Таким образом, при количестве уже проведенных итераций порядка $\varepsilon^{-\alpha}$ среднее количество дополнительных итераций, нужных для дальнейшего улучшения результата, превышает количество уже проведенных итераций примерно в $\ln \varepsilon^{\alpha-1}/e$ раз.

Если количество проведенных итераций имеет порядок ε^{-1}, то среднее количество дополнительных итераций имеет тот же самый порядок. Действительно, из (3) следует

$$M_n^{-} \leqslant \frac{(n+1)}{\varepsilon(1-\varepsilon)^{n+1}} \int\limits_{\varepsilon}^{1} (1-p)^n = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{5}$$

3. Из проведенных оценок следует, что если не удается заранее по каким-нибудь соображениям ограничить ε снизу не очень малой величиной, то при применении метода случайного поиска с градиентным спуском нужно ограничиться не очень большим количеством итераций, так как для дальнейшего улучшения результата может потребоваться количество итераций, во много раз превосходящее уже проделанное количество итераций. Допустим, ищется минимум функции m переменных. Пусть минимально возможная относительная ширина области притяжения глобального минимума по каждому из переменных равна $1/r$.

Тогда, очевидно, $\varepsilon = (1/r)^m$ и из раздела 2 следует, что отношение среднего числа итераций, необходимых для улучшения уже достигнутого результата, к числу уже проведенных итераций не меньше, чем

$$\frac{m(1-\alpha)\ln r}{e}. \tag{6}$$

Рассмотрим следующий конкретный числовой пример: пусть $r = 100$, $m = 30$, количество проделанных итераций $n = 1000$, тогда $\alpha = -\log_{\varepsilon} n = {}^1/_{20}$ и выражение (6) равно

$$\frac{30 \cdot 19 \cdot \ln 100}{e \cdot 20} \approx 48{,}6.$$

Таким образом, в этом примере для улучшения результата, полученного после 1000 итераций, нужно проделать дополнительно в среднем не менее 48 600 итераций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М.— Л., Гостехиздат., 1950.

Поступила в редакцию
6 III 1967

АКТУАРНЫЕ РАСЧЕТЫ ПО СТРАХОВАНИЮ ДЕТЕЙ

Э. Г. КАГАЛОВСКАЯ

(Москва)

Госстрах СССР начал проводить операции нового вида долгосрочного страхования жизни — страхование детей, предполагающее создание определенной суммы сбережений к совершеннолетию ребенка и представляющее собой страхование на дожитие.

Финансовая устойчивость операций по вновь вводимому виду страхования зависит прежде всего от обоснованных тарифных ставок. Исчисление тарифных ставок базируется на теории актуарных расчетов, являющейся системой математических и статистических методов, регламентирующих финансовые взаимоотношения между страховщиком и страхователем.

Исходным моментом для расчетов нетто-ставок * послужила таблица смертности городского женского населения, составленная ЦСУ СССР по результатам последней

* В нетто-ставках не учтены расходы на ведение операций.

Всесоюзной переписи населения, и норма роста денег (норма доходности) в размере 3% годовых.

При выводе формул применялись следующие обозначения: x — возраст ребенка при заключении договора страхования; n — срок страхования; l_x, l_{x+1}, $l_{x+2}\ldots$ и т. д.— числа доживающих в соответствии с принятой таблицей смертности; d_x, d_{x+1}, $d_{x+2},\ldots$ и т. д.— числа умирающих; p — годичная нетто-ставка; mp — сумма уплаченных в течение m лет взносов.

Вывод формулы для исчисления годичной нетто-ставки. Известно, что современная стоимость взносов страхователя должна быть равна современной стоимости выплат страховщика. Это равенство можно представить следующим образом

$$p\sum_{m=0}^{n-1} l_{x+m}v^m = kp\sum_{m=0}^{n-1}(m+1)d_{x+m}v^{m+1} + l_{x+n}v^n,$$

где $p\sum\limits_{m=0}^{n-1} l_{x+m}v^m$ — современная стоимость взносов страхователя;

$kp\sum\limits_{m=0}^{n-1}(m+1)d_{x+m}v^{m+1}$ — современная стоимость взносов, возвращаемых в случае смерти застрахованного, а $l_{x+n}v^n$ — современная стоимость выплат по дожитию.

Преобразуем левую сторону равенства

$$p\sum_{m=0}^{n-1} l_{x+m}v^m = p(l_x + l_{x+1}v + \ldots + l_{x+n-1}v^{n-1}) =$$

$$= \frac{v^x}{v^x}p(l_x + l_{x+1}v + \ldots + l_{x+n-1}v^{n-1}) = p\,\frac{l_xv^x + l_{x+1}v^{x+1} + \ldots + l_{x+n-1}v^{x+n-1}}{v^x} =$$

$$= \frac{p}{v^x}(D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}).$$

Но $D_x + D_{x+1} + \ldots + D_w = N_x$. Отсюда

$$\sum_{m=0}^{n-1} l_{x+m}v^m = (p/v^x)(N_x - N_{x+n}).$$

Преобразуем первое слагаемое правой стороны равенства

$$kp\sum_{m=0}^{n-1}(m+1)d_{x+m}v^{m+1} = kp(d_xv + 2d_{x+1}v^2 + \ldots + nd_{x+n-1}v^n) =$$

$$= kp\,\frac{d_xv^{x+1} + 2d_{x+1}v^{x+2} + \ldots + nd_{x+n-1}v^{x+n}}{v^x} = \frac{kp}{v^x}(C_x + 2C_{x+1} + \ldots + nC_{x+n-1}).$$

Поскольку $C_x + C_{x+1} + \ldots + C_w = M_x$, а $M_x + M_{x+1} + \ldots + M_w = R_x$,

$$kp\sum_{m=0}^{n-1}(m+1)d_{x+m}v^{m+1} = \frac{kp}{v^x}(R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}).$$

Таким образом,

$$\frac{p}{v^x}(N_x - N_{x+n}) = \frac{kp}{v^x}(R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}) + l_{x+n}v^n;$$

$$p[(N_x - N_{x+n}) - k(R_x - R_{x+n} - nM_{x+n})] = D_{x+n};$$

$$p = \frac{D_{x+n}}{(N_x - N_{x+n}) - k(R_x - R_{x+n} - nM_{x+n})}.$$

Когда $k = 1$, т. е. если предусмотрен возврат всей суммы нетто-ставок, формула выглядит так

$$p = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - R_x + R_{x+n} + nM_{x+n}}.$$

Это формулы praenumerando. Формулы postnumerando имеют следующий вид

$$p = \frac{D_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n+1} - k(R_x - R_{x+n} - nM_{x+n})},$$

когда $k = 1$,

$$p = \frac{D_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n+1} - R_x + R_{x+n} + nM_{x+n}}.$$

Вывод формулы для исчисления единовременной нетто-ставки. $\varepsilon_x = k\varepsilon_{x\cdot n}A_x + {}_nE_x$, где ε_x — единовременная нетто-ставка по страхованию детей, равная современной стоимости финансовых обязательств страхователя; ${}_nA_x$ — единовременная нетто-ставка по страхованию на случай смерти, исчисляемая по формуле ${}_nA_x = (M_x - M_{x+n}) / D_x$; ${}_nE_x$ — единовременная нетто-ставка по страхованию на дожитие, исчисляемая по формуле ${}_nE_x = (D_{x+n}) / D_x$; $(k\varepsilon_x\, {}_nA_x + {}_nE_x)$ — современная стоимость обязательств страховщика.

Преобразуем

$$\varepsilon_x - k\varepsilon_{x\,n}A_x = {}_nE_x; \quad \varepsilon_x = \frac{{}_nE_x}{1 - k_nA_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} : \left(1 - k\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}\right);$$

$$\varepsilon_x = \frac{D_{x+n}}{D_x - k(M_x - M_{x+n})}.$$

При $k = 1$

$$\varepsilon_x = \frac{D_{x+n}}{D_x - M_x + M_{x+n}}.$$

Брутто-ставка. Выше шла речь о нетто-ставках, соответствующих долгосрочным видам страховой ответственности. Прежде чем установить окончательный размер страховых тарифов, в них включается еще нетто-ставка за утрату трудоспособности (в случае, если этот вид страховой ответственности предусмотрен условиями страхования) и нагрузка для компенсации расходов на ведение операций.

В тарифы по страхованию детей включена нетто-ставка за утрату трудоспособности в размере 30 коп. в год на 100 руб. страховой суммы и нагрузка, равная 10% годичной брутто-ставки и 7% единовременной брутто-ставки.

Вывод формул для исчисления резерва взносов при годичной их уплате. По операциям долгосрочного страхования жизни откладывается резерв взносов, который в народном хозяйстве играет роль одного из источников долгосрочных кредитов. Размеры резерва взносов определяются на базе теории актуарных расчетов.

После истечения t лет от начала действия договора страхования современная стоимость предстоящих платежей страхователя равна

$$p_{n-t}d_{x+t} = p\frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}.$$

Современная стоимость обязательств страховщика равна

$$kp\sum_{m=1}^{n-t}(t+m)\,d_{x+t+m-1}v^m : l_{x+t} + {}_{n-t}E_{x+t} = \frac{kp}{l_{x+t}}[(t+1)\,d_{x+t}v +$$

$$+ (t+2)\,d_{x+t+1}v^2 + \ldots + nd_{x+n-1}v^{n-t}] + {}_{n-t}E_{x+t} = \frac{kp}{l_{x+t}v^{x+t}}[(t+1)\,d_{x+t}v^{x+t+1} +$$

$$+ (t+2)\,d_{x+t+1}v^{x+t+2} + \ldots + nd_{x+n-1}v^{x+n}] + {}_{n-t}E_{x+t} =$$

$$= \frac{kp}{D_{x+t}}[(t+1)C_{x+t} + (t+2)C_{x+t+1} + \ldots + nC_{x+n-1}] + {}_{n-t}E_{x+n} =$$

$$= \frac{kp}{D_{x+t}}\Big\{t(C_{x+t} + C_{x+t+1} + \ldots + C_{x+n-1}) + [C_{x+t} + 2C_{x+t-1} + 3C_{x+t+2} + \ldots +$$

$$+ (n-t)C_{x+n-1}]\Big\} + \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} = \frac{kp}{D_{x+t}}[t(M_{x+t+1} - M_{x+n}) +$$

$$+ R_{x+t} - R_{x+n} - (n-t)M_{x+n}] + \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} =$$

$$= \frac{kp}{D_{x+t}}(tM_{x+t+1} + R_{x+t} - R_{x+n} - nM_{x+n}) + \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}.$$

Резерв взносов к концу t-го года действия договора страхования, обозначаемый символом ${}_tV$, равен разности между современной стоимостью обязательств страховщика и современной стоимостью предстоящих платежей страхователя

$${}_tV = \frac{kp}{D_{x+t}}(tM_{x+t+1} + R_{x+t} - R_{x+n} - nM_{x+n}) + \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - p\,\frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}.$$

Проведя преобразования, получим

$${}_tV = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}\left(1 + k\,\frac{tM_{x+t+1} - nM_{x+n} + R_{x+t} - R_{x+n} - N_{x+t} - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - R_x + R_{x+n} - nM_{x+n}}\right).$$

При $k = 1$

$${}_tV = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t} - R_x + R_{x+t} + tM_{x+t+1}}{N_x - N_{x+n} - R_x + R_{x+n} - nM_{x+n}}.$$

Если произвести аналогичные преобразования, но используя вместо ренты praenumerando ренту postnumerando, указанные формулы превратятся в следующие

$${}_tV = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}\left(1 + k\,\frac{tM_{x+t+1} - nM_{x+n} + R_{x+t} - R_{x+n} - N_{x+t+1} - N_{x+n+1}}{N_{x+1} - N_{x+n+1} - R_x + R_{x+n} - nM_{x+n}}\right).$$

При $k = 1$

$${}_tV = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_{x+1} - N_{x+t+1} - R_x + R_{x+t} - tM_{x+t+1}}{N_{x+1} - N_{x+n+1} - R_x + R_{x+n} - nM_{x+n}}.$$

Вывод формул для исчисления резерва взносов по договорам, оплаченным единовременно. Современная стоимость платежей страхователя равна 0, так как взносы погашены единовременно.

Современная стоимость обязательств страховщика равна

$$k\varepsilon_x\ {}_{n-t}A_{x+t} + {}_{n-t}E_{x+t}.$$

Тогда

$${}_t{}^1V = k\varepsilon_x\ {}_{n-t}A_{x+t} + {}_{n-t}E_{x+t}.$$

Следовательно,

$${}_t{}^1V = k\,\frac{D_{x+n}}{D_x - M_x + M_{x+n}} \cdot \frac{D_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} + \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}.$$

При $k = 1$

$${}_t{}^1V = \frac{D_{x+n}}{D_x - M_x + M_{x+n}} \cdot \frac{D_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} + \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}.$$

Поступила в редакцию
2 IV 1968