

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ АППРОКСИМАЦИОННОЙ СХЕМЫ МНОГОСТУПЕНЧАТОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Г. В. МАРТЫНОВ, А. К. ПИТЕЛИН

(Москва)

В настоящее время имеется ряд работ, посвященных теоретическому анализу проблем оптимизации социалистической экономики. Высказаны те или иные предложения по построению народнохозяйственного и локального критериев, по организации итеративных процедур оптимизации в многоступенчатых системах управления. В связи с этим особую важность приобретает проведение экспериментальных исследований.

Объектами экспериментирования могут быть, например, те или иные части народного хозяйства: отрасли, регионы, предприятия. Экспериментальные работы такого рода сейчас широко ведутся.

Однако всякая искусственно выделенная часть народного хозяйства неизбежно теряет ряд специфических черт, присущих экономике в целом. Поэтому эксперименты такого рода не могут дать ответ на некоторые весьма важные вопросы, поставленные теорией оптимального функционирования. В связи с этим представляется неизбежным проведение экспериментов другого типа: на малых условных моделях, сохраняющих, однако, специфические черты народного хозяйства в целом. Это должны быть модели многоступенчатого типа с механизмом вертикальных и горизонтальных связей, с разумно выбранными общим и локальным критериями оптимальности.

Данная статья посвящена экспериментальным исследованиям аппроксимационной схемы многоступенчатой оптимизации экономики, предложенной В. Ф. Пугачевым [1, 2], которые проводились на условной трехступенчатой статической модели народного хозяйства. Цель эксперимента — отработка методологии построения условных моделей, методологии увязки отдельных частных моделей в единую многоступенчатую модель, исследование аппроксимационных алгоритмов с точки зрения практической скорости их сходимости, разработка эффективных алгоритмов для решения задач по моделям отдельных уровней.

1. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

При реализации аппроксимационной схемы могут использоваться два способа аппроксимации производственных возможностей, позволяющих значительно сокращать размерность задачи, не разрушая ее экономической структуры.

В первом случае используется информация об оптимальном плане объекта x^s и оценках p^s , соответствующих этому плану. Аппроксимация осуществляется с помощью неравенства $(\overset{0}{h^s}, \overset{0}{x^s}) \leq 1$, где вектор $\overset{0}{h^s}$ образуется путем нормирования p^s на величину $(\overset{0}{p^s}, \overset{0}{x^s})$.

Во втором случае для проведения аппроксимации из множества допустимых планов M_s объекта s выбирается некоторое число планов $\{a_{js}^s\}$

(j — номер выбранного плана), характеризующих возможные варианты изменения структуры выпуска и затрат по данному объекту, и на базе этих планов строится аппроксимирующий многогранник

$$x^s = \sum_j a_j^s \xi_j^s, \quad \sum_j \xi_j^s \leq 1, \quad \xi_j^s \geq 0. \quad (1)$$

Здесь ξ_j^s выступает как интенсивность использования базовых планов a_j^s в плане x^s . Построение множества $\{a_j^s\}$ может быть выполнено, например, путем последовательного нахождения ряда оптимальных планов по одной и той же модели объекта при соответствующих изменениях его целевой функции [1].

Для проведения эксперимента сформируем модель, имитирующую три уровня хозяйственного руководства. Будем считать, что объектами первого уровня являются предприятия, второго — отрасли, и, наконец, объектом третьего, высшего уровня будет народное хозяйство в целом (межотраслевая модель).

Применительно к предприятиям целесообразно использовать второй из указанных выше способов аппроксимации, поскольку, во-первых, он более точен и, во-вторых, позволяет совместно учитывать продукцию и затраты. Базовые планы аппроксимации полагаем известными для каждого предприятия. Пусть при этом в качестве одного из таких планов (a_0^s) берется существующее плановое задание, а остальные планы выбраны с учетом возможной специализации предприятия по выпуску каждого из продуктов, присутствующих в плане a_0^s .

Группа предприятий, выпускающих однородную продукцию, объединяется в отрасль. Предположим, что номенклатура выпуска разных отраслей при этом не пересекается и, таким образом, будем рассматривать «чистые» отрасли.

Однако было бы неправильным сводить построение отраслевых моделей к примитивному объединению соответствующих моделей предприятий. Необходимо попытаться в той или иной форме отразить в отраслевой модели хотя бы часть факторов, связанных с существованием отрасли как единого целого в рамках более общей народнохозяйственной системы. К числу таких факторов следует отнести, например, лимитированность ресурсов, а также наличие промежуточных продуктов внутри каждой отрасли.

В народнохозяйственную модель включаются отрасли, одни из которых обеспечивают в основном непроизводственное потребление, другие же, наоборот, преимущественно удовлетворяют потребности производства. Необходимо также учесть ограниченность для народного хозяйства в целом таких ресурсов, как труд, земля и т. д. Поэтому система имеющихся отраслевых моделей должна быть дополнена соответствующими связующими ограничениями.

Завершаем построение межотраслевой модели введением критерия оптимальности, который должен в той или иной форме отражать цель народного хозяйства — максимальное удовлетворение потребностей социалистического общества.

Будем считать, что потребление продукции каждой отрасли осуществляется в виде обусловленных структурой спроса ассортиментных наборов (комплектов). Тогда целевая функция межотраслевой модели оптимизации должна отражать предпочтение спроса по группам потребительских товаров, составляющим упомянутые ассортиментные наборы. В данной работе предполагается, что оптимальному удовлетворению спроса на товары непроизводственного потребления соответствует максимум некоторой квадратичной функции от числа реализованных потребительских наборов

Следует заметить, что задание основных пропорций по группам потребительских товаров не означает фиксации потребления на каком-то заранее определенном уровне, так как абсолютные величины потребительских наборов являются переменными и устанавливаются в процессе оптимизации целевой функции.

Изложенное выше позволяет представить условную народнохозяйственную модель оптимального текущего планирования в виде следующей экстремальной задачи

$$\varphi(\lambda) = \sum_s \lambda_s (d_s' - d_s'' \lambda_s) \rightarrow \max \quad (2)$$

при условиях

$$x_i^s - \sum_{k \neq s} x_i^k - \lambda_s N_i^s \geq 0 \quad i \in \bigcup_s I_p^s, \quad (3)$$

$$x_i^s \leq r_i^s, \quad i \in I_r^s, \quad (4)$$

$$x_i^s \geq 0, \quad i \in I_0^s, \quad (5)$$

$$\sum_s x_i^s \leq R_i, \quad i \in I_R, \quad (6)$$

где

$$x_i^s = \sum_{l(s)} \sum_{j(s, l)} a_{ij}^{sl} \xi_j^{sl}, \quad (7)$$

$$\sum_{j(s, l)} \xi_j^{sl} \leq 1, \quad \xi_j^{sl} \geq 0. \quad (8)$$

Здесь s и k — индексы отраслей, $s, k = 1, 2, \dots, K$; i — индекс продукта или ресурса; $l(s)$ — номера предприятий s -й отрасли; $j(s, l)$ — номера производственных способов для l -го предприятия s -й отрасли; I_p^s — множество индексов продуктов, выпускаемых s -й отраслью; I_r^s — множество индексов лимитированных ресурсов s -й отрасли; I_0^s — множество индексов промежуточных продуктов s -й отрасли; I_R — множество индексов ограниченных народнохозяйственных ресурсов; a_{ij}^{sl} — i -я компонента j -го производственного способа на l -м предприятии s -й отрасли; ξ_j^{sl} — интенсивность использования соответствующего производственного способа; r_i^s, R_i — числа, характеризующие запасы отраслевых и народнохозяйственных ресурсов; N_i^s — неотрицательные числа, определяющие пропорции ассортиментного набора конечной продукции s -й отрасли; λ_s — переменная, обозначающая число потребительских ассортиментных наборов, выпускаемых s -й отраслью; d_s' и d_s'' — неотрицательные коэффициенты целевой функции.

Ограничения (3) выражают условие баланса по всей номенклатуре продуктов. Неравенства (4) и (5) отражают наличие лимитированных ресурсов и промежуточных продуктов внутри каждой отрасли. Группа условий (6) учитывает ограниченность ресурсов для народного хозяйства в целом.

Непосредственное решение задачи (2) — (8) в условиях реальной номенклатуры нецелесообразно, да и вряд ли вообще возможно ввиду ее чрезвычайно большой размерности. В настоящей работе предпринимается попытка построить на основе аппроксимационной схемы многоступенчатой оптимизации итеративный алгоритм, позволяющий за сравнительно небольшое число шагов приблизиться к оптимуму задачи (2) — (8) путем решения некоторой последовательности локальных (отраслевых) задач существенно меньшей размерности.

2. АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ

Основная идея алгоритма состоит в следующем. На уровне отрасли решается некоторая задача оптимизации и одновременно строится гиперплоскость, аппроксимирующая производственные возможности отрасли. С помощью коэффициентов аппроксимирующей гиперплоскости в каждой отрасли происходит агрегирование первичных продуктов и тем самым формирование обобщенных отраслевых продуктов. На верхнем уровне решается межотраслевая задача оптимизации в обобщенных продуктах. Полученные в результате решения отраслевые планы определенным способом детализируются (разукрупняются до прежней номенклатуры); при этом первоначальная структура отраслевого выпуска изменяется. Если детализированное решение оказывается несбалансированным, то по определенному правилу формируются и вновь решаются отраслевые задачи оптимизации, и процесс продолжается. В результате балансировка в детализированной номенклатуре осуществляется по двум направлениям: на верхнем уровне — путем пересмотра конечного выпуска и на уровне отраслей — путем пересмотра структуры отраслевых планов в дробной номенклатуре.

Следует заметить, что хотя в данной работе и рассматривается трехступенчатая модель, переработка экономической информации осуществляется только на двух уровнях: отраслевом и межотраслевым. Это объясняется наличием готовых аппроксимационных моделей предприятий, которые в процессе оптимизации не изменяются.

Рассмотрим принципиальную схему алгоритма более подробно, используя формальные обозначения.

Пусть каждая отрасль решает некоторую задачу оптимизации

$$\max f_s(x^s) \quad (9)$$

при условиях

$$x_i^s \leq r_i^s, \quad i \in I_r^s, \quad (10)$$

$$x_i^s \geq 0, \quad i \in I_p^s \cup I_0^s, \quad (11)$$

где

$$x_i^s = \sum_{l(s)} \sum_{j(s, l)} a_{ij}^{sl} \xi_j^{sl}, \quad \sum_{j(s, l)} \xi_j^{sl} \leq 1, \quad \xi_j^{sl} \geq 0.$$

Обозначим оптимальный план задачи (9) — (11) через x^s и вектор оценок выпускаемых отраслью продуктов через p^s . Аппроксимируем производственные возможности отрасли неравенством

$$(p^s, x^s) \leq (p^s, x^s) \quad (12)$$

или, что то же

$$(h^s, x^s) \leq 1, \quad (13)$$

где

$$h^s = \left\{ h_i^s / h_i^s = \frac{p_i^s}{(p^s, x^s)}, \quad i \in I_p^s \right\}$$

— вектор коэффициентов взаимозаменяемости продуктов отраслевого выпуска на стадии производства.

Величина $h_i^s x_i^s$, $i \in I_p^s$ определяет долю i -го продукта в производстве единицы обобщенного отраслевого продукта Z_s , где

$$Z_s = (h^s, x^s). \quad (14)$$

Таким образом, каждая отрасль представляет свои производственные возможности одним неравенством

$$Z_s \leq 1, \quad s = 1, 2, \dots, K. \quad (15)$$

Так как вектор конечной продукции отрасли $y^s = \lambda_s N^s$, то с помощью коэффициентов взаимозаменяемости величину обобщенного конечного продукта s -й отрасли можно представить в виде

$$Y_s = (\overset{0}{h}^s, \lambda_s N^s) = \lambda_s (\overset{0}{h}^s, N^s). \quad (16)$$

Из равенства (16) следует

$$\lambda_s = \frac{Y_s}{(\overset{0}{h}^s, N^s)}. \quad (17)$$

Для построения межотраслевого баланса в обобщенных продуктах сформируем матрицу прямых затрат $\bar{A} = (\bar{a}_{ks})$ следующим образом

$$\bar{a}_{ks} = \begin{cases} 0 & \text{при } k = s \\ (\overset{0}{h}^k, \overset{0}{x}^s) & \text{при } k \neq s; s, k = 1, \dots, K. \end{cases} \quad (18)$$

В этих обозначениях условие межотраслевого баланса обобщенных продуктов выразится равенством

$$(E - \bar{A})Z - Y = \bar{0}, \quad (19)$$

где $Z = (Z_1, \dots, Z_K)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_K)$ — векторы валовой и конечной продукции в укрупненной номенклатуре.

Нормативы затрат народнохозяйственных ресурсов на единицу обобщенного отраслевого выпуска определим по формуле

$$b_i^s = \sum_{l(s)} \sum_{j(s,l)} a_{ij}^{sl} \overset{0}{x}_j^{sl}, \quad s = 1, 2, \dots, K, i \in I_R. \quad (20)$$

Тогда условие их ограниченности выразится неравенством

$$\sum_s b_i^s Z_s \leq R_i, \quad i \in I_R. \quad (21)$$

Завершим постановку обобщенной задачи межотраслевой оптимизации преобразованием функции цели. Если в $\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_K)$ подставить выражение для λ_s из (17), то задача верхнего уровня будет

$$\max \bar{\Phi}(Y) \quad (22)$$

при условиях

$$(E - \bar{A})Z - Y = \bar{0}, \quad (23)$$

$$BZ \leq R, \quad (24)$$

$$Z \leq e, \quad (25)$$

$$Z, Y \geq 0, \quad (26)$$

где $B = (b_i^s)$, $e = (1, 1, \dots, 1)$.

Обозначим оптимальное решение задачи (22) — (26) через $\bar{Z}$ и $\bar{Y}$. Учитывая (17), получим развертку решения $\bar{Y}$ в детализированной номенклатуре

$$\bar{\lambda}_s = \frac{\bar{Y}_s}{(\overset{0}{h}^s, N^s)}, \quad \bar{y}^s = \bar{\lambda}_s N^s. \quad (27)$$

Наконец, корректируем отраслевые планы в детализированной номенклатуре путем их умножения на значения переменных $\bar{Z}_s$

$$\bar{x}^s = \bar{Z}_s^0 x^s. \quad (28)$$

Нетрудно убедиться в том, что все $\bar{x}^s$ суть допустимые планы соответствующих отраслей и удовлетворяют всем ограничениям задачи (2) — (8), кроме, быть может, ограничений балансового типа. Если последние не выполняются, то вектор невязок, вычисленный по формуле

$$\Delta = \sum_s (\bar{y}^s - \bar{x}^s), \quad (29)$$

будет иметь положительные компоненты $\Delta_i > 0$, $i \in \bigcup_s I_p^s$. В этом случае делается попытка ликвидировать или хотя бы уменьшить несбалансированность путем поиска новых отраслевых планов. Для этого на очередной итерации формируются и решаются отраслевые задачи оптимизации со специально подобранным локальным критерием.

Проблема выбора надлежащего локального критерия требует специальной разработки. В целях упрощения вычислительной схемы (в рамках экспериментальных расчетов) в данной работе все оптимальные планы отраслей определялись исходя из требования максимизации выпуска продукции в заданных пропорциях. Этот критерий хорошо известен; при определенных допущениях его можно рассматривать как одну из модификаций общей формы критерия народнохозяйственной эффективности [2, 3].

Итак, отраслевая задача в ее окончательной формулировке имеет вид

$$\max \theta_s \quad (30)$$

при условиях

$$x_i^s \geq \theta_s \bar{N}_i^s, \quad i \in I_p^s, \quad (31)$$

$$x_i^s \leq r_i^s, \quad i \in I_r^s \cup I_0^s. \quad (32)$$

Здесь θ_s — величина, показывающая число комплектов выпускаемой продукции, а $\bar{N}^s$ — построенный по результатам предыдущей итерации вектор, определяющий структуру отраслевого комплекта. Так, если $\bar{x}^s(t-1)$ — план s -й отрасли, определенный в результате решения межотраслевой обобщенной задачи на $(t-1)$ -й итерации, а $\Delta(t-1)$ — вектор невязок балансовых ограничений на той же итерации, то

$$\bar{N}_i^s(t) = \max \{ \bar{x}^s(t-1) + \Delta_i(t-1) 0 \}, \quad i \in I_p^s. \quad (33)$$

В результате решения отраслевых задач возникают новые оптимальные отраслевые планы $x^s(t)$ и соответствующие им оценки $\bar{p}^s(t)$, что позволяет реализовать следующую итерацию. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут выполнены с определенной степенью точности все ограничения задачи (2) — (8).

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОТРАСЛЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим более детально структуру ограничений отраслевой задачи. Учитывая (9) — (11) и (30) — (32), можно записать отраслевую задачу оптимизации в виде

$$\max \theta^{**} \quad (34)$$

* В дальнейшем будем обозначать $\max_i \{\Delta_i, 0\}$ через $\bar{\Delta}$.

** Здесь нет необходимости вводить отраслевой индекс s , ибо мы предполагаем, что все отраслевые задачи имеют одинаковую структуру.

при условиях

$$-\sum_l \sum_{j(l)} a_{ij}^l \xi_j^l + \theta \bar{N}_i \leq 0, \quad i \in I_p, \quad (35)$$

$$\sum_l \sum_{j(l)} a_{ij}^l \xi_j^l \leq r_i, \quad i \in I_r \cup I_0, \quad (36)$$

$$\sum_{j(l)} \xi_j^l \leq 1, \quad (37)$$

$$\xi_j^l \geq 0. \quad (38)$$

Наряду с ограничениями общего вида эта задача содержит ряд специальных ограничений (37), которые существенным образом будут использованы в рассматриваемом алгоритме.

Обозначим номер итерации через t . Пусть $p(t)$ и $q(t)$ — неотрицательные векторы оценок, соответствующих ограничениям (35) и (36). Вычислим оценку каждого из производственных способов (a_j^l) по формуле

$$V_j^l(t) = \sum_{i \in I_p} p_i(t) a_{ij}^l - \sum_{i \in I_r \cup I_0} q_i(t) a_{ij}^l. \quad (39)$$

Оценку каждого предприятия полагаем равной

$$V^l(t) = \max_{j(l)} \{V_j^l(t), 0\} = V_{j_0}^l(t). \quad (40)$$

Определим условный план отрасли $\hat{x}(t)$ следующим образом. Будем считать, что каждое предприятие реализует в качестве своего условного плана тот из производственных способов, оценка которого максимальна и положительна (если все производственные способы имеют отрицательные оценки, то условным планом предприятия будет служить нулевой вектор). Суммируя условные планы предприятий, получим условный отраслевой план.

В формальных обозначениях имеем

$$\hat{\xi}_j^l(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = j_0 \text{ и } V^l(t) > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (41)$$

$$\hat{x}(t) = \sum_l \sum_{j(l)} a_j^l \hat{\xi}_j^l(t). \quad (42)$$

План $\hat{x}(t)$ всегда удовлетворяет ограничениям (37), (38), но может не удовлетворять ограничениям (36). Что касается ограничений (35), то формально они выполнены всегда, хотя значение θ может при этом оказаться весьма далеким от оптимального.

Заметим, однако, что изменяя значения оценок p и q , мы можем воздействовать на «выбор» предприятий и тем самым на формирование условного отраслевого плана. Напрашивается мысль: нельзя ли организовать процесс, в котором последовательное изменение оценок приводит в конечном счете к построению плана $\hat{x}(T)$, удовлетворяющего всем ограничениям и близкого к оптимальному?

Несложный анализ системы ограничений задачи (34) — (38) показывает, однако, что при любых оценках план $\hat{x}$ может быть допустимым и тем более оптимальным только в крайне редких специальных случаях, обусловленных структурой матрицы условий. Поэтому введем в рассмотрение так называемый осредненный, или накопленный план $\tilde{x}(t)$, образуемый как не-

которая выпуклая линейная комбинация на множестве условных отраслевых планов

$$\tilde{x} = \sum_n \alpha_n \hat{x}_n, \quad \sum_n \alpha_n = 1, \quad \alpha_n \geq 0. \quad (43)$$

В итеративной процедуре для вычисления значений $\tilde{x}(t)$ используем рекуррентное соотношение

$$\tilde{x}(t) = \alpha(t) \hat{x}(t) + (1 - \alpha(t)) \tilde{x}(t-1), \quad (44)$$

где $\alpha(t)$ — некоторая убывающая положительная функция.

Нетрудно показать, что любое допустимое решение системы неравенств (35) — (38) может быть представлено в виде (43) и, следовательно, в виде (44) при соответствующем выборе условных планов и величин $\alpha(t)$. Учитывая изложенное, будем искать решение задачи (34) — (38) в виде (44).

Если бы нам было известно максимальное допустимое значение переменной θ (θ_0), то для оценки полученного к моменту t результата всякий раз было бы достаточно рассмотреть невязки неравенств (36) и неравенств

$$-\sum_l \sum_{j \in I_0} a_{ij} \tilde{x}_j^l + \theta_0 \bar{N}_i \leq 0, \quad i \in I_p. \quad (35a)$$

Поскольку, однако, θ_0 не может быть известно до решения задачи, найдем достаточное приближение этой величины.

Рассмотрим задачу, двойственную к (34) — (38)

$$\min U(q, V) = \sum_{i \in I_r \cup I_0} q_i r_i + \sum_l V^l \quad (45)$$

при условиях

$$\sum_{i \in I_p} p_i \bar{N}_i \geq 1, \quad (46)$$

$$-\sum_{i \in I_p} p_i a_{ij}^l + \sum_{j \in I_r \cup I_0} q_j a_{ij}^l + V^l \geq 0, \quad (47)$$

$$p_i \geq 0, \quad q_i \geq 0, \quad V^l \geq 0. \quad (48)$$

Заметим, что векторы $p(t)$, $q(t)$ и величины $V^l(t)$ образуют допустимый план задачи (45) — (48)*.

Подставляя $q(t)$ и $V^l(t)$ в (45), вычисляем в момент t некоторое значение функционала двойственной задачи. По теореме двойственности линейного программирования всегда $U(q, V) \geq \theta_0$, поэтому любое значение U может быть использовано в качестве верхней оценки величины θ_0 . Учитывая этот факт, построим приближение $\bar{\theta}_0$ по следующему правилу

$$\bar{\theta}(t) = \min_{\tau \leq t} \{U(q(\tau), V(\tau)) - \delta\}, \quad (49)$$

где δ — положительная константа порядка 0,001. Как показала практика расчетов, переменная $\bar{\theta}(t)$ достаточно быстро достигает значений, близких к θ_0 , и поэтому ее использование в наших целях можно считать оправданным.

Изменение оценок производится по следующему алгоритму. Полагаем

$$p_i(t+1) = \frac{p_i'(t+1)}{\sum_{i \in I_p} p_i'(t+1) \bar{N}_i}, \quad (50)$$

* Условию (46) легко удовлетворить простой нормировкой вектора $p(t)$.

где

$$p_i'(t+1) = \begin{cases} p_i(t) \left(1 + \frac{\alpha(t)}{n_i(t)}\right), & \text{если } \tilde{x}_i(t) < \bar{\theta}(t) \bar{N}_i \text{ и } \hat{x}_i(t) < \bar{\theta}(t) \bar{N}_i, \quad (a) \\ p_i(t) / \left(1 + \frac{\alpha(t)}{n_i(t)}\right), & \text{если } \tilde{x}_i(t) \geq \bar{\theta}(t) \bar{N}_i \text{ и } \hat{x}_i(t) \geq \bar{\theta}(t) \bar{N}_i, \quad (б) \\ p_i(t) & \text{в остальных случаях.} \quad (в) \end{cases} \quad (51)$$

Аналогично изменяются и оценки $q(t)$

$$q_i(t+1) = \begin{cases} q_i(t) \left(1 + \frac{\alpha(t)}{n_i(t)}\right), & \text{если } \tilde{x}_i(t) > r_i \text{ и } \hat{x}_i(t) > r_i, \quad (a) \\ q_i(t) / \left(1 + \frac{\alpha(t)}{n_i(t)}\right), & \text{если } \tilde{x}_i(t) \leq r_i \text{ и } \hat{x}_i(t) \leq r_i, \quad (б) \\ q_i(t) & \text{в остальных случаях.} \quad (в) \end{cases} \quad (52)$$

Здесь $n_i(t)$ — натуральное число, способ вычисления которого подробно рассматривается ниже.

Если имеет место случай (а), а $p_i(t) = 0$ или $q_i(t) = 0$, то значение $p_i(t+1)$ ($q_i(t+1)$) полагаем равным $1/t$.

Таким образом, в представленном алгоритме рассматриваются и анализируются не только величины $\tilde{x}(t)$, но и условные планы $\hat{x}(t)$. Этот прием, составляющий идею метода «двойного регулирования» [4], основывается на следующем. Если вектор $\tilde{x}(t)$ характеризует текущее состояние регулируемой системы, то $\hat{x}(t)$ можно рассматривать как величину, характеризующую тенденцию изменения этого состояния. Регулирование одновременно по состоянию и тенденции является, как показали эксперименты, основным условием сходимости алгоритмов подобного типа.

Остановимся теперь более подробно на описании изменения величин $\alpha(t)$ и $n_i(t)$. Как показано В. А. Волконским [5], необходимым условием сходимости процесса, имитирующего выпуклую игру, является стремление весов осреднения к нулю при $t \rightarrow \infty$. При этом $\sum_t \alpha(t)$ должна стремиться к ∞ . В нашем случае требования такого рода остаются в силе, хотя процесс оптимизации и отличается существенным образом от рассмотренного в [5].

Существует ряд способов алгоритмической реализации изменения коэффициентов взвешивания. Можно, например, в качестве $\alpha(t)$ использовать различные гладкие медленно убывающие функции (например, $1/t$, $1/\sqrt{t}$ и т. п.). Нам представляется целесообразным в роли $\alpha(t)$ использовать ступенчатые функции. Заметим, что использование ступенчатой функции, как правило, позволяет ускорить сходимость итерационного процесса. Применение ступенчатых функций в итеративных процедурах описывается в [4, 6].

В нашем случае полагаем

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha(t-1)/2, & \text{если } t \geq T(t), \\ \alpha(t) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (53)$$

$$T(t) = \begin{cases} T(t-1), & t < T(t-1), \\ kT(t-1), & t \geq T(t-1), \end{cases}$$

где $k \geq 3$ — константа, неизменяемая в ходе всего процесса вычислений. В качестве $\alpha(0)$ обычно выбирается 1, а $T(0) = k$.

В экспериментальных расчетах по отраслевым моделям выбирались различные значения k . Лучшие результаты были получены при $k = 4$.

Величины $n_i(t)$ формально определяются как число переходов компонент $\tilde{x}_i(t)$ и $\hat{x}_i(t)$ из состояний (а) в (б), и наоборот (см. формулы (51) и (52)). По своему смыслу они предназначены для обеспечения более гибкой коррекции оценок в ходе итерационного процесса. При этом предполагаем, что переменным $x_i(t)$ наиболее часто переходящим из одного состояния в другое, соответствуют наиболее достоверные значения оценок $p_i(t)$ и $q_i(t)$, которые в силу этого необходимо «законсервировать».

В заключение приведем некоторые результаты, касающиеся использования описанного алгоритма. В ходе экспериментов были проведены многократные расчеты по условным моделям отраслей с варьированием как структуры ассортиментных наборов, так и коэффициентов производственных способов. Для решения одного варианта отраслевой задачи с точностью до 0,5% требовалось в среднем около 100 итераций. В отдельных случаях для получения удовлетворительного результата оказывалось достаточно 20—50 итераций.

Необходимо также отметить, что с помощью алгоритмов подобного типа решались задачи большой размерности как линейного, так и целочисленного программирования по реальным моделям отраслей [4, 7, 8]. Эти задачи содержали десятки и даже сотни ограничений при большом количестве неизвестных и решались с необходимой точностью при весьма незначительных затратах машинного времени.

4. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ МЕЖОТРАСЛЕВОЙ ЗАДАЧИ

Обозначим номер текущей итерации через t . Будем в каждый фиксированный момент времени аппроксимировать нелинейную целевую функцию $\bar{\varphi}(Y_1, \dots, Y_K)$ линейным функционалом вида

$$G(Y(t)) = (C(t), Y(t)), \quad (54)$$

где

$$C(t) = (C_1(t), \dots, C_K(t)) \quad \text{и} \quad C_s(t) = \frac{\partial \bar{\varphi}(Y(t))}{\partial Y_s(t)}, \quad s = 1, 2, \dots, K.$$

Тогда линейризованная обобщенная задача примет вид

$$\max G(Y(t)) \quad (55)$$

при условиях

$$(E - \bar{A})Z(t) - Y(t) = \bar{0}, \quad (56)$$

$$BZ(t) \leq R, \quad (57)$$

$$Z(t) \leq e, \quad (58)$$

$$Z(t) \geq \bar{0}, \quad Y(t) \geq \bar{0}. \quad (59)$$

Предположим, что матрица $(E - \bar{A})$ неособенная и такова, что $(E - \bar{A})^{-1}Y \geq \bar{0}$ при $Y \geq \bar{0}$. Тогда возможна подстановка $Z(t) = (E - \bar{A})^{-1}Y(t)$, сокращающая размерность задачи, которая теперь принимает вид

$$\max (C(t), Y(t)) \quad (60)$$

при условиях

$$(E - \bar{A})^{-1}Y(t) \geq e, \quad (61)$$

$$\bar{B}Y(t) \leq R \quad (62)$$

$$Z(t), Y(t) \geq \bar{0} \quad (63)$$

где $\bar{B} = B(E - \bar{A})^{-1}$. Пусть

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} (E - \bar{A})^{-1} \\ \bar{R} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T = \begin{pmatrix} e \\ R \end{pmatrix}.$$

Тогда обобщенная задача запишется

$$\max(C(t), Y(t)) \quad (64)$$

при условиях

$$\bar{A}Y(t) \leq T, \quad (65)$$

$$Y(t) \geq \bar{0}. \quad (66)$$

Задача, двойственная к (64) — (66), есть

$$\min(\pi(t), T) \quad (67)$$

при условиях

$$\pi(t)\bar{A} \geq C(t), \quad \pi(t) \geq \bar{0}. \quad (68)$$

Процесс решения начинается с задания в начальный момент времени $t = 0$ вектора оценок $\pi(t)$. Пусть для некоторого фиксированного t вектор невязок $u(t)$ условия (65) такой, что

$$\bar{A}Y(t) + u(t) = T \quad (69)$$

и вектор невязок $w(t)$ условий (68) такой, что

$$\pi(t)\bar{A} - w(t) = C(t). \quad (70)$$

В нашем алгоритме невязка $w_s(t)$ определяет величину и направление изменения компоненты $Y_s(t)$. Из (70) имеем

$$w(t) = \pi(t)\bar{A} - C(t). \quad (71)$$

С целью уменьшения колебаний вектора $w(t)$ применяется процесс усреднения. Обозначим усредненный вектор $w(t)$ через $\bar{w}(t)$. Тогда

$$\bar{w}(t) = \alpha(t)w(t) + (1 - \alpha(t))\bar{w}(t-1), \quad (72)$$

где

$$\alpha(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \sum_t \alpha(t) \rightarrow \infty.$$

Вектор непроизводственного потребления $Y(t)$ определяется из равенства

$$Y(t) = Y(t-1) + \bar{w}(t). \quad (73)$$

В итерационном процессе полагаем $Y_s(t) = 0$ для такого t , когда $Y_s(t) < 0$, $s = 1, 2, \dots, K$.

Если $w(t)$ определяет величину и направление изменения $Y(t)$, то невязки $u(t)$ определяют величину и направление изменения оценок $\pi(t)$. Если $u_k(t) \geq u_k(t-1) > 0$, то $\pi_k(t) = \pi_k(t-1)(1 + h(t))$, где $h(t)$ — убывающая функция времени. Например, это может быть $1/t$, $1/\sqrt{t}$ и т. п. Если при этом $\pi_k(t) = 0$, то полагаем $\pi_k(t) = h(t)$. Если $u_k(t) < w_k(t-1) \leq 0$, то $\pi_k(t) = (\pi_k(t-1))/(1 + h(t))$. Если для некоторого номера k на протяжении определенного количества итераций $\pi_k(t)$ имеет тенденцию к уменьшению и стремится к нулю, т. е. если $\pi_k(t) < 1/mt$, где m — достаточно большое число, то полагаем $\pi_k(t) = 0$. Во всех остальных случаях полагаем $\pi_k(t) = \pi_k(t-1)$. Таким образом, при недостаточном производе какого-либо продукта оценка его повышается, а при избыточном понижается.

С целью ускорения сходимости итерационного процесса в данном алгоритме применялась экстраполяция управляющих переменных $\pi(t)$, а также экстраполяции $Y(t)$ и $\bar{w}(t)$. Экспериментальные расчеты показали, что применение экстраполяции сокращает время решения задачи на ЭВМ.

Экстраполяция была реализована по следующему правилу. Если для некоторого фиксированного числа итераций σ , следующих одна за другой, $\rho_k(t) = |\pi_k(t) - \pi_k(t-1)| < \Omega$, где Ω — наперед заданная малая величина, которая в экспериментальных расчетах выбиралась равной 0,002, то экстраполируем на фиксированное число n итераций величины $\pi_k(t)$, $Y_s(t)$, $\bar{w}_s(t)$ по формулам

$$\begin{aligned}\pi_k(t') &= \pi_k(t) + (\pi_k(t) - \pi_k(t-1))n, \\ Y_s(t') &= Y_s(t) + (Y_s(t) - Y_s(t-1))n, \\ \bar{w}_s(t') &= \bar{w}_s(t) + (\bar{w}_s(t) - \bar{w}_s(t-1))n,\end{aligned}$$

где $t' = t + n$.

Экспериментальные расчеты, в которых значения σ изменялись от 10 до 30, а значения n от 25 до 70, дали вполне удовлетворительные результаты.

Таким образом, в момент t можно определить значение функционала двойственной задачи и аппроксимированного функционала прямой задачи. Процесс вычислений заканчивается в тот момент, когда достигнута требуемая точность выполнения условий (65) и (68) и значения упомянутых функционалов совпадают.

Пусть

$$\delta(t) = \sum_k |\pi_k(t) \cdot u_k(t)| + \sum_s |Y_s(t) \cdot \bar{w}_s(t)| \quad (74)$$

и

$$\kappa(t) = |(C(t), Y(t)) - (\pi(t), T)|. \quad (75)$$

В случае выполнения неравенств

$$\delta(t) < \gamma \text{ и } \kappa < \varepsilon, \quad (76)$$

где γ и ε — наперед заданные достаточно малые величины, оптимальное решение задачи получено с необходимой степенью точности. В случае невыполнения условия (76) процесс продолжается, начиная с пересчета коэффициентов линеаризованного функционала.

Экспериментальные расчеты проводились по задаче квадратичного программирования, включающей 7 ограничений при 10 неизвестных, которая в результате описанной выше подстановки была преобразована в задачу с четырьмя ограничениями и семью неизвестными. Для ее решения при различных значениях параметров алгоритма (σ , n , Ω , γ , ε) требовалось от 100 до 180 итераций.

5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ ПО МАЛОРАЗМЕРНОЙ МОДЕЛИ ТРЕХСТУПЕНЧАТОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Для проведения расчетов была составлена экспериментальная числовая модель на базе трех условных отраслевых моделей. Каждая отрасль состояла из 3—5 предприятий. Первичная аппроксимация предприятий принималась такой, чтобы возможности по выпуску каждого продукта были описаны достаточно полно. Во всех трех отраслях предусматривалось производство промежуточного продукта. Кроме того, в модели первой отрасли учитывались два вида лимитированных ресурсов, а в двух других моделях по одному. Отрасли производили соответственно 3, 5, 4 продукта.

Межотраслевая модель была составлена так, что каждая из отраслей для обеспечения собственного производства потребляет продукцию других отраслей. Непроизводственное потребление обеспечивалось конечной продукцией первой отрасли (три продукта) и тремя из пяти продуктов второй отрасли. Третья отрасль, выпускающая четыре продукта, предназначалась целиком для удовлетворения производственных потребностей первых двух отраслей.

Модель включала одно общее для всех отраслей условие, отражающее, например, ограниченность трудовых ресурсов в межотраслевой системе.

Структура непроизводственного потребления задавалась ассортиментными наборами для первой отрасли $N_1^I : N_2^I : N_3^I = 0,8 : 0,6 : 0,3$, для второй отрасли $N_1^{II} : N_2^{II} : N_3^{II} = 0,4 : 0,5 : 0,5$.

Целевая функция межотраслевой задачи использовалась для оценки величин этих наборов и имела вид

$$\varphi(\lambda) = -0,1\lambda_1^2 + 0,3\lambda_1 - 0,1\lambda_2^2 + 0,4\lambda_2. \quad (77)$$

Размерность отраслевых моделей характеризуется для первой отрасли 9 ограничениями и 13 неизвестными, для второй отрасли 11 ограничениями и 21 неизвестными, для третьей отрасли 11 ограничениями и 26 неизвестными.

Общая размерность межотраслевой задачи составляет 32 ограничения и 62 неизвестных.

Структура матрицы межотраслевой модели представлена в табл. 1.

По приведенной выше схеме межотраслевой оптимизации (см. п. 2) была составлена экспериментальная программа расчетов на алгоритмическом языке АЛГОЛ-60, включающая алгоритмы оптимизации, описанные в п. 3 и 4.

Таблица 2

Основным результатом проведения комплексных расчетов по условной числовой модели следует считать решение задачи (2) — (8) за четыре глобальные итерации.

Выше приводится таблица, содержащая результаты расчетов по глобальной модели, а также результаты расчетов по оптимизации локальных (отраслевых) моделей в рамках общей аппроксимационной схемы. В табл. 2 представлены величины, наиболее ярко характеризующие полученные результаты: планы по выпуску продукции, оценки, невязки ограничений, число выполненных итераций и т. д. Для сравнения приводятся данные, характеризующие начальные значения основных переменных рассмотренной задачи.

Все изложенное в данной статье позволяет сделать следующие выводы.

1. В рамках проведенных исследований и расчетов можно сделать вывод о высокой практической сходимости аппроксимационных алгоритмов многоступенчатой оптимизации. Полученный результат — решение общей задачи за четыре глобальные итерации — указывает на целесообразность дальнейших экспериментальных исследований в этой области.

2. При построении и анализе общей многоступенчатой модели оказывается возможным рационально подойти и к построению моделей для каждого отдельно взятого уровня хозяйственного руководства, а также к вопросам их увязки. Экспериментирование подтверждает, что в рамках единой народнохозяйственной модели каждая частная модель выглядит совершенно иначе, чем при ее локальном построении. Единый подход приводит к гораздо более простым и в то же время более содержательным частным моделям.

3. Соответственно возникают и новые возможности в построении эффективных алгоритмов решения частных моделей. В статье описаны предложенные итеративные методы и приведены результаты их экспериментальной проверки, подкрепляющие вывод о непосредственной связи проблем построения моделей с проблемами их решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Пугачев. Аппроксимационная схема многоступенчатого оптимального планирования народного хозяйства. В кн. Экономико-математические методы. Вып. II. Методы оптимального планирования. Транспортные задачи. М., «Наука», 1965.
2. В. Ф. Пугачев. Оптимизация планирования. М., «Экономика», 1968.
3. В. Ф. Пугачев. Локальный критерий и стимулирование работников в оптимальной экономической системе. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, № 5.
4. А. К. Пителін. Построение итеративных алгоритмов для решения задач оптимального планирования. В сб. Материалы к Всес. конф. по применению экономико-матем. методов и ЭВМ в отраслевом планировании и управлении. М., 1966.
5. В. А. Волконский. Оптимальное планирование в условиях большой размерности (итеративные методы и принцип декомпозиции). Экономика и матем. методы, 1965, т. I, № 2.
6. А. Б. Поманский, А. Д. Шапиро. Об итеративных методах решения отраслевых задач, содержащих дискретные переменные. В сб. Информационные материалы (модели и алгоритмы оптимального планирования), вып. 2, М., 1967. (Центр. экономико-матем. ин-т АН СССР).
7. В. Г. Медницкий. О методе решения задачи оптимального распределения плановых заданий в отрасли. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, № 6.
8. В. И. Данилов-Данильян. Задачи большой размерности и итеративные методы оптимального планирования. В кн. Модели и алгоритмы оптимального планирования. М., Изд. ЦЭМИ АН СССР, 1966.

Поступила в редакцию
14 II 1969