Реализация требования минимизации затрат на заполнение, на шифровку данных достигается за счет такого построения унифицированных документов, которое позволяло бы наряду с легкостью фиксации информации читать зашифрованные карты. Это даст возможность использовать их для плановых и отчетных работ, для составления справок-обобщений и оценки качества проверки.

По результатам каждой проверки передается информация двух видов: справочная и смысловая. Объем и характер справочной информации не зависит от полученных результатов, а объем и характер смысловой определяется ими. Для удовлетворения двух первых требований и требования рациональной организации информационных массивов в памяти ЭВМ справочные данные выделяются в отдельный раздел.

На основании заполненных документов составляются кодограммы, которые по электрическим каналам связи — по сети абонентского телеграфа — передаются в экспериментальный информационно-вычислительный центр (ЭИВЦ) Комитета стандартов, мер и измерительных приборов.

Информация, получаемая на выходных устройствах каналов связи, может быть введена непосредственно в ЭВМ. Для обеспечения требуемой надежности применяется метод двухкратной передачи с последующим сравнением данных в ЭВМ и запросом источника в случае их расхождения. Этот метод используется на экспериментальном этапе, а после окончательной отработки шифров и подготовки соответствующих кадров будет использоваться метод контрольных сумм.

В настоящее время обработка информации в ЭИВЦ осуществляется на ЭВМ «Минск-22».

В процессе внедрения системы обработки данных важнейшим этапом является организация ее математического обеспечения. В разрабатываемой системе применяются методы автопрограммирования с алгоритмическим языком АЛГЭМ, который в бо́льшей степени удовлетворяет классу алгоритмов обработки информации в системе государственного надзора и позволяет описывать их просто и коротко.

Программы на языке АЛГЭМ не зависят от класса машины и переводятся на язык конкретной машины с помощью трансляторов, что обеспечивает унификацию математического обеспечения.

Такой комплекс программ позволяет получать оперативные сводки о состоянии внедрения и соблюдения стандартов и о качестве продукции, календарные отчетные данные и аналитические разработки.

Работа проходит апробацию в ЭИВЦ и местных органах государственного надзора Комитета стандартов.

Поступила в редакцию
4 II 1968

О МАТРИЦАХ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

В. С. ВАКСМАН

(Москва)

Простейшая линейная модель экономики, производящей m продуктов, описывается системой балансовых уравнений вида

$$x = A\vec{x} + \vec{b}; \quad A \geqslant 0, \quad \vec{b} \geqslant 0. \tag{1}$$

Однако, чтобы система (1) могла быть признана линейной моделью какой-либо «разумной» экономики, матрица A должна обладать некоторыми специальными свойствами. Такую матрицу A будем, как это сделано в [1], называть *продуктивной.* Можно сформулировать разные условия продуктивности матрицы A, отправляясь от тех или иных экономических соображений, связанных с моделью (1). Из этих условий можно в свою очередь выводить и другие. Все они при ближайшем рассмотрении оказываются эквивалентными.

Рассматривая экономический смысл элементов матриц A^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, мы легко приходим к матрице *полных затрат*

$$S = E + A + A^2 \ldots \tag{2}$$

Это дает основание для следующего определения.

Определение I. Матрица $A \geqslant 0$ называется продуктивной, если ряд (2) сходится.

Поскольку ограничения по сырью, производственным мощностям и рабочей силе в модели (1) не участвуют, естественно предположить, что в ней может быть достигнут любой конечный выпуск $\vec{b}$, т. е. при любом $\vec{b} \geqslant 0$ существует решение $\overleftarrow{x} \geqslant 0$ системы (1). Используя необходимые и достаточные условия, при которых это возможно, получаем следующее определение.

Определение II. Матрица A называется продуктивной, если матрица $(E-A)^{-1}$ существует и неотрицательна.

Заметим также, что A — матрица технологических коэффициентов, отнесенная к некоторым, произвольно выбранным физическим единицам измерения продуктов. Переход к другому набору единиц измерения вызывает преобразование матрицы A в новую матрицу $\tilde{A}$.

$$\tilde{A} = PAP^{-1}, \tag{3}$$

описывающую ту же экономику. Здесь P — диагональная матрица.

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 1 & & & p_m \end{bmatrix} \tag{4}$$

Преобразование (3) — (4) было бы естественно назвать преобразованием подобия продуктивных матриц. Если в качестве чисел p_i мы возьмем цены первоначальных физических единиц, то тем самым получим новые единицы измерения, цена каждой из которых равна 1. Если цены P_i «разумны», то цена продукта должна превосходить общую цену произведенных на него затрат. Это означает, что для матрицы $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ $\tilde{\alpha}_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij} < 1$. Матрицы, обладающие таким свойством, целесообразно выделить специальным определением. Будем называть матрицу $A = (a_{ij})$, $A \geqslant 0$ (в дальнейшем необязательно квадратную), *ограниченной*, если $\alpha_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} < 1$. Теперь становится естественным новое определение.

Определение III. Матрица A называется продуктивной, если существует матрица P, удовлетворяющая (4), и такая, что матрица $\tilde{A} = PAP^{-1}$ ограничена.

Вектор $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ естественно назвать *допустимым вектором цен.*

Докажем теперь эквивалентность высказанных определений продуктивной матрицы.

Теорема 1. *Если матрица A удовлетворяет определению* I, *то она удовлетворяет и определению* II.

Доказательство. Так как $S = \lim\limits_{k\to\infty} S_k$, $S_k = E + A + \ldots + A^k$, то $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$. Убедимся, что $(E-A)^{-1} = S$. Из $(E-A)S_k = E - A^{k+1}$ следует, что $(E-A)S = \lim\limits_{k=\infty}(E-A)S_k = E$.

Теорема 2. *Если матрица A удовлетворяет определению* II, *то она удовлетворяет и определению* III.

Доказательство. Для доказательства построим, и даже с большим произволом, пример допустимого вектора цен $\vec{p}$. Обозначим $T = (E-A)^{-1}$ (мы еще не можем утверждать, что $T = S$), $T = (t_{ij})$. Пусть r_i — произвольные положительные числа. Положим

$$p_j = \sum_{i=1}^{m} r_i t_{ij}.$$

Тогда

$$\tilde{\alpha}_j = \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij} = \frac{1}{p_j}\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} = \frac{1}{p_j}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} r_k t_{ki} a_{ij} =$$

$$= \frac{1}{p_j} \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{i=1}^{m} (t_{ki}a_{ij} - t_{ki}\delta_{ij} + t_{ki}\delta_{ij}) = \frac{1}{p_j} \sum_{k=1}^{m} r_k (t_{kj} - \delta_{kj}) = \frac{p_j - r_j}{p_j} < 1.$$

Теорема 3. *Если матрица A удовлетворяет определению* III, *то она удовлетворяет и определению* I.

Доказательство. Пусть $\widetilde{A} = PAP^{-1}$. Тогда, поскольку ряды $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{A}^k$ сходятся и расходятся одновременно, можно считать, что A ограничена. Пусть $\alpha = \max \alpha_j$, $\alpha < 1$. Обозначим $A^k = (a_{ij}^{(k)})$, $\alpha_j^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^{(k)}$, $\alpha^{(k)} = \max_j \alpha_j^{(k)}$.

Легко видеть, что $\alpha^{(k)} \leqslant \alpha^k$ и тем более $a_{ij}^{(k)} \leqslant \alpha^k \leqslant \alpha^k$, а потому ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится. Итак, все три определения продуктивной матрицы эквивалентны.

Заметим, что все допустимые векторы цен данной продуктивной матрицы A образуют некоторый выпуклый конус K. Множество K' допустимых векторов цен, построенное при доказательстве теоремы 2, также есть выпуклый конус. Было бы интересно выяснить, совпадает ли K' с K.

Теорема 4. *Пусть λ_i — характеристические корни матрицы A. Матрица A будет продуктивной тогда, и только тогда, когда $\lambda = \max_i |\lambda_i| < 1$.*

Доказательство. Пусть $\hat{A} = UAU^{-1}$ — жорданова форма матрицы A. Очевидно, ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k \text{ и } \sum_{k=0}^{\infty} \hat{A}^k$$

сходятся и расходятся одновременно, но последний ряд сходится тогда, и только тогда, когда $\lambda < 1$.

Теорема 5. *Чтобы матрица A была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы матрица A^k, $k = 2, 3, \ldots$, была продуктивной.*

Доказательство сразу же вытекает из теоремы 4 и из того, что если λ_i — характеристические корни матрицы A, то λ_i^k — характеристические корни матрицы A^k.

Рассмотрим следующую модель:

$$\vec{y} = B\vec{y} + C\vec{z} + \vec{c}, \qquad \vec{z} = D\vec{y} + \vec{d}. \tag{5}$$

Здесь $\vec{y}$ и $\vec{c}$ — m-мерные векторы-столбцы, $\vec{z}$ и $\vec{d}$ — n-мерные векторы-столбцы, матрицы $B_{m\times m}$, $C_{m\times n}$, $D_{n\times m}$ неотрицательны.

Модель (5) можно считать частным случаем модели (1), где

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & 0 \end{array}\right] \vec{b} = \left[\begin{array}{c} \vec{c} \\ \hline \vec{d} \end{array}\right] \quad \vec{x} = \left[\begin{array}{c} \vec{y} \\ \hline \vec{z} \end{array}\right]. \tag{6}$$

В связи с этим естественно предположить, что A — продуктивная матрица, т. е. существует такая матрица

$$T = \left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right], \tag{7}$$

что матрица

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} \widetilde{B} & \widetilde{C} \\ \hline \widetilde{D} & 0 \end{array}\right] = TAT^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} PBP^{-1} & PCQ^{-1} \\ \hline QDP^{-1} & 0 \end{array}\right] \tag{8}$$

ограничена. Здесь

$$P=\begin{bmatrix} p_1 & & 0 \\ & p_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & p_m \end{bmatrix} p_i>0, \quad Q=\begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & q_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & q_n \end{bmatrix} q_k>0. \tag{9}$$

Заметим, что ограниченность матрицы $\widetilde{A}$ означает ограниченность (прямоугольных) матриц

$$\left[\frac{\widetilde{B}}{\widetilde{D}}\right],\ \widetilde{C}, \widetilde{B}, \widetilde{D}.$$

В частности, это означает, что B — продуктивная матрица.

Можно также считать, что векторы $\vec{y}$ и $\vec{z}$ в модели (5) изображают две различные группы экономических факторов. Например, вектор $\vec{y}$ можно понимать как вектор продуктов, а $\vec{z}$ — как вектор рабочей силы. Так как B — продуктивная матрица, то существует неотрицательная матрица $S=(E-B)^{-1}$, и из (5) можно получить

$$\vec{z}=DSC\vec{z}+(DS\vec{c}+\vec{\alpha}). \tag{10}$$

Точно так же из (5) следует

$$\vec{y}=(B+CD)\vec{y}+(C\vec{d}+\vec{c}). \tag{11}$$

Системы уравнений (10) и (11) суть модели типа (1), сформулированные по отдельности в пространствах векторов $\vec{y}$ и $\vec{z}$. Экономический смысл матриц и векторов, входящих в (10) и (11), подтверждает это. Поэтому естественно ожидать, что матрицы DSC и $B+CD$ окажутся продуктивными. Действительно, это можно доказать.

Теорема 6. *Если матрица A из* (6) *продуктивна, т. е. $\widetilde{A}$ из* (8), *где P и Q удовлетворяют* (9), *ограничена, то матрицы DSC и $B+CD$ продуктивны.*

Доказательство. Докажем, что DSC продуктивна. Для этого докажем, что $QDSCQ^{-1}$ ограничена. Но $QDSCQ^{-1}=QDP^{-1}PSP^{-1}PCQ^{-1}=\widetilde{D}\widetilde{S}\widetilde{C}$. Легко доказать, что произведение двух ограниченных матриц есть ограниченная матрица. Поэтому, так как $\widetilde{C}$ ограничена, достаточно доказать ограниченность матрицы $R_{n\times m}=(r_{lj})=\widetilde{D}\widetilde{S}=\widetilde{D}(E+\widetilde{B}+\widetilde{B}^2+\ldots)$. Пусть

$$\widetilde{D}=(\widetilde{d}_{lj}),\ \widetilde{B}=(\widetilde{b}_{ij}),\ \widetilde{\beta}_j=\sum_{i=1}^{m}\widetilde{b}_{ij},\ \widetilde{\delta}_j=\sum_{l=1}^{n}\widetilde{d}_{lj}.$$

Так как матрица $\left[\frac{\widetilde{B}}{\widetilde{D}}\right]$ ограничена, то $\widetilde{\beta}_j+\widetilde{\delta}_j<1$, $j=1,2,\ldots,m$. Теперь

$$\rho_j=\sum_{l=1}^{n}r_{lj}=\sum_{l=1}^{n}\left(\widetilde{d}_{lj}+\sum_{i=1}^{m}\widetilde{d}_{li}\widetilde{b}_{ij}+\sum_{i,k=1}^{m}\widetilde{d}_{li}\widetilde{b}_{ik}\widetilde{b}_{kj}+\ldots\right)=$$

$$=\widetilde{\delta}_j+\sum_{i=1}^{m}\widetilde{\delta}_i\widetilde{b}_{ij}+\sum_{i,k=1}^{m}\widetilde{\delta}_i\widetilde{b}_{ik}\widetilde{b}_{kj}+\ldots<\delta_j+\sum_{i=1}^{m}(1-\widetilde{\beta}_i)\widetilde{b}_{ij}+\sum_{i,k=1}^{m}(1-\widetilde{\beta}_i)\widetilde{b}_{ik}\widetilde{b}_{kj}+\ldots=$$

$$=\widetilde{\delta}_i+\sum_{i=1}^{m}\left(1-\sum_{l=1}^{m}\widetilde{b}_{li}\right)\widetilde{b}_{ij}+\sum_{i,k=1}^{m}\left(1-\sum_{l=1}^{m}\widetilde{b}_{li}\right)\widetilde{b}_{ik}b_{kj}+\ldots=\widetilde{\delta}_j+\widetilde{b}_j<1.$$

Итак, матрица R ограничена. Следовательно, матрица $\widetilde{D}\widetilde{S}\widetilde{C}$ ограничена, а значит, DSC продуктивна.

Убедимся теперь, что матрица $B+CD$ продуктивна. Для этого докажем, что матрица

$$P(B+CD)P^{-1}=PBP^{-1}+PCQ^{-1}QDP^{-1}=\widetilde{B}+\widetilde{C}\widetilde{D}=[E_{m\times m}\,\vdots\,\widetilde{C}]\left[\frac{\widetilde{B}}{\widetilde{D}}\right]$$

ограничена. Матрица $\begin{bmatrix} \widetilde{B} \\ \hdashline \widetilde{D} \end{bmatrix}$ ограничена. Для таких матриц, как $[E \mid \widetilde{C}]$, введем специальное определение. *Полуограниченной* будем называть такую неотрицательную матрицу, у которой суммы элементов каждого столбца не превосходят единицы. Легко доказать, что произведение двух полуограниченных матриц, из которых хотя бы одна является ограниченной, есть ограниченная матрица. Отсюда $P(B+CD)P^{-1}$ ограничена, а значит, $B+CD$ продуктивна. Теорема 6 доказана.

Заметим, что в теореме 6 доказано нечто большее, а именно: если $(p_1, \ldots, p_m; q_1, \ldots, q_n)$ — допустимый вектор цен для матрицы A, то $(p_1, \ldots, p_m)$ и $(q_1, \ldots, q_n)$ — допустимые векторы цен для матриц $B+CD$ и DSC соответственно. Это можно сформулировать иначе. Пусть K_x — конус допустимых векторов цен матрицы A, K_y — конус допустимых векторов цен матрицы $B+CD$, K_z — конус допустимых векторов цен матрицы DCS. Тогда $K_x \subseteq K_y \times K_z$, где $\times$ — знак прямого произведения.

Рассмотрим теперь обратную задачу. Пусть в системе уравнений (11) матрица $B+CD$ продуктивна. Следовательно, B тем более продуктивна, т. е. существует неотрицательная матрица $S=(E-B)^{-1}$, а значит, матрица DSC системы уравнений (10) существует и неотрицательна. Предположим, что матрица DSC также продуктивна. Теперь нужно выяснить, следует ли из сделанных предположений продуктивность матрицы

$$A = \left[\begin{array}{c:c} B & C \\ \hdashline D & 0 \end{array}\right].$$

Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема 7. *Если TR — продуктивная матрица, $T, R \geqslant 0$, то RT — также*

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(TR)^k$ сходится, то из $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(RT)^k = E + R\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}(TR)^k\right)T$ следует, что и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(RT)^k$ также сходится, т. е. RT — продуктивная матрица.

С помощью теоремы 7 из продуктивности матрицы DSC выводим, что матрица SCD также продуктивна.

Теорема 8. *Если матрица $B+CD$ продуктивна, а также продуктивна матрица DSC, $S=(E-B)^{-1}$, то матрица A продуктивна.*

Доказательство. Достаточно доказать, что система (5) при любых $\vec{c}, \vec{d} \geqslant 0$ имеет единственное неотрицательное решение $\vec{y}, \vec{z}$. Но систему (5) можно заменить эквивалентной ей системой $\vec{y} = SC\vec{z} + S\vec{c}$, $\vec{z} = D\vec{y} + \vec{d}$. Возведя в квадрат матрицу T этой системы, получим

$$T^2 = \left[\begin{array}{c:c} 0 & SC \\ \hdashline D & 0 \end{array}\right]^2 = \left[\begin{array}{c:c} SCD & 0 \\ \hdashline 0 & DSC \end{array}\right].$$

Видим, что T^2 продуктивна. Следовательно, согласно теореме 5, продуктивна и T, а значит, система (5) обладает нужным свойством. Теорема 8 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Гейл. Теория линейных экономических моделей. М., Изд. иностр. лит. 1963.

Поступила в редакцию
1 II 1967