

Таковы три стратегии, которые могут применяться в целях повышения эффективности функционирования системы массового обслуживания при загрузке требованиями ее каналов, имеющих различную дисциплину обслуживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Р. Кокс, У. Л. Смит, Теория очередей. М., «Мир», 1966.
2. E. Koenigsberg. On jockeying on queues. Management Science, 1966, v. 12, № 5.
3. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., «Наука», 1964.
4. Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. Введение в теорию массового обслуживания. М., «Наука», 1966.
5. А. Кофман, Р. Крюон. Массовое обслуживание. Теория и приложения. М., «Мир», 1965.
6. А. А. Шахбазов, Э. Г. Самандаров. Об обслуживании неординарного потока. В сб. Кибернетику — на службу коммунизму, т. II, М., «Энергия», 1964.

Поступила в редакцию
30 VI 1967

О ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ ПРОДОЛЖЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Э. М. ВАЙСБОРД

(Москва)

В статье рассматривается задача определения глобального экстремума многоэкстремальной функции. При этом применяется метод случайного выбора начальной точки с последующим градиентным спуском из этой точки; даются оценки для среднего числа итераций, необходимых для улучшения результата, достигнутого после уже проведенных итераций. Полученные оценки позволяют в некоторых случаях делать заключения о целесообразности дальнейших итераций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1. Пусть в компактной области S m -мерного векторного пространства E_m задана непрерывно дифференцируемая функция $f(x) \equiv f(x_1, \dots, x_m)$. Мы хотим отыскать глобальный экстремум (для определенности пусть это будет минимум) функции $f(x)$ в области S .

Если функция $f(x)$ и область S выпуклы, то при решении этой задачи очень хорошо действует градиентный метод. Однако в общем случае однократное применение градиентного метода приводит лишь к локальному минимуму функции $f(x)$. Поэтому для отыскания глобального минимума многоэкстремальной функции $f(x)$ применяют градиентный спуск несколько раз, начиная всякий раз из новой точки. Так как ни расположение, ни размеры области притяжения глобального минимума функции обычно не известны, то выбор начальной точки всякий раз естественно производить случайным образом в соответствии с равномерным распределением вероятностей на области S . После окончания каждой итерации нужно сравнить результат, достигнутый в этой итерации, с наилучшим результатом, достигнутым в прошлых итерациях. Если вновь полученный результат окажется лучше, то он оставляется в качестве результата для дальнейшего сравнения. Если же он окажется хуже, то в качестве результата для дальнейшего сравнения оставляется прежний результат. После проведения нескольких итераций имеет смысл оценить целесообразность проведения дальнейших итераций. Целесообразность при этом понимается в следующем смысле: какое в среднем число итераций необходимо еще провести, чтобы добиться улучшения результата по сравнению с уже достигнутым.

Точная постановка задачи такова. Пусть проведено n итераций градиентного спуска. Минимальное значение функции $f(x)$, полученное после этих итераций, равно f_n .

В одной из последующих итераций мы сможем получить значение функции $f(x)$ меньше, чем f_n , если начальная точка этой итерации попадает в область притяжения такой стационарной точки функции $f(x)$, для которой значение функции $f(x)$ меньше, чем f_n . Вероятность попадания начальной точки в одну из их областей притяжения

равна p , где величина p пропорциональна m -мерному объему суммы областей притяжения таких точек. Так как ни форма, ни размеры, ни расположение этих областей притяжения не известны, то неизвестно и значение величины p , а можно говорить лишь о распределении вероятностей этого значения. Естественно сделать предположение, что до начала процесса поиска значение величины p равномерно распределено на отрезке $[\varepsilon, 1]$ (при достаточно малом значении ε).

Предположение о том, что p не может принимать значения меньше ε , можно оправдать следующим образом. Во-первых, если область притяжения очень мала, то вероятность попадания случайной точки в эту область практически равна нулю; во-вторых, так как желаемое значение аргумента функции $f(x)$ может удерживаться, как правило, не с идеальной точностью, то очень малые области притяжения не будут устойчивы относительно возмущений аргумента функции. С теоретической же точки зрения то, что левый конец интервала возможных значений величины p отличен от нуля, позволяет избежать расходящихся интегралов и связанных с этим технических трудностей.

При значении $p = p_0$ среднее количество итераций до первого попадания случайной точки в область притяжения точки, в которой значение $f(x)$ меньше f_n , равно $1/p_0$. Отсюда и из сделанного допущения об априорном распределении значения p априорное математическое ожидание числа итераций до первого попадания в такую область притяжения равно

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dp_0}{(1-\varepsilon)p_0} = -\frac{\ln \varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad (1)$$

т. е. величине порядка $|\ln \varepsilon|$.

В следующем разделе будет выяснено, как количество уже проделанных итераций влияет на среднее количество итераций, необходимых для дальнейшего улучшения результата, т. е. каково апостериорное среднее значение числа итераций, необходимых для улучшения f_n .

2. АПОСТЕРИОРНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ f_n

2. Итак, пусть проделано n итераций описанного в разделе 1 процесса и достигнуто минимальное значение функции $f(x)$, равное f_n . Спрашивается, какое в среднем количество итераций нужно еще сделать, чтобы добиться улучшения этого значения. Пусть вероятность попадания в область притяжения G тех точек, в которых $f(x) < f_n$, равна p . Согласно предположению раздела 1, априорное распределение параметра p есть равномерное распределение на отрезке $[\varepsilon, 1]$. Назовем удачным исходом испытания попадание случайной точки в область G , а неудачным — противоположный исход. Тогда, если после n итераций минимальное достигнутое значение функции $f(x)$ есть f_n , то это означает, что все исходы после n испытаний были удачными. По формуле Байеса [1], апостериорная плотность вероятностей значения величины p дается формулой

$$\frac{(1-p)^n}{\int_{\varepsilon}^1 (1-p)^n dp} = \frac{(n+1)(1-p)^n}{(1-\varepsilon)^{n+1}}. \quad (2)$$

Отсюда апостериорное среднее число итераций, необходимых для улучшения уже достигнутого значения $f(x)$, равно

$$M_n = \frac{(n+1)}{(1-\varepsilon)^{n+1}} \int_{\varepsilon}^1 \frac{(1-p)^n}{p} dp. \quad (3)$$

Проведем оценку величины M_n снизу.

Оценку будем проводить для малых ε и при количестве уже проведенных итераций порядка $\varepsilon^{-\alpha}$, где $\alpha < 1$.

Тогда из (3) следует

$$\begin{aligned} M_n &= (n+1) \int_{\varepsilon}^1 \frac{(1-p)^n}{p} dp (1+O(1)) \geq \varepsilon^{-\alpha} \int_{\varepsilon}^1 \frac{e^{-1}}{p} dp (1+O(1)) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon^{-\alpha} \ln \varepsilon^{\alpha-1} (1+O(1)). \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, при количестве уже проведенных итераций порядка $\varepsilon^{-\alpha}$ среднее количество дополнительных итераций, нужных для дальнейшего улучшения результата, превышает количество уже проведенных итераций примерно в $\ln \varepsilon^{\alpha-1}/\varepsilon$ раз.

Если количество проведенных итераций имеет порядок ε^{-1} , то среднее количество дополнительных итераций имеет тот же самый порядок. Действительно, из (3) следует

$$M_n \leq \frac{(n+1)}{\varepsilon(1-\varepsilon)^{n+1}} \int_0^1 (1-p)^n = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (5)$$

3. Из проведенных оценок следует, что если не удастся заранее по каким-нибудь соображениям ограничить ε снизу не очень малой величиной, то при применении метода случайного поиска с градиентным спуском нужно ограничиться не очень большим количеством итераций, так как для дальнейшего улучшения результата может потребоваться количество итераций, во много раз превосходящее уже проделанное количество итераций. Допустим, ищется минимум функции m переменных. Пусть минимально возможная относительная ширина области притяжения глобального минимума по каждому из переменных равна $1/r$.

Тогда, очевидно, $\varepsilon = (1/r)^m$ и из раздела 2 следует, что отношение среднего числа итераций, необходимых для улучшения уже достигнутого результата, к числу уже проведенных итераций не меньше, чем

$$\frac{m(1-\alpha)\ln r}{e}. \quad (6)$$

Рассмотрим следующий конкретный числовой пример: пусть $r = 100$, $m = 30$, количество проделанных итераций $n = 1000$, тогда $\alpha = -\log_e n = 1/20$ и выражение (6) равно

$$\frac{30 \cdot 19 \cdot \ln 100}{e \cdot 20} \approx 48,6.$$

Таким образом, в этом примере для улучшения результата, полученного после 1000 итераций, нужно проделать дополнительно в среднем не менее 48 600 итераций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М.—Л., Гостехизд., 1950.

Поступила в редакцию
6 III 1967

АКТУАРНЫЕ РАСЧЕТЫ ПО СТРАХОВАНИЮ ДЕТЕЙ

Э. Г. КАГАЛОВСКАЯ

(Москва)

Госстрах СССР начал проводить операции нового вида долгосрочного страхования жизни — страхование детей, предполагающее создание определенной суммы сбережений к совершеннолетию ребенка и представляющее собой страхование на дожитие.

Финансовая устойчивость операций по вновь вводимому виду страхования зависит прежде всего от обоснованных тарифных ставок. Исчисление тарифных ставок базируется на теории актуарных расчетов, являющейся системой математических и статистических методов, регламентирующих финансовые взаимоотношения между страховщиком и страхователем.

Исходным моментом для расчетов нетто-ставок* послужила таблица смертности городского жевского населения, составленная ЦСУ СССР по результатам последней

* В нетто-ставках не учтены расходы на ведение операций.