ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2012, том 48, № 3, с. 91–105

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ИНВЕСТИЦИОННАЯ ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОЦЕНТНАЯ СТАВКА ДЛЯ АНАЛИЗА ДОХОДНОСТИ И ЗАТРАТНОСТИ КРЕДИТА

© 2012 г. А.В. Жевняк

(Рязань)

На основе методологии эффективной инвестиционной процентной ставки (ЭПС) получены формулы для расчета доходности кредита для кредитора и затратности для заемщика. Показано, что показатель внутренней нормы доходности, используемый сегодня банками для этих целей, не является мерой доходности/затратности кредита. Для наиболее распространенных на практике кредитных схем исследована зависимость инвестиционной ЭПС от ставки реинвестирования и основных параметров кредита – срока, номинальной процентной ставки, ставки комиссии. Рассмотрены особенности определения и толкования инвестиционной ЭПС. Даны практические рекомендации для кредиторов и заемщиков для выбора наиболее эффективных кредитных схем в условиях растущей и падающей процентной ставки.

Ключевые слова: кредит, кредитор, заемщик, доходность кредита, эффективная процентная ставка, ЭПС, IRR, реинвестирование, дисконтирование.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сравнительный анализ доходности/затратности различных по способу обслуживания долга кредитных схем представляет интерес как для кредитных институтов, так и для их клиентов – юридических и физических лиц, привлекающих кредитные ресурсы для решения своих корпоративных и личных задач. Оценку доходности/затратности кредита можно выполнить путем вычисления полной (включая различного рода комиссионные выплаты) современной или наращенной суммы платежей обслуживания с учетом их реинвестирования.

Ограничиваясь для простоты учетом только единовременной комиссии αS, взимаемой кредитором по ставке α в начале первого расчетного периода, от номинальной суммы займа S, можно записать выражения современной (дисконтированной) и наращенной стоимости суммы полных платежей обслуживания в виде $\widehat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon} = \alpha S + \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}$ и $\mathbb{Z}_{n\varepsilon} = \alpha S(1+\varepsilon)^n + \mathbb{R}_{n\varepsilon}$ соответственно. Здесь и далее $\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon} = \sum_{j=1}^{n} R_j(\delta_m, n, S)/(1+\varepsilon)^j$, $\mathbb{R}_{n\varepsilon} = \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}(1+\varepsilon)^n$ – современная и наращенная суммы текущих платежей обслуживания кредита $R_j(\delta_m, n, S)$; ε – ставка реинвестирования (дисконта); n – срок кредита, исчисляемый числом расчетных (базисных) периодов; $\delta_m = \delta/m$ – процентная ставка расчетного периода; δ – номинальная (годовая) процентная ставка кредита; m – число начислений процентов и платежей обслуживания в году; $j = 1, \ldots, n$ – порядковый номер текущего платежа (дискретное время).

Прямой оценкой доходности/затратности кредита для кредитора или заемщика является величина удельной современной стоимости полных расходов обслуживания $\widehat{\bar{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}$ или связанное с ней удорожание $\widehat{\mathbb{U}}_{n\varepsilon}$:

$$\widehat{\bar{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon} = (\alpha S + \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon})/S = \alpha + \widehat{\bar{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon}, \quad \widehat{\mathbb{U}}_{n\varepsilon} = [\widehat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon} - S]S^{-1} = \widehat{\bar{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon} - 1 = \alpha + \widehat{\bar{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon} - 1. \qquad (1)$$

Величина $\widehat{\bar{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}$ по аналогии с инвестиционным анализом может быть названа индексом рентабельности кредита (PI, profitability index). Для кредитора $\widehat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon} = \alpha S + \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}$ – современная стоимость наращенного ссудного капитала, а $\bar{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}$ – показатель его относительного роста. Здесь и далее черта над буквенным обозначением использована для удельных показателей, т.е. отнесенных к номинальной сумме займа, например, $\bar{\mathbb{R}}_{n\varepsilon} = \mathbb{R}_{n\varepsilon}/S$. Дуга ("крышка") применяется для дисконтированных величин, где в нижнем индексе указывается еще и ставка дисконта.

Далее рассматриваются четыре наиболее распространенные на практике кредитные схемы:

– кредит с равномерным гашением основного долга и регулярной уплатой процентов, начисляемых на остаток ссудной задолженности, который называют также кредитом с амортизацией долга, кредитом с дифференцированными платежами или классическим (для краткости мы будем именовать его *ординарным* кредитом);

– кредит с регулярной уплатой процентов, начисляемых на сумму основного долга, и единовременным погашением основного долга в конце срока (по аналогии с купонной облигацией такой кредит мы будем называть *купонным*);

– кредит с единовременной уплатой основного долга и начисленных процентов в конце срока (*шаровый* кредит);

– кредит с одинаковыми по величине платежами обслуживания в виде постоянной ренты (*аннуитетный* кредит).

Ниже все показатели рассматриваемых конкретных кредитов будем нумеровать (помещая соответствующий номер в верхнем индексе) в том порядке, в котором они перечислены выше. Тогда можно записать формулы для расчета современной стоимости суммы текущих платежей обслуживания, полученные в (Жевняк, 2010, 2012) с применением новой техники дисконтирования, основанной на дисконт-функциях (Д-функциях):

$$\widehat{\mathbb{R}}^{(1)}_{n\varepsilon} = \frac{S}{n\varepsilon}[(\varepsilon - \delta_m)\varphi_0(\varepsilon, n) + n\delta_m], \quad \widehat{\mathbb{R}}^{(2)}_{n\varepsilon} = S[1 + (\delta_m - \varepsilon)\varphi_0(\varepsilon, n)], \tag{2}$$

$$\widehat{\mathbb{R}}^{(3)}_{n\varepsilon} = \frac{S(1+\delta_m)^n}{(1+\varepsilon)^n}, \quad \widehat{\mathbb{R}}^{(4)}_{n\varepsilon} = S\frac{\varphi_0(\varepsilon, n)}{\varphi_0(\delta_m, n)},$$

где

$$\varphi(\delta_m, n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+\delta_m)^j} = \frac{(1+\delta_m)^n - 1}{\delta_m(1+\delta_m)^n} -$$

дисконт-функция нулевой степени, или коэффициент приведения единичной постоянной ренты. Выражения (2) получены путем дисконтирования и суммирования текущих платежей $R_j = G_j + P_j$, где выделены платежи в погашение основного долга G_j и в уплату процентов P_j. Там же вычислены дисконтированные суммы $\widehat{\mathbb{G}}_{n\varepsilon}$ и $\widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}$.

Важно отметить, что для любого кредита должно выполняться условие полного гашения основного долга к концу срока кредитования $\mathbb{G}_n = \sum_{j=1}^{n} G_j = S$ и условие замыкания контура финансовой операции (основное свойство кредита):

$$S = \sum_{j=1}^{n} \frac{R_j(\delta_m, n, S)}{(1+\delta_m)^j}. \tag{3}$$

Степенные дисконт-функции $\varphi_k(\delta_m, n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j^k}{(1+\delta)^j}$ степени k и порядка n введены в научный оборот в (Жевняк, 2010, с. 11–107). Они определяются в результате обобщения результатов Я. Бернулли в классической задаче о вычислении суммы одинаковых степеней натуральных чисел и обладают рядом важных свойств, позволяющих существенно упростить аналитическое исследование финансовых операций.

В классе степенных дисконт-функций особое место занимает Д-функция нулевой степени $\varphi_0(\varepsilon, n) = [(1+\varepsilon)^n - 1]/[\varepsilon(1+\varepsilon)^n]$, через которую все остальные могут быть выражены. Из свойств Д-функции нулевой степени $\varphi_0(\varepsilon, n)$ отметим ее монотонное убывание с ростом ставки дисконта и монотонный рост при возрастании порядка n. В (Жевняк, 2010) получены сильные верхние и нижние оценки Д-функции нулевой степени, которые эффективно применяются в сравнительном анализе различных кредитных схем (в том числе и доходности/затратности).

В проблеме оценки доходности/затратности кредитов можно выделить две основные задачи. Первая состоит в сравнительном анализе различных кредитных схем при одинаковых значениях параметров кредитов. Эта задача для четырех рассматриваемых кредитных схем в самом общем виде решена в (Жевняк, 2010, 2012). В частности, в (Жевняк, 2010) применением оценок Д-функции нулевой степени доказано, что по сумме удельных дисконтированных процентных платежей рассматриваемые кредиты при одинаковых значениях процентной ставки δ_m, ставки комиссии α и срока кредитования n ранжируются в следующем порядке: $\hat{\bar{\mathbb{P}}}^{(1)}_{n\varepsilon} > \hat{\bar{\mathbb{P}}}^{(4)}_{n\varepsilon} > \hat{\bar{\mathbb{P}}}^{(1)}_{n\varepsilon}$. Процентные платежи в шаровом кредите при $\varepsilon < \delta_m$ будут превышать $\hat{\bar{\mathbb{P}}}^{(2)}_{n\varepsilon}$, но при достаточно больших $\varepsilon > \delta_m$ с ростом срока кредитования n они станут меньшими, чем $\hat{\bar{\mathbb{P}}}^{(1)}_{n\varepsilon}$. При $\varepsilon = \delta_m$ дисконтированные суммы процентных платежей всех рассматриваемых кредитов будут одинаковыми, т.е. $\hat{\bar{\mathbb{P}}}^{(1)}_{n\varepsilon} = \hat{\bar{\mathbb{P}}}^{(2)}_{n\varepsilon} = \hat{\bar{\mathbb{P}}}^{(3)}_{n\varepsilon} = \hat{\bar{\mathbb{P}}}^{(4)}_{n\varepsilon}$.

В (Жевняк, 2012) также на основе оценок Д-функций установлено, что при $\varepsilon < \delta_m$ и одинаковых значениях процентной ставки δ_m, ставки комиссии α, срока кредитования n для дисконтированных сумм удельных платежей обслуживания справедлива цепочка неравенств

$$\hat{\bar{\mathbb{R}}}^{(3)}_{n\varepsilon} > \hat{\bar{\mathbb{R}}}^{(2)}_{n\varepsilon} > \hat{\bar{\mathbb{R}}}^{(4)}_{n\varepsilon} > \hat{\bar{\mathbb{R}}}^{(1)}_{n\varepsilon}, \tag{4}$$

которая при $\varepsilon > \delta_m$ инвертируется к виду

$$\hat{\bar{\mathbb{R}}}^{(1)}_{n\varepsilon} > \hat{\bar{\mathbb{R}}}^{(4)}_{n\varepsilon} > \hat{\bar{\mathbb{R}}}^{(2)}_{n\varepsilon} > \hat{\bar{\mathbb{R}}}^{(3)}_{n\varepsilon}, \tag{5}$$

а при $\varepsilon = \delta_m$, согласно основному свойству кредита (3), превращается в систему равенств

$$\hat{\bar{\mathbb{R}}}^{(1)}_{n\delta_n} = \hat{\bar{\mathbb{R}}}^{(4)}_{n\delta_n} = \hat{\bar{\mathbb{R}}}^{(2)}_{n\delta_n} = \hat{\bar{\mathbb{R}}}^{(3)}_{n\delta_n} = 1. \tag{6}$$

Вторая задача сравнительного анализа доходности кредитов состоит в построении количественной меры доходности/затратности конкретного кредита. Решению этой задачи посвящена настоящая статья.

2. ОЦЕНКА ДОХОДНОСТИ И ЗАТРАТНОСТИ ПО УДОРОЖАНИЮ КРЕДИТА

Анализ доходности/затратности кредитов при произвольных значениях процентной ставки, ставки комиссии и срока кредита может быть выполнен по современной $\hat{\bar{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon} = (\alpha S + \hat{\bar{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon})/S = \alpha + \hat{\bar{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon}$ или по наращенной $\mathbb{Z}_{n\varepsilon} = \hat{\bar{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}(1+\varepsilon)^n$ стоимости суммы удельных полных платежей обслуживания. Эта величина может быть выражена в процентах (от номинальной суммы займа) или пересчитана в другой показатель, например в удорожание $\hat{\mathbb{U}}_{n\varepsilon} = \hat{\bar{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon} - 1 = \alpha + \hat{\bar{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon} - 1$, что не меняет существа дела, поскольку в основе остается принцип сопоставления суммарных платежей обслуживания и номинальной суммы займа. Тем самым будет установлена простейшая шкала измерения доходности/затратности кредита. Однако при этом вычисляются суммарные платежи обслуживания за весь срок кредита, и по их величине невозможно сравнивать кредиты разной продолжительности.

Здесь же отметим, что доходность кредита для кредитора может не совпадать с его затратностью для заемщика, поскольку, вообще говоря, значения ставки дисконтирования для заемщика и кредитора различны и определяются их возможностями по размещению (реинвестированию) своих свободных денежных средств в бизнесе.

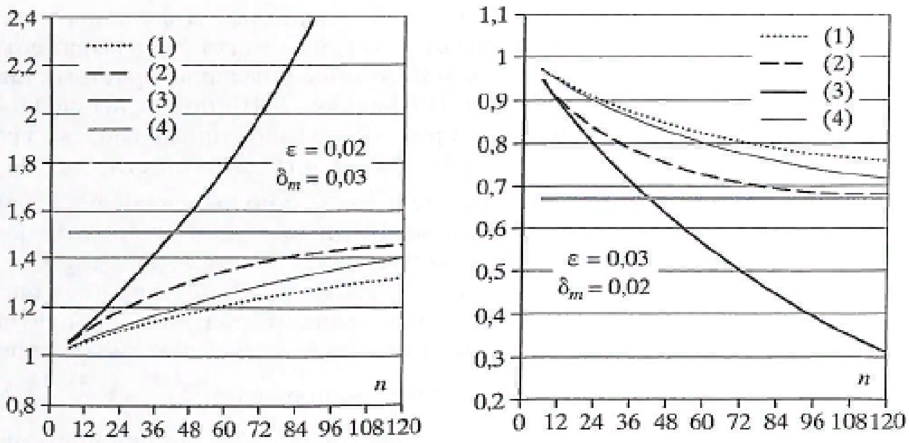

Рис. 1. Зависимость дисконтированной суммы удельных текущих платежей обслуживания $\hat{\hat{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon}$ для ординарного (1), купонного (2), шарового (3) и аннуитетного (4) кредитов от срока кредитования n

Основным слагаемым, определяющим характер изменения показателей $\hat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}$ и $\hat{\mathbb{U}}_{n\varepsilon}$ от параметров кредита, является дисконтированная сумма текущих платежей обслуживания $\mathbb{R}_{n\varepsilon}$. Так как

$$\frac{d\hat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}}{d\varepsilon} = -\frac{1}{1+\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}\frac{jR_j}{(1+\varepsilon)^j} < 0,$$

то с ростом ставки дисконта современные стоимости суммы платежей обслуживания всех рассматриваемых кредитов монотонно убывают. По (2) также вполне очевидно, что с ростом процентной ставки δ_m величина $\mathbb{R}_{n\varepsilon}$ монотонно возрастает.

Применением верхних и нижних оценок Д-функции нулевой степени удается строго доказать, что при $\varepsilon < \delta_m$ современные стоимости суммы платежей обслуживания $\mathbb{R}_{n\varepsilon}$ всех рассматриваемых кредитов монотонно возрастают с увеличением срока кредитования n, а при $\varepsilon > \delta_m$, наоборот, уменьшаются.

На рис. 1 представлены графики изменения $\hat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}$ от срока кредита для случаев $\varepsilon < \delta_m$ и $\varepsilon > \delta_m$ (при $\varepsilon = \delta_m$ всегда $\hat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon} = 1$), построенные по (2) и иллюстрирующие результаты проведенного анализа. Серым цветом показано предельное значение для ординарного, купонного и аннуитетного кредитов $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{\hat{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon} = \delta_m/\varepsilon$. В шаровом кредите $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{\hat{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon} = \infty$ при $\varepsilon < \delta_m$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon} = 0$ при $\varepsilon > \delta_m$; при $n = 1$ для всех кредитов выполнено $\hat{\hat{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon} = (1+\delta_m)/(1+\varepsilon)$.

Графики зависимости $\hat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}$ от срока кредита могут быть получены сдвигом соответствующих графиков $\hat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}$ вверх на величину ставки комиссии α. Графики удорожания $\hat{\mathbb{U}}_{n\varepsilon}$ строятся аналогично, но путем сдвига графиков вниз $\hat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}$ на величину $1-\alpha$. При этом отрицательные значения удорожания $\hat{\mathbb{U}}_{n\varepsilon}$ для заемщика будут означать уже не затратность, а доходность кредита. Для кредитора отрицательное удорожание указывает на упущенную выгоду. В дальнейшем будет проведено подробное обсуждение таких ситуаций.

3. ИНВЕСТИЦИОННАЯ ЭПС. ВНУТРЕННЯЯ НОРМА ДОХОДНОСТИ КРЕДИТА

В статье (Жевняк, 2012) для оценки доходности кредита предложено использовать инвестиционную эффективную процентную ставку (ЭПС) $r(\varepsilon)$, определяемую по уравнению баланса

$$S(1+r)^n = (1+\varepsilon)^n\left[\alpha S + \sum_{j=1}^{n}\frac{R_j(S,\delta_m,n)}{(1+\varepsilon)^j}\right], \tag{7}$$

где сопоставляются наращенная сумма всех платежей обслуживания реального займа (правая часть) с наращенным доходом в проекте сравнения (левая часть), в качестве которого принят депозит с постоянной капитализацией процентов и первоначальным взносом, равным номинальной сумме займа. В (7) ставка реинвестирования ε для реального проекта задается экзогенно, а ставка наращения $r(\varepsilon)$ в проекте сравнения является искомой величиной ЭПС, которую легко найти

$$r(\varepsilon) = (1+\varepsilon)\left[\alpha + \frac{1}{S}\,\hat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}\right]^{1/n} - 1 = (1+\varepsilon)\left[\alpha + \hat{\hat{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon}\right]^{1/n} - 1 = (1+\varepsilon)\left[\hat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}\right]^{1/n} - 1 =)\left[\hat{\hat{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}\right]^{1/n} - 1. \quad (8)$$

При $\varepsilon = \delta_m$ справедливо $\hat{\hat{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon}|_{\varepsilon=\delta_m} = 1$ и $r(\varepsilon)|_{\varepsilon=\delta_m} = (1+\delta_m)(1+\alpha)^{1/n} - 1$, $r(\varepsilon)|_{\substack{\varepsilon=\delta_m \\ \alpha=0}} = \delta_m$. Величина инвестиционной ЭПС $r(\varepsilon)$ (8) является мерой доходности/затратности кредита для кредитора и заемщика. Но это будет уже другая шкала измерения, отличная от шкалы, задаваемой величиной полных дисконтированных $\hat{\hat{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}$ или наращенных $\mathbb{Z}_{n\varepsilon}$ платежей обслуживания.

В инвестиционном анализе уравнение, аналогичное (7), составляется при нахождении *модифицированной внутренней нормы доходности* (MIRR) инвестиционного проекта. Можно считать, что инвестиционная ЭПС выражает среднегеометрический (за один расчетный период) темп роста наращенной полной суммы платежей обслуживания $\mathbb{Z}_{n\varepsilon} = \hat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}(1+\varepsilon)^n = (\alpha S + \hat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon})(1+\varepsilon)^n$ относительно номинальной суммы займа при постоянном реинвестировании кредитором платежей обслуживания кредита, поступающих от заемщика. Аналогичная трактовка применима и для MIRR инвестиционного проекта.

Если в (7) принять $\varepsilon = r$, то получим уравнение

$$(1-\alpha)S = \sum_{j=1}^{n} \frac{R_j}{(1+r)^j} \quad \text{или} \quad \hat{\mathbb{U}}_{n\varepsilon} = \alpha + \hat{\hat{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon} - 1 = 0, \qquad (9)$$

решение которого r по методике ЦБ РФ именуется ЭПС кредита; в научной литературе (см. например (Кузнецов, 2010, гл. 6; Четыркин, 2002, с. 209)) этот показатель называется полной доходностью кредита. Фактически r – барьерное значение ставки реинвестирования, при которой доход кредитора, получаемый от кредитования и немедленного реинвестирования поступающих текущих платежей обслуживания займа на финансовом рынке, равен доходу, который кредитор мог бы получить, изначально размещая по той же ставке номинальную сумму займа на финансовом рынке. Понятно, что решение r уравнения (9) есть частное значение инвестиционной ЭПС $r(\varepsilon)$ при $\varepsilon = r$. Это значение r для одного расчетного периода мы будем именовать *внутренней нормой доходности кредита* (*IRRC*); годовой показатель *IRR* может быть вычислен по *IRRC*.

Из (9) с учетом (3) и свойства монотонного убывания $\hat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}$ при росте ставки дисконта следует, что при $\alpha < 0$ всегда $IRRC > \delta_m$.

В (Жевняк, 2012) показано, что функция $r(\varepsilon)$ строго монотонно растет по ε, достигая при $\varepsilon = r$ значения $IRRC = r$. С учетом $\frac{d\hat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}}{d\varepsilon} < 0$ справедливо также

$$r(\varepsilon) > \varepsilon \Leftrightarrow (1+\varepsilon)\left[\alpha + \hat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}\right]^{1/n} - 1 > \varepsilon \Leftrightarrow \hat{\hat{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon} > 1 - \alpha \Leftrightarrow \hat{\hat{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon} > \hat{\hat{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon < r,$$

т.е. при $\varepsilon < r$ всегда $\varepsilon < r(\varepsilon) < r$, при $\varepsilon = r$ и $r(\varepsilon) = r$, а при $\varepsilon > r$ всегда $r < r(\varepsilon) < \varepsilon$.

Важно отметить, что $IRRC = r$ является только общей внутренней (не зависящей от внешнего параметра ε) характеристикой кредитного проекта, но никак не мерой доходности кредита для конкретного кредитора или мерой затратности кредита для конкретного заемщика, поскольку доходность/затратность существенно зависит от своей для кредитора и заемщика ставки реинвестирования.

Действительно, если ставка размещения свободных денежных средств ε, доступная конкретному кредитору, оказывается меньшей, чем значение *IRRC* (т.е. $\varepsilon < r$), то и доходность кредита, оцениваемая по величине инвестиционной ЭПС $r(\varepsilon)$, будет меньшей, чем внутренняя норма доходности данной кредитной схемы (т.е. $r(\varepsilon) < r = IRRC$). Если ставка размещения $\varepsilon = r = IRRC$, то такой же, т.е. равной IRRC, будет и доходность кредита. Условие $\varepsilon > r = IRRC$ означает, что доходность финансового рынка выше предельной доходности данной кредитной схемы, тогда $r = IRRC < r(\varepsilon) < \varepsilon$. В этом случае кредит по-прежнему доходен ($r(\varepsilon) > 0$), но кредитор имеет упущенную выгоду, во избежание которой ему имеет смысл отказаться от кредитования и изначально разместить свои денежные средства на финансовом рынке. Если кредитор сам этого не сделает и выдаст кредит, то уже заемщику в этом случае выгоднее привлеченные кредитные ресурсы разместить на финансовом рынке (доходы от этого превысят сумму платежей обслуживания кредита), отказавшись от первоначально запланированного направления вложения заемных денег, или по крайней мере еще раз соизмерить экономическую (социальную) ценность реализации запланированного проекта с будущим доходом от размещения заемных денег на финансовом рынке.

Для одинаковых значений ставки комиссии α, процентной ставки δ_m и срока кредита n при $\varepsilon > \delta_m$ на основании (4) справедливо $r^{(3)}(\varepsilon) > r^{(2)}(\varepsilon) > r^{(4)}(\varepsilon) > r^{(1)}(\varepsilon)$, т.е. шаровый кредит оказывается более доходным, чем купонный, который превосходит по этому показателю аннуитетный, а тот, в свою очередь, – ординарный. При $\varepsilon = \delta_m$ согласно (6) все кредиты по доходности для кредитора эквивалентны, а при $\varepsilon > \delta_m$ на основании (5) приведенная цепочка неравенств для инвестиционных ЭПС инвертируется и по доходности кредиты ранжируются в обратном порядке $r^{(1)}(\varepsilon) > r^{(4)}(\varepsilon) > r^{(2)}(\varepsilon) > r^{(2)}(\varepsilon)$. Внутренняя норма доходности есть частное значение инвестиционной ЭПС (не зависящее от ε), и при $\alpha > 0$ всегда $IRRC = r > \delta_m$, причем $IRRC1 > IRRC4 > IRRC2 > IRRC3$. Если доходность/затратность кредита оценивать по величине $IRRC$, то при $\alpha > 0$, $\varepsilon > \delta_m$ результат сравнительного анализа кредитов будет полностью противоположен действительному положению дел, которое отражается как величиной суммы полных удельных платежей обслуживания, так и инвестиционной ЭПС.

Следовательно, *считать значение IRRC показателем доходности/затратности для конкретного кредитора и заемщика, как это рекомендуется в методике ЦБ, никак нельзя.* Это обстоятельство вводит в заблуждение заемщиков, что проявляется в целом ряде публикаций в сети Интернет и в книге (Федоров, 2008, с. 79–81).

В развернутой форме уравнения для нахождения $IRRC$ и выражения инвестиционных ЭПС рассматриваемых кредитов получаются с учетом (2) и имеют вид (Жевняк, 2011):

$$\frac{\varphi_0(r^{(1)}, n)}{n} = 1 - \frac{\alpha r^{(1)}}{r^{(1)} - \delta_m}, \quad r^{(2)} = \delta_m + \frac{\alpha}{\varphi_0(r^{(2)}, n)}, \tag{10}$$

$$r^{(3)} = (1+\delta_m)(1-\alpha)^{-1/n} - 1, \quad \varphi_0(r^{(4)}, n) = (1-\alpha)\varphi_0(\delta_m, n);$$

$$r^{(1)}(\varepsilon) = (1+\varepsilon)\left\{\alpha + \frac{1}{n\varepsilon}[(\varepsilon - \delta_m)\varphi_0(\varepsilon, n) + n\delta_m]\right\}^{1/n} - 1,$$

$$r^{(2)}(\varepsilon) = (1+\varepsilon)[1 + \alpha + (\delta_m - \varepsilon)\varphi_0(\varepsilon, n)]^{1/n} - 1,$$

$$r^{(3)}(\varepsilon) = (1+\varepsilon)\left[\alpha + \frac{(1+\delta_m)^n}{(1+\varepsilon)^n}\right]^{1/n} - 1, \tag{11}$$

$$r^{(4)}(\varepsilon) = (1+\varepsilon)\left[\alpha + \frac{\varphi_0(\varepsilon, n)}{\varphi_0(\delta_m, n)}\right]^{1/n} - 1.$$

При расчете инвестиционной ЭПС по формулам (8), (11) при фиксированных n и ε обеспечивается соответствие направления изменения величин $\widehat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}$ и $r(\varepsilon)$, так что бо́льшему значению $\widehat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}$ соответствует и бо́льшее значение инвестиционной ЭПС (такое же соответствие будет и для наращенной суммы полных платежей обслуживания $\widehat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}$). По существу, это означает монотонность инвестиционной ЭПС $r(\varepsilon) = (1+\varepsilon)[\widehat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}]^{1/n} - 1 = [\mathbb{Z}_{n\varepsilon}]^{1/n} - 1$ по полной современной $\widehat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}$ или наращенной сумме платежей обслуживания $\mathbb{Z}_{n\varepsilon}$ при вариациях процентной ставки δ_m и ставки комиссии α, но фиксированных значениях срока кредита n и ставки реинвестирования ε.

Однако если принять, что единовременный комиссионный платеж αS уменьшает номинальную сумму займа S до реальной $(1-\alpha)S$, и искать инвестиционную ЭПС из уравнения $(1-\alpha)S(1+r)^n=(1+\varepsilon)^n\sum_{j=1}^{n}\frac{R_j(S,\delta_m,n)}{(1+\varepsilon)^j}$ (ср. с формулой (10)), то получим иное выражение ЭПС:

$$r(\varepsilon)=(1+\varepsilon)\left[\frac{\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}}{(1-\alpha)S}\right]^{1/n}-1=(1+\varepsilon)\left[\frac{\widehat{\overline{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon}}{1-\alpha}\right]^{1/n}-1=$$

$$=(1+\varepsilon)\left[\frac{\widehat{\overline{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}-\alpha}{1-\alpha}\right]^{1/n}-1=\left[\frac{\overline{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}-\alpha(1+\varepsilon)^n}{1-\alpha}\right]^{1/n}-1.$$

Здесь ЭПС непосредственно зависит не только от полных удельных платежей обслуживания кредита $\widehat{\overline{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}$ (по современной стоимости) или $\overline{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}=\widehat{\overline{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}(1+\varepsilon)^n$ (по наращенной стоимости), но еще и от ставки комиссии α. Поэтому при определенных значениях параметров кредита α, δ_m соответствие знака приращений суммы удельных полных платежей обслуживания кредита $\widehat{\overline{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}$ или $\overline{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}$ и инвестиционной ЭПС $r(\varepsilon)$ может быть нарушено. Например, сравнивая два ординарных кредита с $\alpha=0$; $\delta_m=0{,}01$ и $\alpha=0{,}1$; $\delta_m=0{,}006$ при одинаковых значениях $\varepsilon=0{,}005$ и $n=60$, получим

$$r^{(1)}(\varepsilon)\big|_{\substack{\alpha=0,1\\ \delta_m=0,006}}=0{,}007223\gg r^{(1)}(\varepsilon)\big|_{\substack{\alpha=0\\ \delta_m=0,01}}=0{,}007166.$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что кредит при $\alpha=0{,}1$; $\delta_m=0{,}006$ более доходен/затратен соответственно для кредитора и заемщика, чем такой же кредит при $\alpha=0$; $\delta_m=0{,}01$. Но это неверно, поскольку по величине полных современных (и наращенных тоже) расходов обслуживания ситуация прямо противоположная:

$$\widehat{\overline{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}\big|_{\substack{\alpha=0\\ \delta_m=0,01}}=1{,}1379>\widehat{\overline{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}\big|_{\substack{\alpha=0,1\\ \delta_m=0,006}}=1{,}1276.$$

$$\overline{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}\big|_{\substack{\alpha=0\\ \delta_m=0,01}}=1{,}5349>\overline{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}\big|_{\substack{\alpha=0,1\\ \delta_m=0,006}}=1{,}5209.$$

Таким образом, измененное по описанной выше схеме уравнение для нахождения инвестиционной ЭПС не обеспечивает требуемого однозначного соответствия знака приращений полных расходов обслуживания кредита и инвестиционной ЭПС. Это дает основание признать рассчитанный по такому уравнению показатель непригодным для использования в качестве меры доходности/затратности кредитов.

4. ЗАВИСИМОСТЬ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ЭПС ОТ ПАРАМЕТРОВ КРЕДИТА

В (Жевняк, 2012) доказано, что инвестиционная ЭПС строго монотонно возрастает с ростом ставки реинвестирования. Далее будем исследовать ее зависимость от процентной ставки, ставки единовременной комиссии и срока кредита.

Зависимость инвестиционной ЭПС от срока кредита n описывается функциями (2) и имеет весьма сложный вид. На рис. 2 представлены графики изменения инвестиционной ЭПС всех рассматриваемых кредитов от срока кредита n при различных соотношениях ставки реинвестирования ε и процентной ставки δ_m для нулевого и ненулевого значения ставки комиссии α. Слева расположены графики, соответствующие $\varepsilon<\delta_m<IRRC$, когда $r(\varepsilon)>\varepsilon$ и кредитование более выгодно кредитору, чем размещение средств на фондовом рынке, а справа – $\varepsilon>IRRC$, когда $r(\varepsilon)<\varepsilon$ и более выгодным для кредитора становится размещение средств на фондовом рынке.

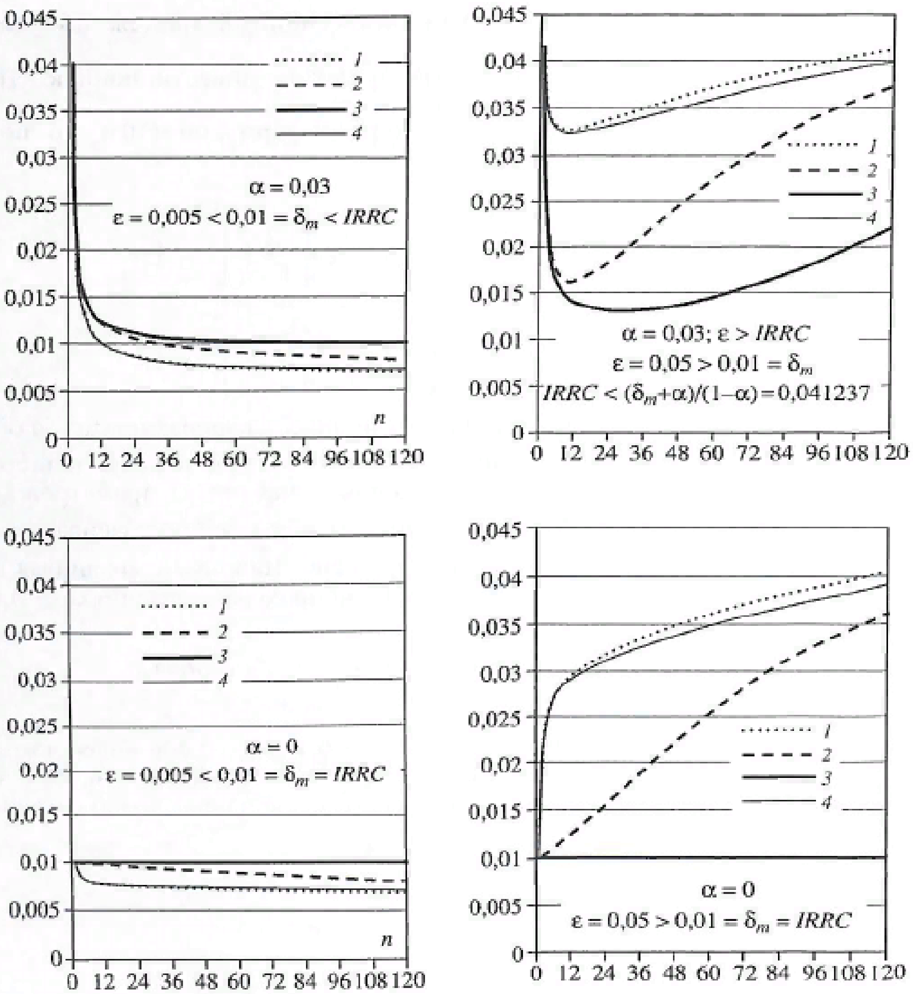

Рис. 2. Зависимость инвестиционной ЭПС ординарного (1), купонного (2), шарового (3) и аннуитетного (4) кредита от срока кредита при различных значениях процентной ставки δ_m, ставки комиссии α и ставки дисконта ε

В первом случае наблюдается монотонное убывание инвестиционной ЭПС при росте срока кредита от значения $r(\varepsilon)|_{n=1} = \delta_m + \alpha(1+\varepsilon)$ до ε в ординарном, купонном и аннуитетном кредитах и до δ_m в шаровом кредите, где при $\alpha = 0$ справедливо $r(\varepsilon) \equiv \delta_m$. Во втором случае при $\alpha > 0$ и с $\varepsilon > IRRC < \delta_m$ с ростом срока кредита n имеет место не монотонное изменение ЭПС всех кредитов от значения $r(\varepsilon)|_{n=1} = \delta_m + \alpha(1+\varepsilon)$ сначала до некоторого минимума, а затем до значения $\lim\limits_{n\to\infty} r(\varepsilon) = \varepsilon$ снизу. Это означает, что при длительных сроках размещения платежей обслуживания кредита на высокодоходном финансовом рынке ($\varepsilon > r = IRRC > \delta_m$) кредитор имеет доходность, близкую к доходности рынка.

При $\alpha = 0$ и $\varepsilon > IRRC = \delta_m$ с ростом срока кредита инвестиционная ЭПС ординарного, купонного и аннуитетного кредитов монотонно растет от значения δ_m до значения ε, но в шаровом кредите, как уже было указано, при $\alpha = 0$ она сохраняется равной δ_m.

Современная стоимость суммы платежей обслуживания $\hat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}$ всех рассматриваемых кредитов строго монотонно увеличивается с ростом процентной ставки δ_m. Вместе с $\hat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}$ согласно (8) и (11) неограниченно возрастает инвестиционная $r(\varepsilon)$ ЭПС.

Очевидно, с ростом ставки комиссии α инвестиционная ЭПС также строго монотонно растет до значения, соответствующего $\alpha = 1$.

5. УТОЧНЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ЗАТРАТ ЗАЕМЩИКА. НОВАЯ ШКАЛА ЗАТРАТНОСТИ КРЕДИТА

Выше уже отмечалось, что при вычислении доходности/затратности кредита по инвестиционной ЭПС полученные показатели доходности и затратности могут отличаться, поскольку в их расчете используются, вообще говоря, различные для каждой из сторон значения ставки реинвестирования. Однако существует еще одно отличие в исчислении затратности заемщика и доходности кредитора, связанное с уточнением относительного уровня затрат заемщика.

Вначале, однако, приведем несколько иную интерпретацию доходности кредитора. Понятно, что, реинвестируя поступающие от заемщика платежи обслуживания, кредитор наращивает свой ссудный капитал от величины S до уровня $\widehat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}(1+\varepsilon)^n = [\alpha S + \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}](1+\varepsilon)^n$, увеличивая его в $[\alpha S + \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}](1+\varepsilon)^n / S = [a + \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}](1+\varepsilon)^n$ раз. Тогда из условия $(1+r(\varepsilon))^n = [\alpha + \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}](1+\varepsilon)^n$ может быть вычислен темп роста наращенного ссудного капитала кредитора, который совпадает с инвестиционной ЭПС $r(\varepsilon)$.

Аналогично из уравнения

$$(1+r(\varepsilon))^n = \frac{[aS + \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}](1+\varepsilon)^n}{S(1+\varepsilon_0)^n}$$

будет вычисляться доходность кредитора в том случае, когда он кредитует не своими деньгами, а привлеченными средствами вкладчиков:

$$r_0(\varepsilon, \varepsilon_0) = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_0}[\alpha + \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}]^{1/n} - 1,$$

где ε – ставка реинвестирования кредитора, а ε_0 – процентная ставка по депозитам вкладчиков (обычно $\varepsilon > \varepsilon_0 > 0$ и $r(\varepsilon)$ растет с ростом ставки реинвестирования кредитора), причем $1 + r(\varepsilon) = (1 + r_0(\varepsilon, \varepsilon_0))(1 + \varepsilon_0)$.

Аналогично будем рассуждать и в отношении заемщика. Но тогда сразу придется признать, что оценка его наращенных затрат по той же величине $[\alpha S + \widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon} + \widehat{\mathbb{G}}_{n\varepsilon}](1+\varepsilon)^n$ (здесь $\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon} = \widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon} + \widehat{\mathbb{G}}_{n\varepsilon}$) будет завышенной. К реальным затратам заемщика можно отнести только часть этой суммы в размере наращенных процентных и комиссионных выплат $[\alpha S + \widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}](1+\varepsilon)^n$ за вычетом величины $[S + \widehat{\mathbb{G}}_{n\varepsilon}](1+\varepsilon)^n > 0$, которая представляет собой доход заемщика, получаемый на финансовом рынке за счет временного использования средств $\widehat{\mathbb{G}}_{n\varepsilon}$, предназначенных для выплаты основного долга $(0 < \widehat{\mathbb{G}}_{n\varepsilon} < S)$. По наращенной стоимости абсолютные затраты заемщика на обслуживание кредита запишутся в виде $[\alpha S + \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}](1+\varepsilon)^n$. Напомним, что ε – это доступная заемщику ставка реинвестирования, по которой он вложил бы свои деньги, если бы не было кредита. Но тогда надо считать, что и заемщик также имел возможность разместить сумму займа сразу же после ее получения по ставке ε. В таком случае для получения относительного показателя величины затрат заемщика их надо сопоставлять не с номинальной суммой займа S, а с ее наращенной величиной $S(1 + \varepsilon)^n$. В результате получим удорожание кредита:

$$\frac{[aS + \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}](1+\varepsilon)^n - S(1+\varepsilon)^n}{S(1+\varepsilon)^n} = \alpha + \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon} - 1 = \widehat{\mathbb{U}}_{n\varepsilon}.$$

Тогда из условия $[1 + \widehat{r}(\varepsilon)]^n = 1 + \widehat{\mathbb{U}}_{n\varepsilon}$ определится темп роста затрат заемщика

$$\widehat{r}(\varepsilon) = [1 + \widehat{\mathbb{U}}_{n\varepsilon}]^{1/n} - 1 = [\alpha + \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}]^{1/n} - 1. \quad (12)$$

Можно указать связь между затратностью кредита для заемщика $\widehat{r}(\varepsilon)$ и величиной инвестиционной ЭПС $r(\varepsilon)$, вычисленной по ставке реинвестирования заемщика (в этом случае $r(\varepsilon)$ уже нельзя считать доходностью кредитора), в виде $1 + r(\varepsilon) = (1+\varepsilon)(1+\widehat{r}(\varepsilon))$ или

$$r(\varepsilon) = (1+\varepsilon)(1+\widehat{r}(\varepsilon)) - 1, \quad \widehat{r}(\varepsilon) = \frac{r(\varepsilon) - \varepsilon}{1+\varepsilon}. \quad (13)$$

Для показателя затратности кредита (12), (13) справедливо приведенное выше требование монотонности по современной сумме полных удельных платежей обслуживания кредита $\hat{\hat{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}$.

Вычисляя производную по ставке реинвестирования, из (13) получим

$$\frac{d\hat{r}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{(r(\varepsilon)'_\varepsilon - 1)(1+\varepsilon) - r(\varepsilon) + \varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} = \frac{r(\varepsilon)'_\varepsilon(1+\varepsilon) - 1 - r(\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2} =$$

$$= [\hat{\hat{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}]^{1/n} / [n(1+\varepsilon)] \left\{ n - \frac{1}{\hat{\hat{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}} \sum_{j=1}^{n} \frac{j\bar{R}_j}{(1+\varepsilon)^j} \right\} - [\hat{\hat{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}]^{1/n} / (1+\varepsilon) =$$

$$= -\frac{1}{n(1+\varepsilon)} [\hat{\hat{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}]^{(n-1)/n} \sum_{j=1}^{n} \frac{j\bar{R}_j}{(1+\varepsilon)^j} < 0,$$

где

$$r(\varepsilon)'_\varepsilon = \frac{1}{n} [\hat{\hat{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}]^{1/n} \left\{ n - \frac{1}{\hat{\hat{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}} \sum_{j=1}^{n} \frac{jR_j}{(1+\varepsilon)^j} \right\}$$

(Жевняк, 2012).

Таким образом, с ростом ставки дисконта величина $\hat{r}(\varepsilon)$ строго монотонно убывает. Для заемщика это вполне понятно и означает, например, что если для обслуживания кредита был заранее открыт некий депозитный счет (создан погасительный фонд) и ставка начисления по данному депозиту растет, то на обслуживание кредита придется потратить меньше собственных средств. Иначе можно сказать, что любой доход, получаемый заемщиком в бизнесе или за счет депозита, уменьшает его затраты по обслуживанию кредита. Наибольшая затратность кредита для заемщика и наименьшая доходность для кредитора имеют место при отсутствии реинвестирования ($\varepsilon = 0$), когда они равны, т.е. $r(0) = \hat{r}(0)$. Но при любых (равных или не равных) значениях ставки реинвестирования для кредитора и заемщика доходность кредитора всегда выше затратности кредита для заемщика, поскольку доходность с ростом дисконта растет, а затратность падает. Превышение доходности кредита над затратностью заемщика обеспечивается доходом, получаемым кредитором от реинвестирования платежей гашения основного долга по мере их поступления. Этот дополнительный доход кредитор получает на собственные средства и без увеличения затратности данного заемщика, так как поступления в уплату основного долга он размещает в новые кредиты на множестве всех заемщиков или иным образом на финансовом рынке.

На рис. 3 представлены графики доходности кредита для кредитора $r(\varepsilon)$ (восходящие линии) и его затратности для заемщика $\hat{r}(\varepsilon)$ (нисходящие линии) от ставки реинвестирования ε при $\delta_m = 0{,}01$; $\alpha = 0{,}03$; $n = 60$ для всех рассматриваемых кредитных схем. Серым цветом отмечена линия $r(\varepsilon) = \varepsilon$. Абсциссы точек пересечения этой линии и линий инвестиционной ЭПС $r(\varepsilon)$ определяют значения внутренней нормы доходности *IRRC*. Те же значения *IRRC* получаются из уравнения $\hat{r}(\varepsilon) = 0$.

При $\varepsilon = \delta_m$ современная стоимость суммы платежей обслуживания во всех кредитах совпадает ($\hat{\hat{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon}(\delta_m) = S$, $\hat{\hat{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon}(\delta_m) = 1$) и $r(\delta_m) = (1+\delta_m)(1+\alpha)^{1/n} - 1$. Если и заемщик способен реинвестировать средства по ставке $\varepsilon = \delta_m$, то

$$\hat{r}(\delta_m) = \frac{r(\delta_m) - \delta_m}{1+\delta_m} = (1+\alpha)^{1/n} - 1, \quad r(\delta_m) > \hat{r}(\delta_m).$$

Характер зависимости $\hat{r}(\varepsilon)$ от параметров кредита α, δ_m, n такой же, как и у инвестиционной ЭПС. Соответствующие графики получаются из графиков $r(\varepsilon)$ сдвигом на $\varepsilon/(1+\varepsilon)$ единиц вниз и уменьшением значений $\hat{r}(\varepsilon)$ в $1/(1+\varepsilon)$ раз.

Формула (12) задает новую скорректированную шкалу затратности кредита для заемщика, которая имеет связь (13) со шкалой, определяемой инвестиционной ЭПС. Шкала инвестиционной

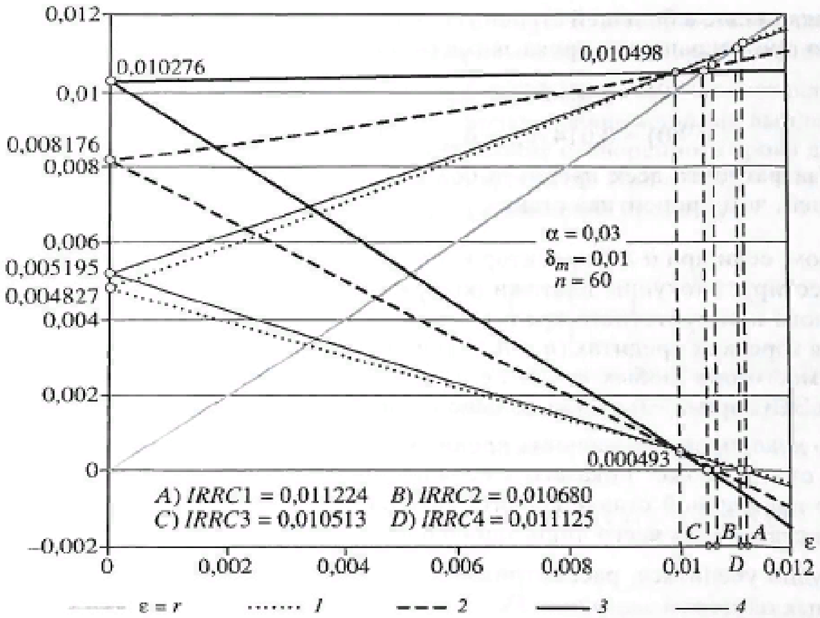

Рис. 3. Зависимость доходности кредитора $r(\varepsilon)$ и затратности заемщика $\tilde{r}(\varepsilon)$ от ставки реинвестирования (дисконта) для ординарного (1), купонного (2), шарового (3) и аннуитетного (4) кредитов при $\delta_m = 0{,}01$; $\alpha = 0{,}03$; $n = 60$

ЭПС дает более высокие значения затратности, что не принципиально для целей сравнительного анализа затратности кредитов на качественном уровне при одинаковых значениях параметров. При расчете по скорректированной шкале устраняется систематическая погрешность вычисления затратности, и этот показатель уже может использоваться для количественной оценки затратности кредитов при любых (не обязательно одинаковых) значениях параметров.

6. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ДОХОДНОСТИ И ЗАТРАТНОСТИ КРЕДИТА

Инвестиционная ЭПС как мера доходности кредита при определенных соотношениях между параметрами кредитования имеет некоторые особенности, которые отражены на рис. 2 (верхний ряд при $\alpha > 0$ и нижний ряд при $\alpha = 0$). Ниже они рассматриваются более подробно.

1. Одна из этих особенностей состоит в том, что при $\alpha > 0$, $\varepsilon < \delta_m$ (в том числе при $\varepsilon = 0$) и достаточно больших сроках кредитования n в любых кредитах, кроме шарового, инвестиционная ЭПС принимает значения, меньшие процентной ставки δ_m. Действительно, требуя $r(\varepsilon) = (1+\varepsilon)[\alpha + \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}]^{1/n} - 1 < \delta_m$, получим $\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon} < \dfrac{(1+\delta_m)^n}{(1+\varepsilon)^n} - \alpha \Leftrightarrow \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon} < \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}^{(3)} - \alpha$. Но при $\varepsilon < \delta_m$ с ростом n величины $\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}$ монотонно растут (рис. 1) от значения $\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}|_{n=1} = \dfrac{1+\delta_m}{1+\varepsilon}$. Быстрее рост происходит в шаровом кредите, поэтому для всех остальных кредитов $\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon} < \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}^{(3)}$ (см.(4)–(6)). Тогда для любого $\alpha > 0$ можно указать такое значение $n = n_*$, что $\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon} < \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}^{(3)} - \alpha$ при $n > n_*$ и будет выполнено $r(\varepsilon) < \delta_m$. Соответственно $r(n_*) = \delta_m$ и $r(\varepsilon) > \delta_m$ при $n < n_*$.

Например, при $\varepsilon = 0$ для $\alpha = 0{,}03$, $\delta_m = 0{,}01$, $n = 60$ по расчетным данным (рис. 3):

$$r^{(1)}(0) = 0{,}004827 < \delta_m,\quad r^{(2)}(0) = 0{,}008176 < \delta_m,\quad r^{(3)}(0) = 0{,}010276 > \delta_m,\quad r^{(4)}(0) = 0{,}005195 < \delta_m.$$

Следовательно, при $n = 60$ доходность/затратность ординарного и аннуитетного кредитов без учета реинвестирования ($\varepsilon = 0$) будет для кредитора и заемщика почти вдвое меньшей, чем процентная ставка (и еще в большей степени меньшей, чем *IRRC*). Этот эффект сохранится и при $\varepsilon > 0$ (рис. 3). Но при сокращении срока займа ($n = 6$) в том же кредите:

$$r^{(1)}(0) = 0{,}010551 > \delta_m, \quad r^{(2)}(0) = 0{,}014467 < \delta_m,$$

$$r^{(3)}(0) = 0{,}014702 > \delta_m, \quad r^{(4)}(0) = 0{,}010597 < \delta_m,$$

т.е. доходность/затратность всех кредитов без учета реинвестирования будет для кредитора и заемщика большей, чем процентная ставка.

Таким образом, если при $\alpha > 0$ кредитор в достаточно длинных кредитах ($n > n_*$), т.е. довольно долго, реинвестирует текущие платежи обслуживания по ставке $\varepsilon < \delta_m$, то доходность ординарного, купонного и аннуитетного кредитов падает и станет меньшей, чем процентная ставка ($r(\varepsilon) < \delta_m$), хотя в коротких кредитах ($n < n_*$) таких последствий еще не будет. При $\alpha = 0$ свойство $r(\varepsilon) < \delta_m$ имеет место при любых $n > 1$, т.е. и в самых коротких кредитах. В шаровом кредите инвестиционная ЭПС при $\alpha > 0$ всегда больше процентной ставки, т.е. $r(\varepsilon) > \delta_m$, но $r(\varepsilon)|_{\alpha=0} = \delta_m$.

Тот факт, что доходность/затратность кредитов при наличии комиссии оказывается меньшей, чем процентная ставка, может показаться неожиданным, поскольку существует укоренившееся представление о процентной ставке кредита как мере его доходности и затратности. На самом деле процентная ставка есть всего лишь тариф банковской услуги.

В этом нетрудно убедиться, рассматривая, для простоты даже без учета реинвестирования, суммы процентных платежей заемщика $\mathbb{P}_n$. Тогда, обозначая срок кредита, выраженный в годах, через $T = n/m$ и номинальную (годовую) процентную ставку через $\delta = m\delta_m$, можно сумму процентных платежей для любого кредита (Жевняк, 2010) представить как $\mathbb{P}_n = \mu(\delta_m, n)ST\delta$, т.е. в виде произведения суммы займа S, срока кредитования T, процентной ставки δ и некоторого дополнительного множителя μ, который, собственно, и отличает одну кредитную схему от другой. Функция $\mu(\delta_m, n)$, зависящая в общем случае от процентной ставки расчетного периода и срока кредита, отражает особенности алгоритма начисления процентов в каждой кредитной схеме и может быть названа *технологическим коэффициентом кредита*:

– для ординарного кредита $\mu_1(n) = (n+1)/2n$;

– для купонного – $\mu_1 \equiv 1$;

– для шарового – $\mu_3(\delta_m, n) = \dfrac{(1+\delta_m)^n - 1}{n\delta_m}$;

– для аннуитетного – $\mu_4(\delta_m, n) = \dfrac{1}{n\delta_m}\left[\dfrac{n}{\varphi_0(\delta_m, n)} - 1\right]$.

Здесь вполне очевидно, что процентная ставка δ выступает в качестве тарифа, связывающего сумму процентных платежей $\mathbb{P}_n$ (без учета реинвестирования это в чистом виде доход кредитора) с суммой займа S и сроком его использования T. И только в купонном кредите, где $\delta_m = \mathbb{P}_n^{(2)}/Sn$, процентную ставку периода δ_m можно признать среднеарифметическим показателем доходности.

Ситуация, когда даже при наличии комиссии доходность кредита, измеряемая инвестиционной ЭПС, оказывается меньшей процентной ставки, вполне понятна, если помнить, что инвестиционная ЭПС есть ставка депозита (или шарового кредита), обеспечивающая рост доходов такой же, как и в данной кредитной схеме, а потенциал роста в депозите (или в шаровом кредите) существенно больший по сравнению с другими кредитными схемами.

При регулярной выдаче кредитов, т.е. при регулярном реинвестировании платежей обслуживания по постоянной процентной ставке ($\varepsilon = \delta_m$), кредитор при любых схемах кредитования в отсутствие комиссии имеет доходность $r(\delta_m)|_{\alpha=0} = \delta_m$. На практике доходность кредитора $r(\delta_m) = (1+\delta_m)(1+\alpha)^{1/n} - 1$несколько возрастает, как за счет взимания комиссии, так и за счет повышения в отдельных операциях ставок размещения (например за счет разовых высокодоходных операций на фондовом рынке).

2. При $\varepsilon > \delta_m$ и любом $\alpha \geq 0$ для $n > 1$ во всех кредитах всегда $r(\varepsilon) > \delta_m$. Но здесь возникает другая особенность инвестиционной ЭПС, состоящая в том, что в отсутствие единовременной

комиссии ($\alpha = 0$) и при нулевой процентной ставке ($\varepsilon = \delta_m = 0$) доходность кредита будет больше нуля. Указанная особенность проявляется в ординарном и аннуитетном кредитах.

Ситуация, где $\alpha = \delta_m = 0$, соответствует случаю, когда кредитор предоставляет бесплатную финансовую помощь с возвратом долга, либо в рассрочку с равномерными выплатами (по аналогии с ординарным кредитом), либо единовременно в конце оговоренного срока длительностью n расчетных периодов (аналог – купонный и шаровой кредиты). При $\alpha = \delta_m = 0$ внутренняя норма доходности кредита $IRRC = 0$. Но при любой ставке размещения кредитора $\varepsilon > 0$ инвестиционная ЭПС составит величину

$$r(\varepsilon)\big|_{\substack{\delta_m=0\\ \alpha=0}} = (1+\varepsilon)\left[\frac{1}{S}\,\widehat{\mathbb{G}}_{n\varepsilon}\big|_{\delta_m=0}\right]^{1/n} - 1,$$

где $\widehat{\mathbb{G}}_{n\varepsilon} > 0$ – дисконтированная сумма платежей в уплату основного долга, $\widehat{\mathbb{G}}_{n\varepsilon} = \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon} - \widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}$, а сумма процентных платежей $\widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon} = \mathbb{P}_n = 0$ при нулевой процентной ставке кредита ($\delta_m = 0$).

Вычисляя инвестиционные ЭПС, получим в купонном и шаровом кредитах

$$\widehat{\mathbb{G}}^{(2)}_{n\varepsilon} = \widehat{\mathbb{G}}^{(3)}_{n\varepsilon} = \frac{S}{(1+\varepsilon)^n} \quad \text{и} \quad r^{(2)}(\varepsilon)\big|_{\substack{\delta_m=0\\ \alpha=0}} = r^{(3)}(\varepsilon)\big|_{\substack{\delta_m=0\\ \alpha=0}} = 0 < \varepsilon.$$

В ординарном кредите $\widehat{\mathbb{G}}^{(1)}_{n\varepsilon} = S\,\dfrac{\varphi_0(\varepsilon, n)}{n}$ (не зависит от процентной ставки), а в аннуитетном кредите (Жевняк, 2012) такая зависимость имеет место

$$\widehat{\mathbb{G}}^{(4)}_{n\varepsilon} = S\,\frac{\varphi_0(\chi, n)}{(1+\delta_m)^{n+1}\varphi_0(\delta_m, n)}, \quad \varphi_0(\chi, n) = \frac{(1+\delta_m)^n - (1+\varepsilon)^n}{(\delta_m - \varepsilon)(1+\varepsilon)^n},$$

хотя при $\delta_m = 0$ справедливо $\varphi_0(\chi\,|_{\delta_m=0}, n) = \varphi_0(\varepsilon, n)$ и $\widehat{\mathbb{G}}_{n\varepsilon}\big|_{\delta_m=0} = S\varphi_0(\varepsilon, n)/n$, т.е. дисконтированная сумма платежей в уплату основного долга совпадает с аналогичной величиной в ординарном кредите. Тогда с учетом $\varphi_0(\varepsilon, n) < n$ справедливо

$$r^{(1)}(\varepsilon)\big|_{\substack{\delta_m=0\\ \alpha=0}} = r^{(4)}(\varepsilon)\big|_{\substack{\delta_m=0\\ \alpha=0}} = (1+\varepsilon)\left[\frac{\varphi_0(\varepsilon, n)}{n}\right]^{1/n} - 1 = \left[\frac{(1+\varepsilon)^n - 1}{n\varepsilon}\right]^{1/n} - 1 < \varepsilon.$$

Как уже отмечалось, при $\varepsilon > r = IRRC$ кредитование не выгодно кредитору, поскольку, размещая сумму S на депозите, он нарастил бы ее по рыночной ставке ε до величины $S(1+\varepsilon)^n$, а предоставив беспроцентный заем, кредитор при $r(\varepsilon) < \varepsilon$ получит несколько меньшее наращение $S(1 + r(\varepsilon))^n$. Упущенная выгода кредитора составит $S(1+\varepsilon)^n - S(1 + r(\varepsilon))^n = [S(1+\varepsilon)^n - 1]$ при единовременном возврате долга и $S(1+\varepsilon)^n - S(1 + r(\varepsilon))^n = S(1+\varepsilon)^n[1 - \varphi_0(\varepsilon, n)/n]$ при равномерном погашении беспроцентной ссуды. Во втором случае она будет меньшей, так как $(1+\varepsilon)^n = 1 - \varepsilon\varphi_0(\varepsilon, n)$ и

$$(1+\varepsilon)^n\left[1 - \frac{\varphi_0(\varepsilon, n)}{n}\right] < (1+\varepsilon)^n - 1 \Leftrightarrow \frac{\varphi_0(\varepsilon, n)}{n} > \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \Leftrightarrow \varphi_0(\varepsilon, n) > \frac{n}{1+n\varepsilon}.$$

Заемщик же здесь может получить реальный доход, если средства, привлеченные в виде такой финансовой помощи, разместит на финансовом рынке по любой доступной для него ставке $\varepsilon > 0$. Получается, что при нулевом значении внутренней нормы доходности такого займа ($IRRC = r = 0$) кредитор всегда имеет упущенную выгоду, а заемщик – виртуальный доход, который может стать реальным.

Выше мы уже отмечали, что инвестиционная ЭПС $r(\varepsilon)$ отражает доходность двух неразрывно связанных операций кредитора – собственно кредитования и реинвестирования получаемых текущих платежей обслуживания. При $\alpha = \delta_m = 0$, по сути, кредитования не происходит, хотя имеет место доход от реинвестирования поступающих от заемщика платежей в уплату основного долга. Но это только возврат собственных средств кредитора, на которые он получает доход путем реинвестирования. Предоставление беспроцентного займа есть особый случай кредитования, где кредитор имеет явную упущенную выгоду (которую можно признать и убытком) в размере $S(1 + r(\varepsilon))^n - S(1 + \varepsilon)^n < 0$. В удельном исчислении это есть не что иное, как общее за весь срок кредита отрицательное удорожание $\mathbb{U}_{n\varepsilon}$. Вообще, в любых случаях, когда рыночная ставка размещения превышает *IRRC* кредитного проекта, кредитор имеет упущенную выгоду, поскольку доходность кредита оказывается меньшей доходности рынка.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В России с июля 2007 г. банки обязаны рассчитывать и сообщать заемщикам (до заключения кредитного договора) величину ЭПС, которая вычисляется по методике, предложенной ЦБ РФ[1]. Применение этой методики дает величину внутренней нормы доходности кредита за один расчетный период (*IRRC*) или за год (*IRR*), которая может считаться показателем доходности кредитора, реинвестирующего поступающие к нему платежи обслуживания именно по этой ставке. Реально ставка реинвестирования кредитора и заемщика может быть существенно меньшей *IRRC* и даже процентной ставки кредита. Поэтому *IRRC* и *IRR* дают завышенные значения доходности/затратности кредита. Более того, оценка доходности/затратности кредита по величине *IRRC* (*IRR*) приводит к полному искажению результата сравнительного анализа различных кредитных схем (с точностью до наоборот), когда реально более доходный/затратный (по величине сумме выплат заемщика) кредит должен быть признан по величине *IRRC* (*IRR*) менее доходным/затратным.

2. Доходность кредита предлагается оценивать величиной инвестиционной ЭПС, вычисленной при заданной ставке реинвестирования кредитора.

Затратность кредита $\hat{r}(\varepsilon)$ также вычисляется через инвестиционную ЭПС $r(\varepsilon)$ по формуле $\hat{r}(\varepsilon) = \dfrac{r(\varepsilon) - \varepsilon}{1 + \varepsilon}$, где ε – ставка дисконтирования заемщика, не совпадающая, вообще говоря, со ставкой реинвестирования кредитора. Для информирования заемщиков о затратности кредита целесообразно сообщать им значение инвестиционной ЭПС при отсутствии реинвестирования $r(0) = \hat{r}(0)$ как наибольшее значение данного показателя, которое получается без учета доходов заемщика в бизнесе, которые уменьшают для него затратность кредита.

При любых не нулевых значениях ставки реинвестирования кредитора и заемщика доходность кредитора всегда выше, чем затратность кредита для заемщика за счет исключения из затрат заемщика некоторых доходов кредитора, получаемых им на финансовом рынке без участия данного конкретного заемщика.

3. Если кредитор реинвестирует текущие поступления только в новые кредиты, то в условиях, когда процентная ставка имеет во времени тенденцию к снижению, наиболее доходным (при одинаковых параметрах кредита) будет шаровый кредит и далее в порядке убывания доходности – купонный, аннуитетный и ординарный кредиты. Если же кредитование производится на фоне роста процентных ставок, то наиболее доходным будет ординарный кредит и далее в порядке убывания доходности – аннуитетный, купонный и шаровый кредиты. Если в перспективе процентная ставка сохраняется постоянной, то доходность всех рассмотренных кредитов, выданных по этой ставке, одинакова.

По тем же соображениям можно заключить, что в случаях, когда кредитные ресурсы используются для реализации высокодоходной ($\varepsilon > \delta_m$) финансовой операции или инвестиционного проекта, заемщикам для минимизации затрат выгоднее использовать схему шарового или купонного кредита. При наличии у заемщика возможности высокодоходного размещения свободных денежных средств на финансовом рынке ($\varepsilon > IRRC$) вполне оправданно использовать привлекаемые кредитные ресурсы.

[1] Положение № 254-П "О порядке формирования кредитными организациями резервов на возможные потери по ссудам, по ссудной и приравненной к ней задолженности", которое разъяснено в письме ЦБ № 175-Т от 26 декабря 2006 г. Позже согласно новому указанию Банка России от 13.05.2008 № 2008-У понятие "эффективная процентная ставка" было заменено на понятие "полная стоимость кредита". Но оба этих показателя ЭПС и ПСК методологически вычисляются как внутренняя норма доходности, при некоторых отличиях по составу платежей, включаемых в денежный поток при расчете ЭПС и ПСК.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Жевняк А.В. (2010): Математическая теория дисконтирования денежных потоков. Математическая теория кредита. Рязань: Ринфо.

Жевняк А.В. (2012): Математические модели и оценки эффективности кредита // *Экономика и мат. методы*. Т. 48. Вып. 2.

Кузнецов Б.Т. (2010): Инвестиции. М.: Юнити–Дана.

Федоров Б.В. (2008): Как правильно взять и вернуть кредит: на покупку недвижимости, автомобиля, техники. СПб.: Питер.

Четыркин Е.М. (2002): Финансовая математика. М.: Дело.

Поступила в редакцию
19.04.2011 г.

Investment Effective Interest Rate for the Analysis of Yield and Credit Spending

A.V. Zhevnyak

Based on the methodology of the investment effective interest rate (ESR), the formulas for calculating the profitability of the loan to the lender and costly for the borrower proposed. It is shown that the rate of internal rate of return that is used today by banks for these purposes is not a measure of profitability / costs on the loan. For the most common practice of credit schemes investigated the dependence of investment EPS of reinvestment rates and the main parameters of the loan – the term nominal interest rates, the rates of commission. The features of the definition and interpretation of investment EPS described. Practical recommendations for lenders and borrowers on the most effective credit schemes in the context of growing and declining interest rates proposed.

Keywords: loan, lender, borrower, profitability of credit, effective interest rate, EPS, IRR, reinvestment, discounting.