

ОБЗОР ПРОГРАММ РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ
ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

У. Х. МАЛКОВ

(Москва)

Ведущими организациями по составлению программ для решения задач линейного программирования на ЭВМ являются в Москве ЦЭМИ АН СССР, ВЦ АН СССР, ВЦ МГУ, ВЦ Госплана СССР, ВНИЭСХ, в Новосибирске ВЦ, Институт математики и Институт экономики СО АН СССР, в Иркутске Институт энергетики СО АН СССР, в Ленинграде ЛО ЦЭМИ АН СССР, ЛГУ, в Киеве Институт кибернетики АН УССР, ВЦ Госплана УССР.

Наибольшее количество программ составлено для ЭВМ типа М-20 (М-20, БЭСМ-3М, БЭСМ-4, М-220). В меньшей степени обеспечены программы ЭВМ типа Урал (Урал-2, Урал-4, Урал-14) и типа Минск (Минск-2, Минск-22).

Не будем останавливаться на мало распространенных машинах, а также на машинах малой мощности или устаревших («Наири», «Раздан», Урал-1, «Стрела», БЭСМ-2, Минск-1 и др.). Особое положение занимает самая мощная советская машина БЭСМ-6.

ЭВМ БЭСМ-6 эксплуатируется в течение короткого времени, и поэтому в данный момент программы для этой машины находятся в основном в стадии отладки и разработки.

Ниже приводятся данные только о самых эффективных и удачных программах решения задачи линейного программирования на ЭВМ.

В основном программы составлены в машинном коде. В настоящее время происходит переход на использование алгоритмических языков для составления программ (АЛГОЛ-60, «сибирский» диалект АЛГОЛа — АЛЬФА-язык, автокоды), что стало возможным после появления трансляторов (АЛЬФА-транслятор, транслятор ТА-1М, ТАМ-22 и др.). Можно считать, что оттранслированные программы по своим качествам практически вполне приемлемы, особенно если самые ответственные участки программы составлены непосредственно в машинном коде (АЛЬФА-транслятор, ТА-1М).

Наиболее эффективными алгоритмами решения общей задачи линейного программирования являются мультипликативный алгоритм (МА) с повторениями и алгоритм с обратной матрицей (ОМ). МА позволяет решать задачи быстрее и больших размеров (при малой заполненности матрицы коэффициентов ненулевыми элементами), чем ОМ, но зато ОМ менее зависит от заполненности и проще для программирования.

При помощи ОМ на ЭВМ БЭСМ-IV (программа А. М. Меренкова, Н. Е. Байбородина, Энергетический институт СО АН СССР, г. Иркутск) можно решать задачи с матрицей исходных данных, содержащей до 16 000 ненулевых элементов и до 215 условий (не учитывая двухсторонних ограничений на переменные), причем предельные задачи решаются за 4—5 час. Задача 172×670 (малой заполненностью) была решена за 2 часа.

Здесь и в дальнейшем будем обозначать через m — количество условий, n — количество переменных, l — количество ненулевых коэффициентов a_{ij} , t — количество ненулевых элементов в обратной матрице в мультипликативной форме представления.

Наиболее эффективно работает МА при хранении обратной матрицы полностью в оперативной памяти ЭВМ. Программа П. А. Ахметова (ЦЭМИ АН СССР) для БЭСМ-3М позволяет решать средние задачи при малой заполненности ($m < 200$, $l < 4000$, $t < 3000$) менее чем за 15–20 мин. Например, задача с $m = 180$, заполненность 4%, решалась за 7 мин., а задача 101×800 , $l = 3200$ решалась за 13 мин.

При хранении обратной матрицы в мультипликативной форме на МБ резко возрастает время счета. Так, программа Н. Г. Егорова (НИИНефть, Москва) для машины БЭСМ-3М, реализующая МА с использованием МЕ и МЛ и позволяющая решать задачи с $m \leq 300 \sim 400$, $l < 20\,000 \sim 40\,000$, решала задачу 146×700 , $l = 5000$ за 1 час 30 мин.

Разработанные программы для БЭСМ-6 в ЦЭМИ АН СССР, ВЦ АН СССР, Институте экономики СО АН СССР в Новосибирске, реализующие в основном МА, позволяют, вероятно, решать задачи с малой заполненностью и с $m \leq 1000$, $l \leq 30\,000 \sim 40\,000$.

Апробированной программой в настоящее время можно считать программу МА для БЭСМ-6 (автор А. И. Станевичус, ЦЭМИ АН СССР), позволяющей решать задачи с $n \leq 10\,000$, $m \leq 1023$, $l \leq 32\,000$, $t \leq 21\,000$. Время решения задачи 300×2500 , $l = 12\,000$ было 20 мин., а задача $m = 400$, $l = 18\,000$ решалась за 1 час 30 мин. Эта программа составлена в машинном коде.

При помощи МА на Минске-22 можно решать задачи с $m \leq 250$, $n \leq 500$, $l \leq 3000$ (программы Б. Н. Михалева, Ю. А. Занько, ВНИЭСХ, Москва). Задача 69×188 решалась за 4 мин., а задача 75×110 — за 12 мин.

На ЭВМ Эллиотт-503, имеющей дополнительную память на магнитных сердечниках (Backing Store) объемом 132×1024 (имеется в ГВЦ Госплана в Москве), можно решать относительно большие задачи. Так, с помощью программы МА (автор Н. Г. Комова, ГВЦ Госплана СССР) была решена задача с $m = 700$, 10%-ная заполненность с ненулевыми коэффициентами за 15 час. На Эллиотт-503 также реализован алгоритм с обратной матрицей (автор Н. П. Марзеев). Обе эти программы написаны на АЛГОЛ-60.

При помощи программы МА, составленной на автокоде, можно решать задачи с $m \leq 300 \sim 400$, $l \leq 15\,000 \sim 20\,000$ (программа рассчитана на объем дополнительной памяти 32×1024 , авторы В. Трчка, К. Цезарь, Экономический институт Чехословацкой АН, Прага), причем задача 280×400 , $l = 3500$ решалась за 45 мин., а задача с $m = 210$ и 790 переменных имели верхние границы — за 2 часа 35 мин.

По всей вероятности, можно предполагать, что задачи с малой заполненностью будут успешно решаться и при помощи ОМ, если обратную матрицу хранить компактно, без нулевых элементов, и систематически уточнять. Подобные опыты проводятся успешно в Новосибирске в Институте экономики СО АН СССР (И. Н. Зейтленок). Имеющаяся в данный момент программа для БЭСМ-6 позволяет решать задачи с $n + 6m + l + t < 22\,000$. Она написана на языке АЛЬГИБР (вариант АЛЬФА-языка для БЭСМ-6).

Идея компактного хранения обратной матрицы реализована и в программе А. Я. Чувялиной (Новосибирск, НИИ Систем) для БЭСМ-6. Эта программа учитывает двухсторонние ограничения на переменные, написана в кодах БЭСМ-6 и позволяет решать задачи с $10m + l + t \leq 23\,000$.

В ВЦ АН СССР в Москве находится в состоянии опытной эксплуатации программа МА для БЭСМ-6, использующая магнитные барабаны и магнитные ленты для хранения начальной информации и обратной матрицы (авторы Н. К. Бурова и Л. Б. Арет). Возможности программы: $m \leq 1023$, $n \leq 10\,000$, $l \leq 25\,000$, $t \leq 32\,000$.

По-видимому, удастся значительно увеличить объем решаемых задач и точность, а тем самым и надежность решения при помощи МА, используя более совершенные схемы повторения (периодического возобновления мультипликативного представления обратной матрицы). Эксперименты, направленные на выявление более совершенных схем повторения, проводятся П. А. Ахметовым и У. Х. Малковым (ЦЭМИ АН СССР) на АЛЬФА-языке на машинах БЭСМ-3М, БЭСМ-6, причем оказалось, что наиболее удачная схема повторения позволяет хранить ненулевую информацию об обратной матрице в мультипликативной форме в массиве ячеек, не превышающую более двух раз объема информации о прямой матрице.

Из зарубежных программ решения общей задачи линейного программирования, на наш взгляд, наиболее интересна программа «Офелия» (ЭВМ СДС 36 000, оперативная память 65 536 48-разрядных слов, магнитная лента, магнитные диски), реализующая мультипликативный алгоритм симплекс-метода и позволяющая решать задачи с количеством условий до 4095.

Приведем данные о некоторых задачах, решенных при помощи «Офелия».

Размер	Заполненность или количество ненулевых a_{ij}	Количество итераций	Время решения	Среднее время реализации повторения
465×1294	0,6% 7138	1220	23 мин.	4,4 сек.
1549×4239	0,25% 13913	2254	1 час. 37 мин.	8 сек.
3570×6549	0,13% 32413	1674	4 час. 4 мин. 41 сек.	
133×140	18,1% 1446	147	4 мин. 7 сек.	

Программа состоит из 7000 слов в машинном коде плюс 36 000 кодов на FORTRAN.

Имеется ряд программ, реализующих разные итерационные методы решения задач линейного программирования. Например, метод Т. Петшиковского (Э. П. Борисова, ЭВМ БЭСМ-2М), метод В. А. Булавского (Новосибирск), метод сопряженных градиентов (Б. Т. Поляк, ВЦ МГУ), модификация метода Брауна (Э. П. Борисова, ЦЭМИ АН СССР), метод градиентного спуска в пространстве решений двойственной задачи (Н. З. Шор, ИК АН УССР) и др. (В. М. Данилов-Данильян, В. А. Волконский, В. Г. Медницкий, А. К. Пителин, ЦЭМИ АН СССР).

Опыт решения практических задач показал, что при помощи итерационных алгоритмов успешно решаются специальные задачи линейного программирования (многоиндексные транспортные и распределительные задачи алгоритмом Н. З. Шора, двухкомпонентная задача алгоритмом Петшиковского и модификацией метода Брауна, задача загрузки оборудования алгоритмами Медницкого и Пителина), причем надо подчеркнуть, что программы итерационных методов имеют значительно более простую структуру, чем программы точных методов.

При решении общей задачи линейного программирования итерационные методы оказываются менее эффективными. Программа модифицированного алгоритма Брауна для одновременного решения прямой и двойственной задачи (Э. П. Борисова, ЦЭМИ АН СССР, ЭВМ БЭСМ-IV) позволяет решать задачи с $m + n \leq 700$, $l \leq 2048$, причем задача 443×248 , $l = 2016$ решалась за 20 мин. (55 мин.) при точности 3% (1%) — разность функционалов прямой и двойственной задачи.

Для решения блочных задач линейного программирования по принципу разложения Данцига — Вулфа составлено несколько программ для ЭВМ М-20, БЭСМ-3М (Р. А. Звягина, Новосибирск; У. Х. Малков, ЦЭМИ АН СССР; Е. Д. Мякишева, МГУ). Надо отметить, что опыт решения блочных задач пока небольшой и, скорее всего, программы, реализующие блочные методы, являются экспериментальными. При помощи программы У. Х. Малкова для БЭСМ-3М можно решать задачи блочного типа, если подзадачи удовлетворяют условиям $m \leq 99$, $n \leq 250$, $l \leq 800$ и количество связывающих условий плюс количество подзадач меньше 100, причем количество всей ненулевой информации о задаче в целом меньше чем 25 000. При помощи программы В. Трчка, К. Цезаря из Института экономики Чехословацкой АН для решения блочных задач на ЭВМ Эллиотт-503 можно попытаться решать задачи, для которых выполнены следующие условия: количество ограничений в любой из подзадач и в центральной задаче не более 250, а количество подзадач не более 150.

Были составлены экспериментальные программы, реализующие прямой блочный алгоритм (учет блочности в алгоритме с обратной матрицей), Р. А. Звягиной в Новосибирске и Л. М. Рабкиной в ЦЭМИ АН СССР. На основе этой же идеи Р. А. Звягиной сооставлена рабочая программа для решения узкоблочных задач (т. е. блоки представляют каждый только одну строку) для ЭВМ М-20, причем можно решать задачи с количеством условий общего типа не более чем 56. Программа, реализующая метод сопряженных градиентов для задачи линейного программирования для ЭВМ БЭСМ-4 (авторы Е. Н. Белов, Б. Т. Поляк) предназначена для решения задачи с $n + 2m \leq 1500$, $l \leq 4095$, причем задача 314×505 с $l = 1500$ решалась за 2 часа при точности функционала порядка 10^{-3} (1%).

Составляется программа для решения блочных задач по двойственному аналогу принципа разложения (Н. И. Макаруч, Л. М. Рабкина под руководством Е. Г. Гольштейна) для ЭВМ БЭСМ-3М на АЛЪФА языке.

Недостатком программ является неудобство их использования. Как правило, программа выдает только оптимальное решение. Лишь в нескольких программах предусмотрены выдача границ устойчивости компонент правых частей, функционала, выдача некоторой дополнительной информации о решении, оформлении результатов таблично и т. д. (программы А. И. Станевичуса, У. Х. Малкова, программа Г. Ф. Корниловой и Н. Н. Глезера, составленная в Свердловском отделении МИ АН для решения малых и средних задач линейного программирования; чешская программа мультипликативного алгоритма для Эллиотт-503).

В Энергетическом институте Иркутска составлена программа исследования устойчивости оптимального решения по методу статистических испытаний.

Поступила в редакцию
28 II 1969