ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1969 том V, вып. 4

МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО РОСТА ЭКОНОМИКИ

В. Л. МАКАРОВ
(Новосибирск)

В последнее время модели оптимального роста экономики привлекают к себе внимание, ибо они являются необходимым этапом в процессе построения общей теории оптимального функционирования экономики. Прежде чем выяснить возможности экономической системы с учетом всего комплекса условий, естественно и логично изучить их лишь при ограничениях, связанных с техникой и природными ресурсами, отвлекаясь от структуры общества и законов, управляющих поведением людей.

В статье рассматриваются и частично обобщаются наиболее значительные, на наш взгляд, достижения * в области моделей оптимального роста, сделанные в последнее время [1—3], а также приводятся новая постановка некоторых проблем и результаты.

Математические модели оптимального роста на конечном временном интервале основываются на теории выпуклого программирования, а модели с бесконечным временным интервалом, описанные в настоящей работе, представляют собой новый, ранее не изучавшийся класс экстремальных задач.

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОЙ МОДЕЛИ

Исследуемая далее весьма общая модель оптимального роста экономики включает n «продуктов» **, занумерованных числами $1, 2, \ldots, n$. Производственные возможности модели задаются с помощью множества Z, лежащего в неотрицательном ортанте $2n$-мерного эвклидова пространства. Множество Z, называемое обычно «технология», есть не что иное, как график «производственного отображения» $x \to a(x)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольный неотрицательный вектор, x_i интерпретируется как количество продукта с номером i. Смысл производственного отображения в случае модели с дискретным временем состоит в следующем. Если в момент t имеются продукты в количествах x, то в следующий момент времени $t+1$ «технологически» возможно иметь продукты в количествах $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где $y \in a(x)$. Таким образом, $a(x)$ есть множество возможных состояний, в которые можно перейти в течение единичного интервала времени из состояния x. $2n$-мерный вектор $(x, y) \in Z$ тогда, и только тогда, когда $y \in a(x)$.

Сфера потребления в данной модели описывается с помощью числовой функции полезности $u(x)$, определенной на всевозможных неотрицатель-

---

* Об этом свидетельствует также тот факт, что два из трех пленарных доклада (Т. Купманса и Д. Гейла) на проходившем в сентябре 1966 г. Варшавском конгрессе эконометрического общества были посвящены данной теме.

** «Продукты» и другие термины, заключенные в кавычки, понимаются в обобщенном смысле. Например, в число продуктов включаются виды производственных мощностей, услуг, трудовых ресурсов, вспомогательные или фиктивные продукты и т. д.

ных n-мерных векторах x. Для получения содержательных результатов на «технологию» накладываются следующие ограничения.

Предположение 1. Множество Z является выпуклым замкнутым конусом.

Предположение 2. В модели, задаваемой «технологией» Z, имеется лишь один вид трудовых ресурсов, количество которого измеряется «продуктом» с номером n. Процессы $(e_i, 0) \in Z$, $i = 1, \ldots, n-1$, где e_i — орт, соответствующий i-й координатной оси. В модели не содержится подмоделей, не затрачивающих трудовых ресурсов. Это означает, что без использования труда экономика не может функционировать. Формально это требование можно формулировать так: пересечение конуса Z с гиперплоскостью, определяемой уравнением $x_n = 1$, является ограниченным множеством.

Предположение 3. Трудовые ресурсы возрастают темпом $\rho > 0$, т. е. если $(x, y) \in Z$ и $x_n > 0$, то $y_n / x_n = \rho$. Другими словами, в случае модели с дискретным временем количество труда в момент t есть функция $L(t) = L_0\rho^t$, а в случае модели с непрерывным временем $L(t) = L_0e^{(\rho-1)t}$. Существует процесс $(x, y) \in Z$, такой, что $y_i / x_i > \rho$ для всех $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$, т. е. при отсутствии ограничений на трудовые ресурсы все продукты могут возрастать темпом большим, чем ρ.

Предположение 4. $a(\mu x / x_n) \subseteq \mu a(x / x_n)$, $\mu \geqslant 1$ для всех x. Это предположение говорит о том, что трудовые ресурсы уничтожать невыгодно.

Функция полезности $u(x)$ измеряет величину полезности благ $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, приходящихся на душу населения. Будем считать, что значение ее не зависит от величины последней координаты x_n.

Предположение 5. Функция полезности u является непрерывной, выпуклой вверх и неограниченно возрастающей хотя бы по одному из своих аргументов. Кроме того, $u(x) = 0$, если $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0$.

Чтобы использовать данное определение функции полезности в нашей модели, последнюю необходимо нормировать по труду, т. е. привести к виду, при котором количество трудовых ресурсов все время остается равным единице. Это легко сделать (поскольку производственное отображение, по предположению 1, положительно однородно первой степени) с помощью следующего приема, обычно используемого в этом случае. Вместо конуса Z берется конус $Z' = \{(\rho x, y) : (x, y) \in Z\}$. Очевидно, что в модели с «технологией» Z' трудовые ресурсы растут темпом, равным единице.

Итак, в дальнейшем мы будем исследовать модель с «технологией» Z' и функцией полезности u, обозначая эту модель через $M(Z', u)$. Введем для модели $M(Z', u)$ понятие состояния равновесного сбалансированного роста, аналогичное понятию сбалансированного роста модели Неймана — Гейла. По поводу последнего см., например, [4]. Из дальнейшего будет видно, что первое совпадает с последним при надлежащем определении модели $M(Z', u)$, когда значения функции полезности приводятся к одному моменту времени с помощью коэффициента, равного темпу роста трудовых ресурсов. Если коэффициент приведения полезности отличен от темпа роста труда, эти понятия не совпадают, но одно определяется через другое. Введем обозначение для вектора продуктов, идущих на потребление, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, 0)$.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу. Найти $\max\limits_c u(c)$ при ограничениях: 1) $y - c \geqslant x$, 2) $(x, y) \in Z'$, 3) $x_n = 1$.

Множество векторов c, удовлетворяющих ограничениям 1) — 3), обозначим через V. Нетрудно проверить, что V выпукло и замкнуто.

Определение 1. Процесс $(\bar{x}, \bar{y})$, вектор потребительского набора $\bar{c}$ и значение функции предпочтения $\bar{u} = u(\bar{c})$, получающиеся из решения задачи максимизации функции u при ограничениях 1) — 3), определяют *состояние равновесного сбалансированного роста.*

Таким образом, $\bar{u}$ представляет собой максимальное значение функции полезности, при котором система может существовать сколь угодно долго, т. е., в частности, если на потребление изымать в каждый период времени вектор $\tilde{c}$, такой, что $u(\tilde{c}) > \bar{u}$, то система через некоторое время придет к нулевому выпуску продуктов. Имея функцию полезности $\bar{u}$ в состоянии равновесного сбалансированного роста, мы можем свести рассматриваемую модель $M(Z', u)$ к замкнутой, в которой функция предпочтения в явном виде отсутствует. Это сведение осуществляется с помощью довольно простого приема, однако оно оказывается решающим для всего дальнейшего.

Определим конус $\bar{Z}$ замкнутой модели $M(\bar{Z})$ следующим образом. Введем дополнительный $n+1$-й «продукт», количество которого будет характеризовать величину отклонения значения функции полезности от $\bar{u}$. Конус $\bar{Z}$ определяется процессами вида $[(x, \bar{u}-u(c));\ (y-c, 0)]$, если $\bar{u}-u(c) \geqslant 0$, и $[(x, 0);\ (y-c,\ u(c)-\bar{u})]$, если $u(c)-\bar{u} \geqslant 0$, и процессом $[(0,\ldots,0,\ 1);\ \ (0,\ldots,0,\ 1)]$. Здесь $(x,\ y) \in Z'$, $x_n = 1$, $y \geqslant c$. Последний процесс осуществляет «хранение» (переброску) $(n+1)$-го продукта. Конус $\bar{Z}$ может быть определен этими процессами так: произвольная точка $z \in \bar{Z}$ есть вектор, представляющий собой некоторую выпуклую комбинацию данных процессов, умноженный на неотрицательное число. Таким образом, способ образования конуса $\bar{Z}$ указывает, как измеряется величина полезности от потребления продуктов, когда количество трудовых ресурсов не равно единице. Именно, если $(x, y) \in Z'$, $y \geqslant c$ и $x_n = 1$, то $[(x, 0);\ (y-c,\ u(c)-\bar{u})] \in \bar{Z}$, и величина полезности вектора c равна $u(c)$. Если же $x_n \neq 1$, то $[(x, 0);\ (y-c,\ x_n u(c/x_n) - x_n\bar{u})] \in \bar{Z}$ и величина полезности вектора c равна $x_n u(c/x_n)$, т. е. равна полезности душевого набора, умноженной на количество населения (трудовых ресурсов).

Нетрудно видеть, что процессы $[(\bar{x}, \gamma);\ (\bar{y}-\bar{c}, \gamma)] \in \bar{Z}$, где γ — произвольное неотрицательное число, $(\bar{x},\ \bar{y})$ и $\bar{c}$ определяют состояние равновесного сбалансированного роста.

Вместе с моделью $M(\bar{Z})$ мы будем изучать также модель $M(\bar{Z}(\lambda))$, отличающуюся от $M(\bar{Z})$ по существу только способом «хранения» $(n+1)$-го продукта. «Технология» $\bar{Z}(\lambda)$ определяется аналогично $\bar{Z}$ процессами $[(x, 0);\ (y-c,\ u(c))]$, где $(x, y) \in Z'$, и процессом «хранения» (или переброски) $(n+1)$-го продукта, имеющим вид $[(0,\ \ldots,\ 0,\ 1);$ $(0, \ldots, 0, \lambda)]$, $\lambda > 1$.

Как видим, отличие последней модели от $M(\bar{Z})$ состоит в способе «хранения» и в том, что от u не отнимается ее значение $\bar{u}$. В дальнейшем запись $M(\bar{Z}(\lambda))$, $\lambda > 1$ обозначает только что определенную модель при $\lambda \neq 1$ и модель $M(\bar{Z})$ при $\lambda = 1$.

Модели $M(\bar{Z})$ и $M(\bar{Z}(\lambda))$ являются замкнутыми, уже довольно хорошо изученными. В частности, доказано [4], что в замкнутой модели $M(Z)$, где соприсутствуют все процессы уничтожения всех продуктов, существует состояние равновесия (состояние неймановского сбалансированного роста), даваемое определением 2.

Определение 2. Состояние равновесия модели $M(Z)$ определяется тройкой объектов: процессом $(\bar{x}, \bar{y})$, вектором цен $\bar{p} \geqslant 0$ и темпом расширения α в следующих соотношениях: а) $\alpha\bar{x} \leqslant \bar{y}$, б) $\alpha x\bar{p} \geqslant y\bar{p}$ для всех $(x, y) \in Z$.

Всего в модели $M(Z)$ может быть лишь конечное число состояний равновесия с различными темпами расширения α [5]. Однако для рассматриваемой модели $M(\bar{Z})$ имеет место следующее

Предложение 1. *В модели* $M(\bar{Z})$ *любое состояние равновесия определяется либо процессом* $[(\bar{x}, \gamma);\ \ (\bar{y}-\bar{c},\ \gamma)] \in \bar{Z}$, *либо* $[(0,\ \ldots,\ 0,\ \gamma);$

$(0, \ldots, 0, \gamma)]$, *следовательно, имеет темп расширения, равный единице.*

Доказательство. По предположениям 2—3, максимальный темп роста модели $M(\bar{Z})$ в состоянии равновесия не может быть больше единицы, но он может быть равен единице, как показывает процесс $[(\bar{x}, \gamma); (\bar{y} - \bar{c}, \gamma)]$. Возьмем процесс $(z, z') \in \bar{Z}$, определяющий состояние равновесия модели $M(\bar{Z})$ с единичным темпом расширения. Процесс (z, z') либо имеет вид

$$[(\tilde{x}, \bar{u} - u(\tilde{c}) + \gamma); (\tilde{y} - \tilde{c}, \gamma)] \tag{1}$$

при $\bar{u} - u(\tilde{c}) \geqslant 0$, либо

$$[(\hat{x}, \gamma); (\hat{y} - \hat{c}, u(\hat{c}) - \bar{u} + \gamma)] \tag{2}$$

при $u(\hat{c}) - \bar{u} \geqslant 0$, где $(x, y) \in Z'$, либо $[(0, \ldots, 0, \gamma); (0, \ldots, 0, \gamma)]$. Пусть, например, (z, z') имеет вид (1) и, кроме того, $\bar{u} - u(\tilde{c}) > 0$. Тогда не выполняется условие а) определения 2. Если же (z, z') имеет вид (2) и $u(\hat{c}) - \bar{u} > 0$, то снова не выполняется условие а), $\hat{x} \leqslant \hat{y} - \hat{c}$, потому что значение $u(\bar{c})$ является, по определению, максимальным, при котором выполнено неравенство а). Таким образом, состояние равновесия с единичным темпом роста реализуется только на процессах $[(\bar{x}, \gamma); (\bar{y} - \bar{c}, \gamma)]$, либо $[(0, \ldots, 0, \gamma); (0, \ldots, 0, \gamma)]$. Состояния равновесия с темпом меньше единицы невозможны в силу предположения 3.

Предложение 2. *Процесс* $[(\bar{x}, \gamma); (\bar{y} - \bar{c}, \gamma)]$ *дает состояние неймановского равновесия для модели* $M(\bar{Z})$, *т. е. найдутся такие цены* $\bar{p}' = (\bar{p}, \bar{p}_{n+1})$, $\bar{p}' \geqslant 0$, *которые вместе с этим процессом удовлетворяют определению 2. Кроме того,* $\bar{p}_{n+1} = 1$.

Доказательство. Образуем множество $(n+1)$-мерных векторов $V' = \{(y - c - x, \gamma) : y - c \geqslant x, \ x_n = 1, \ (x, y) \in Z', \ \gamma \leqslant u(c) - \bar{u}\}$. В силу выпуклости множеств Z', $\{y - c : y - c \geqslant 0\}$, $\{(y - c - x) : y - c - x \geqslant 0\}$, $\{x : x_n = 1\}$ и выпуклости вверх функции u множество V' также является выпуклым. Нетрудно видеть, что отыскание точки, принадлежащей множеству V' с максимальной последней координатой, эквивалентно задаче максимизации функции u на множестве V. Иначе говоря, векторы $(\bar{x}, \bar{y})$ и $\bar{c}$ дают решение для обеих задач.

Таким образом, вектор $(\bar{y} - \bar{c} - \bar{x}, u(\bar{c}) - \bar{u})$ лежит на границе V' и, очевидно, на границе выпуклого конуса V'' определенного следующим образом: $V'' = \{(y - c - x, \gamma) : [(x, 0); (y - c, \gamma)] \in \bar{Z}\}$. Обозначим коэффициенты опорной гиперплоскости к конусу V'', проходящей через точку $(\bar{y} - \bar{c} - \bar{x}, 0)$, через $\bar{p}' = (\bar{p}, \bar{p}_{n+1})$. Для любой точки $v \in V''$ $v_n = 0$, ибо если $(x, y) \in Z'$, то $x_n = y_n$, по предположению 3. Следовательно, коэффициент $\bar{p}_n$ может принимать любое значение, а вектор $(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_{n-1}, \bar{p}_{n+1}) \neq 0$. По определению,

$$x\bar{p} \geqslant (y - c)\bar{p} + (u(c) - \bar{u})\bar{p}_{n+1} \tag{3}$$

для всех $(x, y) \in Z'$ и $c \leqslant y$, причем на векторах $\bar{x}, \bar{y}, \bar{c}$ достигается равенство. Коэффициенты $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_{n-1}, \bar{p}_{n+1}$ не могут быть отрицательными так, как по определению конусов Z' и $\bar{Z}$ продукты с номерами $1, 2, \ldots, n-1, n+1$ могут «уничтожаться». Пусть теперь $\bar{p}_{n+1} = 0$. В соответствии с предположением 3 найдется процесс $[(x, 0); (y - c, u(c) - \bar{u})] \in \bar{Z}$, такой, что $(c_1, \ldots, c_{n-1}) > 0$. Этот процесс удовлетворяет неравенству (3) только в том случае, когда $(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_{n-1}) = 0$. Однако последнее противоречит доказанному выше утверждению, что $(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_{n-1}, \bar{p}_{n+1}) \neq 0$. Таким образом, $\bar{p}_{n+1} > 0$, и, так как гиперплоскость проходит через начало координат, можно вектор ее коэффициентов нормировать равенством $\bar{p}_{n+1} = 1$.

Неравенство (3), которое превращается в равенство на процессе $[(\bar{x}, \gamma); (\bar{y} - \bar{c}, \gamma)]$, свидетельствует о том, что $\bar{p}'$ является вектором цен равновесия для модели $M(\bar{Z})$.

Утверждение предложения 2 можно также получить применением теоремы Куна — Таккера к задаче максимизации функции $u(c)$ на множестве V, как это делает Д. Гейл [2].

Теперь рассмотрим состояния равновесного сбалансированного роста модели $M(\bar{Z}(\lambda))$, $\lambda > 1$.

Определение 3. В модели $M(\bar{Z}(\lambda))$ с коэффициентом приведения $\lambda > 1$ процесс $(\bar{x}, \bar{y})$, потребительский набор $\bar{c}$ и значение функции предпочтения $\bar{u} = u(\bar{c})$ определяют состояние равновесного сбалансированного роста, если они удовлетворяют следующим трем условиям: 1) $\bar{x} \leqslant \bar{y} - \bar{c}$, 2) $\lambda \bar{x}\bar{p} = (\bar{y} - \bar{c})\bar{p} + u(\bar{c})$, 3) $\bar{x}_n = 1$, где $\bar{p}' = (\bar{p}, 1)$ есть вектор цен для состояния неймановского равновесия с темпом λ модели $M(\bar{Z}'(\lambda))$, которая отличается от модели $M(\bar{Z}(\lambda))$ лишь тем, что конусу $\bar{Z}'(\lambda)$ принадлежит процесс уничтожения трудовых ресурсов.

Сразу видно, что здесь состояние равновесного сбалансированного роста не является состоянием неймановского равновесия модели $M(\bar{Z}(\lambda))$ в чистом виде, как это имело место для $M(\bar{Z})$, однако определяется оно с помощью состояния равновесия. Хотя состояние равновесия определяется процессом $[(0, \ldots, 0, 1); (0, \ldots, 0, \lambda)]$, процесс $[(\bar{x}, 0); (\bar{y} - \bar{c}, u(\bar{c}))]$ также реализует темп роста продуктов в ценах $\bar{p}'$, равный λ. По терминологии работы [6], процесс $[(\bar{x}, 0); (\bar{y} - \bar{c}, u(\bar{c}))]$ принадлежит неймановской грани.

Итак, определение дано, теперь надо показать, что оно непротиворечиво, т. е. состояния равновесного сбалансированного роста при $\lambda > 1$ существуют.

Предложение 3. *Для модели $M(\bar{Z}(\lambda))$ при $\lambda > 1$ состояние равновесного сбалансированного роста существует.*

Доказательство. Рассмотрим выпуклый конус

$$\tilde{Z}(\lambda) = \{[(x, \gamma); (y - c, x_n u(c / x_n) + \lambda\gamma)] : y - c \geqslant x,$$
$$[(x, 0); (y - c, x_n u(c / x_n))] \in \bar{Z}(\lambda)\}.$$

Состояние неймановского равновесия модели $M(\tilde{Z}(\lambda))$ с темпом расширения λ определяется процессом $[(0, \ldots, 0, 1); (0, \ldots, 0, \lambda)]$ и некоторым вектором цен $\bar{p}' = (\bar{p}, 1)$. Вектор $\bar{p} \neq 0$, поскольку в противном случае для процесса $[(\tilde{x}, 0); (\tilde{y} - \tilde{c}, u(\tilde{c}))] \in \tilde{Z}(\lambda)$, где $(\tilde{x}, \tilde{y})$ и $\tilde{c}$ задают состояние равновесного сбалансированного роста модели $M(\bar{Z})$, условие б) определения 2 не будет выполняться. Очевидно, что любой процесс из $\tilde{Z}(\lambda)$, для которого выполняются соотношения 2) и 3) определения 3, характеризует состояние равновесного сбалансированного роста модели $M(\bar{Z}(\lambda))$. А такой процесс всегда найдется в силу непустоты конуса $\tilde{Z}(\lambda)$. Обозначим этот процесс через $[(\bar{x}, 0); (\bar{y} - \bar{c}, u(\bar{c}))]$. Пусть равновесные цены $\bar{p}'$ определены однозначно. Тогда гиперплоскость с коэффициентами $(-\lambda\bar{p}', \bar{p}')$ является опорной к конусу $\bar{Z}(\lambda)$ в точке $[(\bar{x}, 0); (\bar{y} - \bar{c}, u(\bar{c}))]$. Действительно, она является опорной в этой точке к конусу $\tilde{Z}(\lambda)$ по определению состояния неймановского равновесия. И хотя конус $\bar{Z}(\lambda)$ является расширением конуса $\tilde{Z}(\lambda)$, точка $[(\bar{x}, 0); (\bar{y} - \bar{c}, u(\bar{c}))]$ остается, очевидно, граничной и для $\bar{Z}(\lambda)$. В случае когда существует целое множество векторов равновесных цен для модели $M(\tilde{Z}(\lambda))$, в этом множестве по тем же соображениям всегда найдется такой вектор $\bar{p}'$, что гиперплоскость с коэффициентами $(-\lambda\bar{p}', \bar{p}')$ является опорной к конусу в точке $[(\bar{x}, 0); (\bar{y} - \bar{c}, u(\bar{c}))]$. Таким образом, окончательно получаем, что процесс $[(\bar{x}, 0); (\bar{y} - \bar{c}, u(\bar{c}))]$ определяет состояние равновесного сбалансированного роста модели $M(\bar{Z}(\lambda))$ при $\lambda > 1$.

На этом заканчивается та часть изложения, которую можно было провести независимо от предположения о дискретном или непрерывном характере времени. В заключение лишь заметим, что состояние равновесного сбалансированного роста, сформулированное в определениях 1 и 3, называют иногда еще «золотым» состоянием, состоянием «золотого века» или просто «золотым веком».

2. МОДЕЛЬ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Предполагается, что временна́я переменная t может принимать лишь целые неотрицательные значения, $t = 0, 1, \ldots$.

Определение 4. 1) Траектория $\{x(t), \gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ состояний модели $M(\bar{Z}(\lambda))$, $1 \leqslant \lambda < \infty$, называется *технологически допустимой* (или допустимой) при начальном состоянии (x_0, γ_0), если $(x(0), \gamma(0)) = (x_0, \gamma_0)$ и $[(x(t), \gamma(t)); (x(t+1), \gamma(t+1))] \in \bar{Z}(\lambda)$ для всех $t = 0, 1, 2, \ldots$.

2) Траектория $\{x(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ состояний модели $M(Z' u)$ называется допустимой при начальном состоянии x_0, если $x(0) = x_0$ и $(x(t), y(t)) \in Z'$, $x(t+1) = y(t) - c(t), x(t) \geqslant 0$ для всех $t = 0, 1, 2, \ldots$.

Определение 5. Допустимая при (x_0, γ_0) траектория $\{\bar{x}(t), \bar{\gamma}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ модели $M(\bar{Z}(\lambda))$, $1 \leqslant \lambda < \infty$, называется *сильно u-оптимальной*, если последовательность $\{\bar{\gamma}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ мажорирует, начиная с некоторого момента, любую другую последовательность $\{\gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$, порождаемую допустимой при (x_0, γ_0) траекторией. Другими словами, если $\{\gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ порождается допустимой при (x_0, γ_0) траекторией, то найдется момент времени t_0, начиная с которого выполняются неравенства $\gamma(t) \leqslant \bar{\gamma}(t)$.

Ниже даются также определения u-оптимальной и *слабо u-оптимальной траектории*.

Для модели $M(Z', u)$ u-оптимальность траектории определяется в зависимости от значения коэффициента приведения λ. Именно, допустимая при x_0 траектория $\{\bar{x}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ является сильно u-оптимальной, если соответствующая ей последовательность $\left\{\sum_{\tau=1}^{\tau=t} \lambda^{-\tau+1} u(\bar{c}(\tau))\right\}_{t=0}^{t=\infty}$ мажорирует любую другую последовательность, порождаемую допустимой при x_0 траекторией.

Замечание в связи с определениями 4 и 5. В данной работе изучаются траектории, определенные на всей бесконечной полуоси времени. Траектории, определенные на конечном временном интервале, здесь не рассматриваются, хотя их изучение выявляет ряд интересных особенностей.

Непосредственно из определений легко видеть, что множество допустимых при x_0 траекторий модели $M(Z', u)$ совпадает с множеством допустимых при (x_0, γ_0) траекторий модели $M(\bar{Z}(\lambda))$, рассматриваемых без последней координаты. Кроме того, каждой траектории $\{x(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ соответствует последовательность $\left\{\sum_{\tau=1}^{\tau=t} \lambda^{-\tau+1} u(c(\tau))\right\}_{t=0}^{t=\infty}$ и некоторое множество Γ-последовательностей $\{\gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$, причем между $\left\{\sum_{\tau=1}^{t} \lambda^{-\tau+1} u(c(\tau))\right\}_{t=0}^{t=\infty}$ и Γ

имеет место следующее соотношение:

$$\text{Если } \lambda = 1, \text{ то } \sum_{\tau=1}^{t} u(c(\tau)) \geqslant \gamma(t) - \gamma_0 + (t+1)\bar{u}.$$

$$\text{Если } \lambda > 1, \text{ то } \lambda^{t-1} \sum_{\tau=1}^{t} \lambda^{-\tau+1} u(c(\tau)) \geqslant \gamma(t) - \gamma_0$$

для любой последовательности $\{\gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ из Γ и всех $t = 0, 1, 2, \ldots$, причем найдется последовательность $\{\gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ из Γ, для которой имеют место равенства при всех $t = 0, 1, \ldots$. Это утверждение также непосредственно следует из определений и из предположения 5 о выпуклости вверх функции полезности u. Следовательно, при исследовании u-оптимальных траекторий вместо модели $M(Z', u)$ всегда можно рассматривать замкнутую модель $M(\bar{Z}(\lambda))$.

Теперь несколько замечаний о смысле приведенных определений, а также о целях дальнейшего исследования. Определение u-оптимальной траектории применительно к модели $M(\bar{Z})$ говорит о том, что мы выделяем из класса технологически возможных траекторий развития экономической системы такие траектории, которые доставляют обществу максимальную полезность, если эту полезность подсчитывать с помощью суммирования значений не меняющейся во времени функции полезности, определенной на потребительских наборах продуктов, приходящихся на душу населения c. Здесь, как видим, два существенных предположения: неизменность во времени функции предпочтения и гипотеза о том, что для общества одинаково полезен набор продуктов, потребляемых на одного человека, независимо от периода времени, в который этот набор потребляется. Общая полезность от потребления в каком-нибудь интервале времени равна величине полезности на душу населения, умноженной на количество людей, т. е. $= x_n u(c / x_n)$.

Обычно в модели развивающейся экономики предполагается, что население растет некоторым темпом, большим единицы. Поэтому данная гипотеза говорит о том, что полезность потребительских продуктов, приходящихся на душу, приводится к одному моменту времени (чтобы ее суммировать за весь бесконечный период) с помощью коэффициента, равного темпу роста населения.

Различные авторы, рассматривавшие этот вопрос, употребляют и различную терминологию при словесном описании задачи. Одни говорят о максимизации полезности без приведения во времени (но тогда они имеют в виду величину полезности от потребления продуктов для всего населения), другие говорят о максимизации с приведением (имея в виду полезность на душу населения).

В модели $M(\bar{Z}(\lambda))$, $\lambda > 1$, также предполагается, что функция полезности неизменна во времени. При этом один и тот же потребительский набор, приходящийся на душу населения, равномерно обесценивается с течением времени.

Вопросы, которые нас интересуют при изучении данной модели, таковы.

1. При каких условиях u-оптимальная траектория существует?
2. Когда она единственна?
3. Каковы свойства u-оптимальной траектории, в частности, по какому закону осуществляется переход из одного состояния в другое?
4. Каковы свойства состояния равновесия сбалансированного роста («золотого» состояния)?

5. Каковы асимптотические свойства u-оптимальных траекторий, в частности, стремятся ли они к «золотому» состоянию?

6. Какова зависимость сформулированных выше вопросов 1—5 от величины коэффициента приведения во времени функции полезности?

Эти вопросы сформулированы как чисто математические, хотя все они, конечно, вытекают из экономического анализа проблемы. Например, теорема существования является необходимым логическим аргументом (кроме экономических) в пользу разумности той или иной постановки задачи. Или, скажем, выяснение закона перехода из состояния в состояние по u-оптимальной траектории, зависящего от дифференциальных свойств «технологии» и функции полезности u, дало бы практические рекомендации по такому фундаментальному вопросу, как соотношение накопления и потребления при данных конкретных условиях. Известно, что при определенных условиях (см. ниже модели с непрерывным временем), чтобы определить, находясь в состоянии $x(t)$, сколько продукции и какой произвести в следующий момент $y(t)$ и сколько из нее надо отдать на потребление $c(t)$ и дальнейшее производство $y(t) - c(t)$, нужно знать только лишь дифференциальные свойства «технологии» Z и функции u в точках $x(t)$ и $c(t)$, а дифференциальные свойства — вещь, которую практически получить неизмеримо проще, чем сами Z и u. Это обстоятельство, кстати сказать, является сильным аргументом в пользу практической ценности моделей с функцией полезности, поскольку обычное возражение против них состоит в том, что функция полезности u в действительности может быть построена в полном виде лишь с затратами, превышающими эффект от обладании ею.

В дальнейшем существенную роль будет играть понятие бесконечно оптимальной траектории, или, по другой терминологии, эффективного пути. Примем оба понятия. Свойства эффективных траекторий изучались в [6], результаты ее и используются в настоящей статье.

Определение 7. Допустимая при (x_0, γ_0) траектория $\{\bar{x}(t), \bar{\gamma}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ модели $M(\bar{Z}(\lambda))$, $\lambda \geqslant 1$, называется *бесконечно оптимальной*, если не существует допустимой при (x_0, γ_0) траектории $\{x(t), \gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$, такой, что $(x(t), \gamma(t)) = \mu(\bar{x}(t), \bar{\gamma}(t))$, $\mu > 1$, хотя бы при одном t.

В соответствии с этим определением любая допустимая траектория $\{(x(t), \gamma(t))\}_{t=0}^{t=\infty}$ модели $M(\bar{Z}(\lambda))$ является бесконечно оптимальной, поскольку компонента $x_n(t)$, показывающая количество трудовых ресурсов, равна единице для всех допустимых траекторий, исходящих из начального состояния. Однако, как это следует из теорем 2 и 4 работы [6], каждую бесконечно оптимальную траекторию $\{\bar{x}(t), \bar{\gamma}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ можно поставить в соответствие некоторому состоянию равновесия модели, $[(\tilde{x}, \tilde{y} - \tilde{c}), \tilde{p}, \tilde{\alpha}]$, именно такому состоянию равновесия, при котором

$$\frac{\bar{x}(t+1)\tilde{p} + \gamma(t+1)\tilde{p}_{n+1}}{\bar{x}(t)\tilde{p} + \gamma(t)\tilde{p}_{n+1}} \to \tilde{\alpha} \text{ при } t \to \infty. \tag{4}$$

Нас будут в дальнейшем интересовать такие бесконечно оптимальные траектории, для которых выполняется соотношение (4), когда в качестве равновесных цен взяты цены $\bar{p}' = (\bar{p}, 1)$ состояния равновесного сбалансированного роста и $\tilde{\alpha} = \lambda$. Эти бесконечно оптимальные траектории будут в дальнейшем называться соответствующими состоянию равновесного сбалансированного роста.

Поскольку любая часть $\{\bar{x}(t)\}_{t=0}^{t=T}$, $T = 1, 2, \ldots$, любой эффективной траектории является решением некоторой задачи выпуклого программирования, то вся эффективная траектория в целом может быть охарактеризована следующим образом.

Предложение 4. *Для того чтобы в модели* $M(\overline{Z}(\lambda))$, $\lambda \geqslant 1$, *допустимая при* (x_0, γ_0), $x_0 > 0$, *траектория* $\{\bar{x}(t), \bar{\gamma}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ *была бесконечно оптимальной, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность неотрицательных векторов цен* $\{\bar{p}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$, такая, что

1) $\bar{p}(t)z \geqslant \bar{p}(t+1)z'$ для всех $t = 0, 1, \ldots$, и любых процессов $(z, z') \in \overline{Z}(\lambda)$.

2) $\bar{p}(0)(x_0, \gamma_0) = \bar{p}(t)(\bar{x}(t), \bar{\gamma}(t)) > 0$ для всех t.

Доказательство. В этом доказательстве мы опускаем для краткости некоторые детали.

Достаточность очевидна. Покажем необходимость условий 1) и 2). Пусть траектория $\{\bar{x}(t), \bar{\gamma}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ эффективна. Рассмотрим задачу выпуклого программирования для интервала $[0, T]$: задан выпуклый замкнутый конус

$$Z_{0,T} = \{-y(0), z(1) - y(1), \ldots, z(T-1) - y(T-1), z(T)\pi :$$
$$: (y(t), z(t+1)) \in \overline{Z}(\lambda), t = 0, \ldots, T-1\}.$$

Здесь π — $(n+1)$-мерный неотрицательный вектор. Требуется найти точку $(-(x_0, \gamma_0), 0, \ldots, 0, z(T)\pi) \in Z_{0,T}$ с максимальной последней координатой. Обозначим коэффициенты опорной к конусу $Z_{0,T}$ в максимальной точке $(-(x_0, \gamma_0), 0, \ldots, 0, \overline{Z}(T)\pi)$ гиперплоскости через $p = (p(0), p(1), \ldots, p(T-1), p_*)$, где $p(t)$, $t = 0, \ldots, T-1$, есть $(n+1)$-мерные векторы. Поскольку конусу $\overline{Z}(\lambda)$ принадлежат процессы $-e_i$, $i = 1, \ldots, n-1, n+1$, то $p_i(t) \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n-1, n+1$, $t = 1, \ldots, T-1$, и $p_* \geqslant 0$. Далее, в соответствии с предположением 4 $\mu a(x / x_n) \geqslant a(\mu x / x_n)$, $\mu \geqslant 1$, следовательно, если бы $-e_n \in \overline{Z}(\lambda)$, максимальная точка (решение задачи выпуклого программирования) осталась бы той же, поэтому $p_n(t) \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant T-1$. Покажем теперь, что $p_* > 0$. Имеем $(x_0, \gamma_0)p(0) = \overline{Z}(T)\pi p_*$. Из этого уравнения следует, что если $p_* = 0$, то $p(0) = 0$, поскольку $(x_0, \gamma_0) > 0$. Так как по определению опорной гиперплоскости $p(0)z \geqslant p(1)z'$ для любого $(z, z') \in \overline{Z}(\lambda)$, то $p(1) = 0$. Аналогичные рассуждения дают $p(2) = 0, \ldots, p(T-1) = 0$. Таким образом, из $p_* = 0$ следует $p = 0$, что невозможно. Заметим, что если $\overline{Z}(\lambda)$ — многогранный конус, то условия $x_0 > 0$ не требуется.

Вернемся теперь к траектории $\{\bar{x}(t), \bar{\gamma}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$. Поскольку она эффективна, то для любого T найдется неотрицательный вектор $\pi(T)$, такой, что соответствующая задача выпуклого программирования своим решением имеет кусок эффективной траектории $\{\bar{x}(t), \bar{\gamma}(t)\}_{t=0}^{t=T}$. Обозначим множество всех таких $\pi(T)$ через $\Pi_T{}^T$, а через $\Pi_t{}^T$, $0 \leqslant t < T$, будет обозначаться множество всех векторов $p_t{}^T$, полученных из соответствующих задач выпуклого программирования, когда $\pi(T)$ пробегает множество $\Pi_T{}^T$. Нетрудно показать, что множества $\Pi_t{}^T$ замкнуты. Пересечение $\Pi_t{}^T$ с единичной сферой обозначим через $\widetilde{\Pi}_t{}^T$. Очевидно, $\widetilde{\Pi}_t{}^t \supseteq \widetilde{\Pi}_t^{t+1} \supseteq \widetilde{\Pi}_t^{t+2}, \ldots$.

Множество $\widetilde{\Pi}_t = \bigcap_{T=t}^{T=\infty} \widetilde{\Pi}_t{}^T$ непусто в силу непустоты и компактности $\widetilde{\Pi}_t{}^T$.

Выберем какую-нибудь точку $\bar{p}(0) \in \widetilde{\Pi}_0$. По построению множества $\widetilde{\Pi}_1$ точке $\bar{p}(0)$ соответствует точка $\hat{p}(1) \in \widetilde{\Pi}_1$, такая, что $\mu\hat{p}(1) = \bar{p}(1)$, $\mu > 0$, и $\bar{p}(0)(x_0, \gamma_0) = \bar{p}(1)\bar{x}(1), \bar{\gamma}(1))$. Точке $\bar{p}(1)$ соответствует точка $\bar{p}(2)$ и т. д. Получившаяся последовательность цен $\{\bar{p}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ и является искомой, удовлетворяющей свойствам 1) — 2) настоящего предложения.

Теорема 1 (существования). *Пусть имеются модель $M(\bar{Z})$ и начальное состояние (x_0, γ_0), удовлетворяющие предположениям 1) — 5) и условиям предложения 4. Тогда сильно u-оптимальная траектория существует, если u строго выпукла вверх и найдется допустимая при (x_0, γ_0) траектория $\{x(t), \gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$.*

Доказательство. Возьмем бесконечно оптимальную траекторию $\{\bar{x}(t), \bar{\gamma}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$, исходящую из точки (x_0, γ_0) и соответствующую состоянию равновесного сбалансированного роста. Такая траектория существует в силу теорем 1 и 2 работы [6] и условий доказываемой теоремы. Покажем, что эта траектория является также и сильно u-оптимальной. Для этого предварительно установим, что для любой допустимой при (x_0, γ_0) траектории $\{x(t), \gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ имеет место соотношение

$$(x(t), \gamma(t)) \to (\bar{x}, \bar{\gamma}) \quad \text{при } t \to \infty, \tag{5}$$

где $(\bar{x}, \bar{\gamma})$ — вектор из состояния равновесного сбалансированного роста. Действительно, предположим противное, т. е. пусть $\rho(x(t), \bar{x}) \geqslant \varepsilon > 0$ на подпоследовательности $\{t_k\}$, где $\rho(\ldots)$ — эвклидово расстояние. Тогда в силу строгой выпуклости функции u (см., например, лемму 2 работы [6]) найдется положительное число δ, такое, что

$$\frac{x(t+1)\bar{p} + \gamma(t+1)}{x(t)\bar{p} + \gamma(t)} \leqslant 1 - \delta \tag{6}$$

на подпоследовательности $\{t_k\}$. Рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве теоремы 2 работы [6], показывают, что из соотношения (6) следует $(x(t), \gamma(t)) \to 0$, при $t \to \infty$, что невозможно.

В соответствии с предложением 4 траекторию $\{\bar{x}(t), \gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ характеризует последовательность цен $\{\bar{p}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$, удовлетворяющих соотношениям 1) — 2) этого предложения. Для любой допустимой при (x_0, γ_0) траектории $\{x(t), \gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$, отличной от $\{\bar{x}(t), \bar{\gamma}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$, будем иметь

$$\bar{p}(t)\bar{x}(t) + \bar{\gamma}(t) \geqslant \bar{p}(t)x(t) + \gamma(t) + \varepsilon, \tag{7}$$

начиная с некоторого момента t_0, где $\varepsilon > 0$ и $\bar{x}(t_0) \neq x(t_0)$. Соотношение (7) также вытекает из строгой выпуклости функции u.

Так как $x(t) \to \bar{x}$ при $t \to \infty$, то из неравенства (7) получается, что $\bar{\gamma}(t) > \gamma(t)$, начиная с достаточно большого t_1. Следовательно, траектория $\{x(t), \gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ не может быть сильно u-оптимальной. Окончательно же имеем, что $\{\bar{x}(t), \bar{\gamma}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ является единственной бесконечно оптимальной траекторией, соответствующей состоянию равновесного сбалансированного роста, и единственной сильно u-оптимальной траекторией.

Итак, для существования сильно u-оптимальной траектории необходимо некоторое свойство единственности, гарантируемое в данном случае требованием строгой выпуклости функции полезности u. Оказывается, что определение сильно u-оптимальной траектории является в некотором смысле слишком узким. Поэтому и в названии присутствует слово «сильно». Согласно определению 6, требуется, чтобы траектория $\{\bar{\gamma}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ мажорировала всякую другую, начиная с некоторого момента. Однако нетрудно представить себе ситуацию, когда две траектории $\{\gamma'(t)\}$ и $\{\gamma''(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ несравнимы в этом смысле, т. е. и для $\{\gamma'(t)\}$, и для $\{\gamma''(t)\}$ не существует траекторий, которые их мажорируют, начиная с некоторого момента. Требование в теореме 1 единственности эффективной траектории, соответствующей состоянию равновесного сбалансированного роста, исключало подобную ситуацию. Поэтому там одна траектория мажорировала все другие. Чтобы ввести в рассмотрение описанную возможность, дадим определение u-оптимальной траектории и слабо u-оптимальной траектории, основанное именно на том факте, что предложения «$\{\gamma(t)\}$ — мажоранта для всех траекторий» и «для $\{\bar{\gamma}(t)\}$ не существует мажоранты» не эквивалентны.

Определение 8. Допустимая при (x_0, γ_0) траектория $\{\bar{x}(t), \bar{\gamma}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ модели $M(\bar{Z}(\lambda))$ называется *u-оптимальной*, если для всякой допустимой при (x_0, γ_0) траектории $\{x(t), \gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ выполняется следующее условие.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется момент времени t_ε, такой, что $\bar{\gamma}(t) + \varepsilon\lambda^{t-1} \geqslant \gamma(t)$ для всех $t \geqslant t_\varepsilon$.

Теорема 2 (существования). *Пусть имеется модель* $M(\bar{Z}(\lambda))$, $\lambda > 1$, *и начальное состояние* (x_0, γ_0), *удовлетворяющие предположениям* 1) — 5). *Тогда u-оптимальная траектория существует.*

Доказательство этой теоремы мы опускаем, поскольку оригинальных идей оно не содержит. Действительно, чтобы показать существование u-оптимальной траектории, нужно выбрать подходящее метрическое пространство (например, пространство s, определение которого см. в [7, стр. 265], где множество допустимых исходящих из (x_0, γ_0) траекторий будет компактным, и показать, что функция $\Phi(\{c\}) = \sum_{t=0}^{\infty} u(c(t)) / \lambda^t$ определена и непрерывна на этом множестве.

Теорема 2 показывает, что для модели $M(\bar{Z}(\lambda))$, $\lambda > 1$, понятия u-оптимальной траектории достаточно. Для модели с $\lambda = 1$ оказывается необходимым ввести еще одно понятие u-оптимальности.

Определение 9. Допустимая при (x_0, γ_0) траектория $\{\bar{x}(t), \bar{\gamma}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ модели $M(\bar{Z})$ называется *слабо u-оптимальной*, если найдется подпоследовательность $\{t_k\}$, такая, что для любой допустимой при (x_0, γ_0) траектории $\{x(t), \gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty} \bar{\gamma}(t_k) \geqslant \gamma(t_k)$ и не существует допустимой траектории $\{x(t), \gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$, такой, что $\gamma(t) \geqslant \bar{\gamma}(t)$ для всех t, причем хотя бы для одного момента имеет место строгое неравенство.

Понятие сильно u-оптимальной и u-оптимальной траектории введено Гейлом [2], слабая u-оптимальность рассматривается впервые здесь.

Чтобы показать, что определение слабо u-оптимальной траектории имеет смысл, приведем пример модели, у которой u-оптимальной и тем более сильно u-оптимальной траектории не существует, однако существуют слабо u-оптимальные траектории.

Конус $\bar{Z}$ задается процессами:

$$\begin{array}{lll}
\left[\left(1, 1, 0, \frac{1}{2} - c\right); \right. & \left. (1, 0, 2 - c, 0)\right], & c \leqslant \frac{1}{2}, \\
\left[(1, 1, 0, 0); \right. & \left. \left(1, 0, 2 - c, c - \frac{1}{2}\right)\right], & c \geqslant \frac{1}{2}, \\
\left[\left(1, 0, 1, \frac{1}{2}\right); \right. & \left. (1, 1, 0, 0)\right], & \\
\left[\left(1, 1, 0, \frac{1}{2}\right); \right. & \left. \left(1, 1\frac{1}{10} 0, 0\right)\right], & \\
\left[\left(1, 0, 0, \frac{1}{2}\right); \right. & \left. (1, 0, 0, 0)\right], & \\
[(0, 0, 0, 1); & (0, 0, 0, 1)]. &
\end{array} \tag{8}$$

Таким образом, модель включает в себя четыре «продукта». Первый продукт, т. е. первая и пятая компоненты восьмимерных векторов-процессов конуса $\bar{Z}$, показывает количество трудовых ресурсов, второй и третий «продукты» являются продуктами в обычном смысле слова, а последняя компонента состояния модели измеряет величину функции полезности, значения которой равны количеству третьего «продукта», идущего на потребление за вычетом значения этой функции полезности в состоянии равновесного сбалансированного роста. Величина c в первом процессе показывает количество третьего продукта, которое идет на потребление, $0 \leqslant c \leqslant 2$. Если начальное количество населения равно двум, то, как легко убедиться, величина $\bar{c}$, соответствующая состоянию равновесного сбалансированного роста, равна единице. Поскольку $u(x_1, x_2, x_3) = x_3$, т. е. u не является строго выпуклой, то условия теоремы 1 не выполняются и сильно u-оптимальной траектории может не существовать.

Пусть начальное состояние (x_0, γ_0) есть $(2, 2, 0, 1)$. Нетрудно проверить, что траектория

$$\{(2,2,0,1),\ (2,0,2,2),\ (2,2,0,1),\ (2,0,2,2)\ldots\} \tag{9}$$

и траектория

$$\left\{(2,2,0,1)\left(2,1,1,1\frac{2}{11}\right)\left(2,1,1,1\frac{2}{11}\right)\ldots\right\} \tag{10}$$

являются технологически допустимыми при начальном состоянии (x_0, γ_0). Покажем что обе эти траектории являются слабо u-оптимальными. Любая допустимая при $(2, 2, 0, 1)$ траектория $\{x(t),\ \gamma(t)\}$ обладает тем свойством, что $x_2(t) + x_3(t) \leqslant 2$ для любого t, поскольку при $x_2(t) + x_3(t) > 2$ и количестве трудовых ресурсов в две единицы невозможно начать производство с помощью процессов (8). С другой стороны, если в какой-нибудь момент времени t_0 $x_2(t_0) + x_3(t_0) < 2$, то это значит, что используется процесс $[(1, 0, 0, 1/2);\ (1, 0, 0, 0)]$. Слабо u-оптимальные траектории, очевидно, являются бесконечно оптимальными, соответствующими состоянию равновесного сбалансированного роста. А всякая бесконечная оптимальная траектория, соответствующая состоянию равновесного сбалансированного роста, характеризуется, согласно предложению 4, последовательностью векторов цен $\{\bar{p}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$, удовлетворяющих соотношениям 1) и 2) этого предложения. Если бы процесс $[(1, 0, 0, 0);\ (1, 0, 0, -0,5)]$ использовался в период t в бесконечно оптимальной траектории, то должно было бы быть $\bar{p}_1(t) + 0{,}5 = \bar{p}_1(t+1)$, т. е. $\bar{p}_1(t+1) > p_1(t)$. Однако при этом не будет выполняться соотношение 1) предложения 4. Поэтому в бесконечно оптимальной траектории, соответствующей состоянию равновесного сбалансированного роста, не может использоваться процесс $[(1, 0, 0, 0,5);\ (1, 0, 0, 0)]$ и, следовательно, не может быть $x_2(t) + x_3(t) < 2$ ни для одного t.

Легко видеть, что в любой допустимой при $(2, 2, 0, 1)$ траектории $\{x(t), \gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$, если для какого-нибудь момента времени t пара $(\gamma(t),\ \gamma(t+1))$ является одним из векторов $(1+\varepsilon,\ 2)$, $(1,\ 2+\varepsilon)$, $(1^2/_{11}+\varepsilon,\ 1^2/_{11})$, $(1^2/_{11},\ 1^2/_{11}+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, то в момент $t+2$ будет $x_2(t+2) + x_3(t+2) < 2$. Следовательно, траектории (9) и (10) являются слабо u-оптимальными.

3. МОДЕЛЬ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Исторически сложилось так, что в непрерывном времени рассматривались в основном малоразмерные модели экономики, включающие в себя один или два продукта. В [1, 3] изучается однопродуктовая модель оптимального роста с непрерывным временем, причем при определении технологически допустимых траекторий существенно используется одномерность модели.

В настоящем разделе излагается вкратце общий способ определения модели экономики в непрерывном времени. Кроме того, указывается (без доказательств) на возможность перенесения основных результатов, полученных для модели с дискретным временем, на непрерывный случай.

Сохраним для модели с непрерывным временем те же обозначения: $M(\overline{Z}(\lambda))$, $\{\overline{x}(t), \overline{\gamma}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ и т. д.

Определение 10. Траектория $\{x(t), \gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ модели $M(\overline{Z}(\lambda))$, $\lambda \geqslant 1$, $t \in [0, \infty]$, называется (технологически) *допустимой* при начальном состоянии (x_0, γ_0), если найдется суммируемая на любом интервале $[0, t]$ $(n+1)$-мерная вектор-функция z, определенная для всех $t \in [0, \infty)$, такая, что $(x(t), \gamma(t)) = (x_0, \gamma_0) + \int_0^t z(\tau)\, d\tau$ для всех $t \in (0, \infty)$,

$$z(\tau) = ((y(\tau), \gamma'(\tau)) - (x(\tau), \gamma(\tau))),$$
$$[(x(\tau), \gamma(\tau)); (y(\tau), \gamma'(\tau))] \in \overline{Z}(\lambda) \tag{11}$$

для всех $\tau \in [0, t]$.

Определение 11. Допустимая при (x_0, γ_0) траектория $\{\overline{x}(t), \overline{\gamma}(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ модели $M(\overline{Z}(\lambda))$, $\lambda \geqslant 1$, называется *сильно и-оптимальной* (*и-оптимальной*), если для любой допустимой при (x_0, γ_0) траектории $\{x(t), \gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ найдется момент времени t_0, начиная с которого $\overline{\gamma}(t) \geqslant \gamma(t)$, если для любой допустимой при (x_0, γ_0) траектории $\{x(t), \gamma(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется момент времени t_ε, такой, что $\overline{\gamma}(t) + \varepsilon e^{(\lambda-1)t} \geqslant \gamma(t)$ для всех $t \geqslant t_\varepsilon$.

В [8] установлена теорема существования и теорема двойственности для задачи нахождения траектории $\{\overline{x}(t), \overline{\gamma}(t)\}_{t=0}^{t=T}$, у которой величина $\overline{\gamma}(T)$ является наибольшей среди всех $\gamma(T)$, даваемых технологически допустимыми траекториями $\{x(t), \gamma(t)\}_{t=0}^{t=T}$. Пользуясь этими теоремами, можно перенести большую часть работы [6] и все результаты раздела 2 настоящей работы на модели с непрерывным временем, сохраняя все идеи и схемы доказательств, примененные для дискретных моделей, без изменения.

В заключение укажем, что, к сожалению, при выводе соотношений (11) используются два дополнительных требования к модели: 1) отсутствует конечный лаг в производстве (лаг сколь угодно мал), 2) срок службы всех продуктов неограничен. Снятие этих требований приводит к модели, состояния которой описываются точками бесконечномерного пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. C. Koopmans. On the Concept of Optimal Economic Growth. Pontificae Academiae Scientiarum Scripta Varia, 1965, v. 28.
2. D. Gale. Optimal Development in Multy-Sector Economy. Доклад на Варшавском эконометрическом конгрессе. Сент. 1966 г.
3. M. Inagaki. The Theorem of Existence under Utility Maximization. Netherl. Econ. Inst. Publ., 1966, № 36/66.
4. Д. Гейл. Замкнутая линейная модель производства. В сб. Линейные неравенства и смежные вопросы. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
5. В. Л. Макаров. Состояния равновесия замкнутой линейной модели расширяющейся экономики. Экономика и матем. методы, 1965, т. 1, вып. 5.
6. В. Л. Макаров. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий линейных моделей экономики. Сиб. матем. ж., 1966, т. VII, № 4.
7. Н. Данфорд и Дж. Шварц. Линейные операторы. Общая теория. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
8. В. Л. Макаров. Характеристика решений задачи непрерывного линейного и выпуклого программирования. Докл. АН СССР, 1967, т. 176, № 5.

Поступила в редакцию
30 VI 1967