{1}{A_0^o} - A_1 \frac{e^{-\alpha^o k \Delta}}{A_0^o} \right)^2.$$

Однако нужно учесть, что в этом случае получим гетероскедастическую стохастическую компоненту:

$$Y_k = \frac{A_0}{1 + A_1 e^{-\alpha k \Delta}} + \varepsilon_k = \frac{A_0 + \varepsilon_k(1 + A_1 e^{-\alpha k \Delta})}{1 + A_1 e^{-\alpha k \Delta}},$$

$$\frac{1}{Y_k} = \frac{1 + A_1 e^{\alpha k \Delta}}{A_0 + \varepsilon_k(1 + A_1 e^{-\alpha k \Delta})} \cdot \frac{1}{Y_k} = \frac{1 + A_1 e^{-\alpha k \Delta}}{A_0} + \varphi_k, \quad \varphi_k = -\frac{\varepsilon_k(1 + A_1 e^{-\alpha k \Delta})}{A_0 Y_k}.$$

Для компенсации гетероскедастичности – уменьшения неэффективности оценок параметров модели (Бородич, 2001, гл. 5) – можно рассмотреть возможность развития в этом направлении предложенного в работе (Семёнычев В., Семёнычев Е., 2006, гл. 5) метода обобщенных параметрических моделей авторегрессии – скользящего среднего (ARMA-моделей) для модели (1).

Для реализации этого метода осуществим замену переменных модели $A_0 = 1/A_{00}$, $A_1 = A_{10}/A_{00}$, а затем с помощью прямого и обратного Z-преобразования сконструируем разностную схему (для $k \geq 3$):

$$D_k = \lambda(D_{k-1} - D_{k-2}) + D_{k-1}, \quad (2)$$

где $\lambda = e^{-\alpha \Delta}$, D_k – детерминированная часть модели, $D_k = A_{00} + A_{10}e^{-\alpha k \Delta}$.

Первый способ реализации этого метода (ARMA I) учитывает соотношение $D_k = 1/Y_k - \varphi_k$ и приводит к следующей модели авторегрессии:

$$1/Y_k = G_k = \lambda(G_{k-1} - G_{k-2}) + G_{k-1} + \theta_k, \quad \theta_k = \varphi_k - \varphi_{k-1} + \lambda(\varphi_{k-2} - \varphi_{k-1}),$$

где θ_k – гетероскедастическая стохастическая компонента.

Оценка параметра λ (и с учетом обозначений в (2) параметра α) находится с помощью взвешенного МНК для компенсации гетероскедастичности. В качестве оценок весов w_k можно использовать:

- 1) уровни ряда G_k^2 , если помехи малы по сравнению с уровнями ряда;
- 2) МНК в два этапа – на первом этапе модель идентифицируется с помощью обычного МНК, на втором этапе полученные оценки D_k применяются в качестве весов;
- 3) один из методов непараметрического сглаживания: вначале оцениваются значения $\theta_k = Y_k - Y_k^*$, где Y_k^* – полученные сглаженные значения ряда, а затем по соседним m точкам строится ряд оценок дисперсии θ_k , при этом теряются $m - 1$ значения:

$$S_k = \frac{1}{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} \left(\varphi_{k-i} - \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{k-i} \right)^2.$$

Полученные оценки дисперсии используются в качестве весов w_k :

$$\lambda'' = \operatorname{argmin}_{\lambda} \sum_{k=3}^N \frac{1}{w_k^2} (G_k - \lambda(G_{k-1} - G_{k-2}) - G_{k-1})^2.$$

Второй способ (ARMA II) учитывает соотношение $D_k = 1/(Y_k - \varepsilon_k)$:

$$(Y_{k-1} - Y_k)Y_{k-2} - \lambda(Y_{k-2} - Y_{k-1})Y_k = Y_{k-1}\varepsilon_{k-2} + Y_{k-2}\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_{k-1}\varepsilon_{k-2} - \varepsilon_k(\lambda\varepsilon_{k-1} - \lambda\varepsilon_{k-2}),$$

а затем с помощью МНК определяется:

$$\lambda'' = \operatorname{argmin}_{\lambda} \sum_{k=2}^N \frac{1}{w_k^2} \left((Y_{k-1} - Y_k)Y_{k-2} - \lambda \frac{(Y_{k-2} - Y_{k-1})Y_k}{Y_{k-2}} \right)^2.$$

Второй этап идентификации для обоих способов реализации ARMA-метода одинаковый: находятся оценки параметров A_{00}, A_{10} с помощью взвешенного МНК, а затем вычисляются МНК-оценки параметров A_0, A_1 :

$$A_{00}^o, A_{10}^o = \operatorname{argmin}_{A_{00}, A_{10}} \sum_{k=1}^N \frac{1}{w_k^2} (D_k - A_{00} - A_{10} e^{-\alpha k \Delta})^2.$$

Отметим, что модель (1) также может быть идентифицирована с помощью численного решения МНК, например методом *Левенберга–Марквардта*¹. Постановка задачи идентификации в этом случае выглядит так: найти такое значение вектора параметров модели θ , которое бы определило локальный минимум функции ошибки $E = \sum_{k=1}^N (Y_k - f(\theta))^2$, где $f(\theta)$ – регрессионная модель.

Перед началом работы алгоритма следует задать начальный вектор параметров θ . На каждом шаге итерации он заменяется вектором $\theta + \Delta\theta$. Чтобы найти значение $\Delta\theta$, необходимо решать систему линейных уравнений:

$$\Delta\theta = (J^T J + \lambda \operatorname{diag}(J^T J))^{-1} J^T (Y - f(\theta)),$$

где J – якобиан функции $f(\theta)$ в точке θ , $\lambda \geq 0$ – параметр регуляризации, назначаемый на каждой итерации алгоритма.

Проведем исследование точности моделирования и прогнозирования для модели Верхульста с аддитивной помехой девятью методами: Фишера, Готеллинга, Юла, Родса, Нейра, трех сумм, ARMA I, ARMA II и решением МНК методом Левенберга–Марквардта. Для этого генерировались тестовые выборки логистического тренда объемом 24, 36, 48 наблюдений. Для характеристики области возможного применения методов целесообразно назначать не отдельные значения параметров тренда, а варьировать значения параметров в достаточно широком диапазоне.

На каждую выборку аддитивно накладывалась генерируемая помеха, дисперсия которой задавалась с помощью коэффициента шум/сигнал, равного отношению дисперсии помехи к дисперсии детерминированной тренда $K_{n/s} = \sigma^2[\epsilon_k]/\sigma^2[D_k]$, который варьировался от 0 до 0,3 с шагом 0,05.

Для каждого из девяти методов генерировались 13 440 выборок и рассчитывались значения оценок параметров и меры точности: качество моделирования оценивалось с помощью коэффициента детерминации $R^2 = \sum_{k=1}^N (Y_k^o - M[Y_k])^2 / \sum_{k=1}^N (Y_k - M[Y_k])^2$, где Y_k^o – модельные значения ряда динамики; а качество прогнозирования – с помощью MAPE-оценки $MAPE = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l |(Y_k - Y_k^o)/Y_k|$, где l – глубина (горизонт) прогноза.

Была рассмотрена и точность оценивания отдельных параметров модели: смещение, среднеквадратическое отклонение, коэффициент вариации оценок параметров. Для этого сгенерировано 10 000 выборок объемом 36 наблюдений, глубиной прогноза 12 наблюдений и коэффициентом шум/сигнал в 10%.

Значения параметров модели, использованные при генерации тестовых выборок, а также найденные с помощью различных методов идентификации оценки параметров, представлены в табл. 1.

В результате исследования получены сходные результаты для методов Фишера и Готеллинга, ARMA I и ARMA II. Методы Фишера и Готеллинга позволяют приближенно вычислять производные функции, обладающие низкой точностью в условиях “зашумленности” выборки, а качество идентификации модели для всех аналитических методов сильно зависит от наборов исходных данных. Применение взвешенного МНК в методах ARMA I и ARMA II существенно не улучшает качество идентификации. Методы Родса, Юла и Нейра не дали удовлетворительного результата даже в случае добавления “шума”, мощность которого не превышает 5% мощности полезного сигнала (т.е. объясняют менее 10% исходных данных). Анализ показал, что только численное

¹ См. материалы сайта <http://alglib.sources.ru>.

Таблица 1. Исходные данные и результаты исследования

Параметры модели					
Параметр	Минимальное значение	Максимальное значение			Шаг
A_0	50	100			50
A_1	50	200			50
α	0,1	0,8			0,1
Результаты исследования качества оценивания отдельных параметров модели					
Параметр	A_0	A_1	α	R^2	MAPE
Метод Готеллинга					
Истинное значение	50	50	0,3	0,9082	0,1016
Математическое ожидание	47,1300	134,4400	0,4654	0,6717	0,1093
Среднеквадратическое отклонение	1,3398	889,8900	0,1125	0,1793	0,0285
Коэффициент вариации	0,0284	6.6193	0,2417	0,2670	0,2607
Метод трех сумм					
Истинное значение	50	50	0,3	0,90842	0,10202
Математическое ожидание	49,4240	267,5400	0,3228	0,9020	0,1050
Среднеквадратическое отклонение	1,7138	4972,0000	0,0788	0,0159	0,0297
Коэффициент вариации	0,0347	18,5840	0,2441	0,0177	0,2833
Метод ARMA II					
Истинное значение	50	50	0,3	0,9082	0,1019
Математическое ожидание	56,6130	109,5400	0,2094	0,5635	0,3125
Среднеквадратическое отклонение	576,0500	1356,3000	0,2326	0,3114	0,3365
Коэффициент вариации	10.1750	12,3830	1,1106	0,5527	1,0768
Метод Левенберга–Марквардта					
Истинное значение	50	50	0,3	0,908	0,10114
Математическое ожидание	50,4380	47,7970	0,2831	0,9146	0,1050
Среднеквадратическое отклонение	1,4700	42,0710	0,0461	0,0097	0,0311
Коэффициент вариации	0,0291	0,8802	0,1630	0,0106	0,2959

решение МНК методом Левенберга–Марквардта дает приемлемый результат точности моделирования и прогнозирования, а также качественные оценки параметров модели (1).

Рассмотрим теперь точность применения метода Левенберга–Марквардта на реальных данных. В качестве примера возьмем жизненный цикл продуктов компании Electronic Arts (EA) – разработчиком компьютерных видеоигр, в частности популярной серии “Need For Speed”. Использована статистика индекса поисковых запросов (SVI, Search Volume Index) сервиса Google².

Кумулятивные данные статистики модели жизненного цикла типа “фетиш” в обоих случаях были описаны еще более сложной моделью: обобщением тренда Верхульста в виде его суммы с линейным трендом и стохастической компонентой

$$Y_k = \frac{A_0}{1 + A_1 e^{-\alpha k \Delta}} + C_0 + C_1 k \Delta + \varepsilon_k, \quad (3)$$

для идентификации которой приведенные выше методы не могут быть применены.

² <http://www.google.com/trends>.

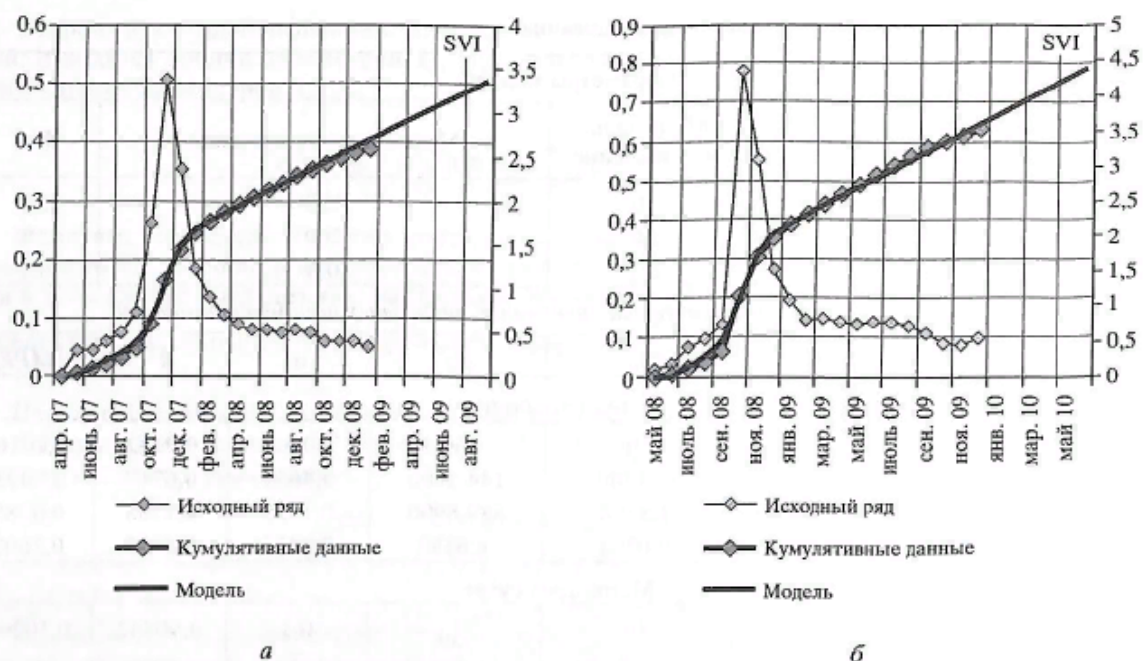


Рисунок. Данные статистики поисковых запросов на продукцию компании EA и результаты моделирования и прогнозирования ее жизненного цикла: а) NFS ProStreet; б) NFS Undercover

Поэтому идентификация модели (3) была осуществлена с помощью приема параметрической итерационной декомпозиции (Семёнычев В., Семёнычев Е., Коробецкая, 2010, с. 63–71). На первой итерации тренд Верхулста был выделен с помощью метода Левенберга–Марквардта, а на второй итерации – линейный тренд (после вычитания из Y_k) – с помощью классического МНК.

Заметим, что прием параметрической итерационной декомпозиции может быть применен и в случае присутствия колебательной компоненты (сезонной и/или циклической) в уровнях Y_k , который описанными выше методами идентификации не реализуем. В этом случае метод ARMA-моделей (Семёнычев В., Семёнычев Е., 2006, гл. 5) может быть успешно применен для идентификации параметров гармоник колебательной компоненты на второй итерации.

Величина контрольной части выборок и глубина прогноза в обоих случаях составляла одну треть от объема выборок. Помесячные данные статистики, а также кумулятивные данные и результаты моделирования и прогнозирования представлены в табл. 2 и на рисунке.

Таким образом, высокое качество моделирования и прогнозирования для модели логистической динамики Верхулста может быть получено с помощью численного решения МНК методом Левенберга–Марквардта в широком диапазоне сочетаний параметров модели, при существенной мощности помехи, а также при включении в структуру детерминированной компоненты ряда дополнительного линейного (параболического) тренда или колебательной (моно- или полигармонической) компоненты.

Таблица 2. Результаты моделирования и прогнозирования жизненного цикла продукции компании EA

Модель	NFS ProStreet	NFS Undercover
	$Y_k = \frac{1,04}{1 + 83437e^{-1,6k\Delta}} - 0,06 + 0,08k\Delta + \varepsilon_k$	$Y_k = \frac{1,3}{1 + 14534e^{-1,9k\Delta}} - 0,11 + 0,13k\Delta + \varepsilon_k$
R^2	0,99	0,99
MAPE, %	2,71	1,68

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Библиотека алгоритмов ALGLIB. Алгоритм Левенберга–Марквардта. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://alglib.sources.ru>, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: декабрь 2011 г.).
- Бородич С.А. (2001): Эконометрика. Минск: Новое знание.
- Мхитарян В.С. (2008): Эконометрика. М.: Проспект.
- Семёнычев В.К., Семёнычев Е.В. (2006): Информационные системы в экономике. Эконометрическое моделирование инноваций. Часть 1. Самара: Изд-во Самарского гос. аэрокосмического ун-та.
- Семёнычев В.К., Семёнычев Е.В., Коробецкая А.А. (2010): Метод параметрической итерационной декомпозиции тренд-сезонных рядов аддитивной структуры // *Вестник Самарского муниципального института управления*. №1 (12).
- Сулов В.И., Ибрагимов Н.М., Талышева Л.П. и др. (2005): Эконометрия. Новосибирск: Изд-во СО РАН.
- Четыркин Е.М. (1977): Статистические методы прогнозирования. М.: Статистика.
- Google Trends (2008): [Электронный ресурс]. Google Trends. Режим доступа: <http://www.google.com/trends>, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: декабрь 2011 г.).

Поступила в редакцию
15.02.2011 г.

Methods of Identification of Logistic Dynamics and Product Life Cycles Using Ferhulst Model

V.N. Kozghuhova, V.K. Semenychev, Ye.V. Semenychev

The authors compare the results of several analytical identification methods adequacy of the Ferhulst (Pearl–Reed) logistic dynamics model by using test samples with different volumes, wide range of the model parameters values and stochastic component variances. The article shows the preference of using the Levenberg–Marquardt algorithm for minimizing a least squares method function for Ferhulst model and its possibility to model ‘fetish’-shaped product life cycles.

Keywords: Ferhulst model, modeling, forecasting, methods of identification, adequacy, Levenberg–Marquardt algorithm, ‘fetish’-shaped product life cycle.