

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОВАРНО-ДЕНЕЖНОГО МЕХАНИЗМА

А. К. ЗАХАРОВ

(Москва)

Изучение товарно-денежного механизма в условиях проводимой в настоящее время хозяйственной реформы становится одной из важнейших задач советских экономистов. Большую роль при этом, по нашему мнению, может сыграть построение экономико-математических моделей и их анализ под углом зрения устойчивости.

Несмотря на то, что в советской экономико-математической литературе математическое моделирование явлений ценообразования, рентабельности, процессу. Относительно первого типа движения, т. е. такого, когда некоторой проблеме устойчивости развернуты еще очень слабо, хотя их огромное теоретическое и практическое значение не подлежит сомнению.

К. Маркс в «Капитале» показал, что, вообще говоря, товарно-денежный механизм может приводить как к устойчивому, так и к неустойчивому процессу. Относительно первого типа движения, т. е. такого, когда некоторая величина стремится к состоянию равновесия, пока не достигнет его, К. Маркс писал, разбирая случай перераспределения спроса между производством предметов роскоши и необходимых жизненных средств: «...пока происходит... такой процесс *выравнивания*, производство необходимых жизненных средств, ввиду повышения цен на них, будет постоянно привлекать столько же капитала, сколько его будет изъято из отраслей производства предметов роскоши. Это будет продолжаться до тех пор, пока спрос на жизненные средства не будет удовлетворен. Тогда опять наступит *равновесие*, и весь процесс завершается тем, что общественный капитал... распределяется между производством необходимых жизненных средств и производством предметов роскоши в измененной пропорции» [1, стр. 383] (курсив автора — А. З.).

Здесь источник возмущения лежал на стороне спроса. Возможен и такой вариант, когда источник возмущения лежит на стороне производства, т. е. происходит изменение издержек производства какого-либо товара. И в этом случае товарно-денежные отношения часто обеспечивают процесс выравнивания.

Таким образом, товарно-денежный механизм стремится постоянно «переработать» возмущения, падающие на экономическую систему либо со стороны спроса, либо со стороны производства. Однако это не всегда удается, так как существует и такой тип движения, который означает неустойчивость процесса, на что указывал К. Маркс, характеризуя экономические циклы при капитализме. Он писал: «С этим промышленным циклом дело обстоит так, что, раз дан первый толчок, один и тот же кругооборот должен периодически воспроизводиться» [2, стр. 32]. «Первый толчок» — это и есть то, что в кибернетике называется «возмущение». Это возмущение при характере связей, типичном для капиталистической экономики, порождает циклическое колебание производства, и система не

в состоянии «переработать», погасить падающие на нее возмущения.

В социалистической системе хозяйства мы в состоянии моделировать соответствующие процессы при помощи математических методов, что может иметь большое значение в правильном использовании товарно-денежных отношений для дальнейшего развития экономики. Мы можем широко применять товарно-денежный механизм там, где его действие в наибольшей мере отвечает цели максимального удовлетворения потребностей, и вместе с тем мы должны хорошо знать те границы, за которыми он утрачивает свои оптимизирующие свойства.

Проанализируем некоторые простые модели устойчивости, которые можно использовать для описания реальных экономических ситуаций.

Модель 1 с рассогласованием эквивалентности по производству и эквивалентности по потреблению* между какими-либо двумя продуктами при условии, что оба продукта (X и Y) представляют собой *потоки*. Пусть на производство одной единицы первого продукта требуется a единиц ресурсов, на производство одной единицы второго — b единиц ресурсов, общее же количество ресурсов составляет S . В этом случае имеет место соотношение $S = aX + bY$.

Таким образом, эквивалентность по производству такова: 1 ед. $A = a/b$ ($= p$) ед. B .

Совпадение обоих видов эквивалентностей, являющееся *оптимальным* состоянием, означает *равновесие* системы. Но с течением времени это равновесие нарушается по следующим причинам: 1) изменения в технологии производства, приводящие к изменению эквивалентности по производству; 2) изменения в сфере общественных потребностей, приводящие к изменению эквивалентности по потреблению. Такое расхождение между двумя видами эквивалентности означает возмущение системы. Изменившимся условиям соответствует новое состояние равновесия, к которому система должна прийти путем перестройки структуры производства. По отношению к новому состоянию равновесия *прежняя* структура производства выглядит как выведение системы из состояния равновесия (начальные условия системы уравнений теперь уже не суть условия равновесия). *Входное* звено (технология либо структура общественных потребностей) претерпело резкий скачок, но в дальнейшем (в рамках данной задачи) не меняется. *Выходным* звеном здесь является структура производства, которая должна приспособиться к новым условиям (к новому состоянию входного звена). Это требует определенного времени (время *переходного процесса*). Если эквивалентность по ценам (r) в любой момент времени соответствует эквивалентности по потреблению (иначе нарушался бы баланс между спросом и предложением), то система устойчива при условии, что скорость перестройки структуры прямо пропорциональна разности между эквивалентностью по ценам и эквивалентностью по производству: $X_t - X_{t-1} = q(r - p)$; $q > 0$.

Речь идет об управлении, основанном на использовании механизма товарно-денежных отношений, на принципе рентабельности. Механизм цен в условиях данной модели обеспечивает выведение системы на оптимум. Пока мы ограничиваемся данной моделью, мы видим только достоинства этого механизма. Рассогласование между двумя эквивалентностями «само собой» в силу внутренних свойств системы при данном характере управления стремится к нулю.

Свойства рассматриваемой модели, конечно, определенным образом зависят от формы функции, связывающей эквивалентность по потребле-

* Относительно понятий «эквивалентность по производству» и «эквивалентность по потреблению» см. [3, начиная со стр. 15].

нию и структуру продукции. В простейшем случае можно предположить, например, $r = \rho Y$ (разумеется, $\rho > 0$). Итак, имеем

$$\begin{cases} aX_t + bY_t = S \quad (a/b = p), \\ r_t = \rho Y_t, \\ X_t - X_{t-1} = q(r - p). \end{cases}$$

Получаем на основе этой системы уравнение $X_t = (1 - pq\rho)X_{t-1} + q(\rho S/b - p)$.

При $0 < pq\rho < 1$ такое движение устойчиво. Впрочем, какие бы более или менее приемлемые с точки зрения отражения реальности формы этой функции $r = \rho(X, Y)$ ни брать, система во всех случаях будет устойчива. Например, если мы предположим $r_t = \rho Y_t / X_t$, будем иметь $X_t - X_{t-1} = q\rho(S/b) / X_{t-1} - pq(1 + \rho)$.

В условиях равновесия $X_t = \rho S / bp(1 + \rho)$; $Y_t = S / b(1 + \rho)$; $r_t = p$. Можно доказать, что при соответствующем значении q такое движение устойчиво. Например, при $X_{t-1} < X^*$ (равновес.) $= \rho S / bp(1 + \rho)$ имеет место $X_t - X_{t-1} > 0$. При этом можно доказать, что всегда имеется такое q , что $X_t - X_{t-1} < X^* - X_{t-1}$.

Неустойчивость в такого рода моделях возникает лишь в некоторых особых случаях, соответствующих заведомо нереальным ситуациям.

Подобный вывод об устойчивости системы справедлив и в отношении многих других моделей, по своей математической структуре напоминающих предыдущую. Прежде всего это справедливо в отношении моделей, имеющих дело не с предметами потребления (как это логичнее всего предположить в отношении предыдущей модели), а со *средствами производства*, именно, *предметами труда*. Роль эквивалентности по потреблению в этом случае играет *эквивалентность по эффективности* различных средств производства [3, стр. 22—26].

Система является устойчивой (при соответствующем значении коэффициента интенсивности реакции), когда эквивалентность по производству выражается в модели нелинейной функцией и исследуется явление *специализации* предприятий на производстве той или иной продукции под влиянием изменения цен (допустим, в такой форме общество выражает изменение своих потребностей). Структура производства будет перестраиваться до тех пор, пока эквивалентность по производству не сравняется с эквивалентностью по ценам.

Модель 2 типа межотраслевого баланса с жесткими технологическими коэффициентами. Простейшая модель двухотраслевая: одна отрасль — средства производства (предметы труда), другая — предметы потребления. Обозначим их соответственно X и Y , причем $aX + bY = S$. Каждой системе технологических коэффициентов соответствует свое состояние равновесия — своя структура производства и система оценок (цен, полных затрат). Обозначим эти оценки ξ и v . Особенность данной модели в том, что в ней состояние равновесия означает не наилучшее состояние из множества возможных (как в моделях оптимальности), а просто единственное сбалансированное состояние. С изменением технологических коэффициентов меняется и состояние равновесия. Если, например, изменилась норма расхода средств производства на единицу предметов потребления, то новому состоянию равновесия соответствуют новая структура производства и новая система оценок. Обозначим эти величины, характеризующие равновесный уровень, соответственно X^* , Y^* , ξ^* , v^* . Вопрос о том, как будет выглядеть новое состояние равновесия, решается в теории межотраслевого баланса. Но является ли такая система устойчивой, т. е. имеются ли в ней силы, способные привести к новому состоянию равновесия? Здесь мы

имеем дело со *взаимодействием цен (оценок) и структуры во временном аспекте*, т. е. здесь *обратная связь* (при этом цены предполагаются «скользящими»). Пусть, например, цена единицы предметов потребления представляет собой частное от деления суммы доходов на количество предметов потребления, а сама эта сумма доходов соответствует общему количеству занятых в производстве ресурсов S , т. е. $v_t = S / Y_t$.

Пусть, далее, цена единицы средств производства так относится к ее полным затратам, как количество средств производства, необходимое в условиях баланса для производства соответствующего количества предметов потребления, относится к реально произведенному количеству средств производства. Запишем это так

$$\xi_t / \xi^* = (X^* / Y^*) Y_t / X_t.$$

Пусть при этих условиях интенсивность перестройки структуры пропорциональна разности в рентабельности двух отраслей (при этом как результаты, так и затраты в каждой отрасли измеряются при помощи текущих цен). Математически это можно выразить, например, следующим образом

$$Y_t - Y_{t-1} = k \left[\left(\frac{v_{t-1}}{q_{12}\xi_{t-1} + b} \middle/ \frac{\xi_{t-1}}{q_{11}\xi_{t-1} + a} \right) - 1 \right],$$

где q_{11} , q_{12} — технологические коэффициенты, a и b — прямые затраты. При соответствующем значении коэффициента интенсивности реакции такая система *устойчива*. В самом деле, имеем

$$\begin{cases} aX_t + bY_t = S, \\ v_t = \frac{S}{Y_t}, \\ \xi_t = \xi^* \frac{X^* Y_t}{Y^* X_t}, \\ Y_t - Y_{t-1} = k \left[\left(\frac{v_{t-1}}{q_{12}\xi_{t-1} + b} \middle/ \frac{\xi_{t-1}}{q_{11}\xi_{t-1} + a} \right) - 1 \right]. \end{cases}$$

Следовательно,

$$Y_t - Y_{t-1} = k \left\{ \frac{S \left[\left(q_{11}\xi^* \frac{X^*}{Y^*} - b \right) Y_{t-1} + S \right] (S - bY_{t-1})}{\xi^* \frac{X^*}{Y^*} \left[\left(aq_{12}\xi^* \frac{X^*}{Y^*} - b^2 \right) Y_{t-1} + bS \right] Y_{t-1}^2} - 1 \right\}.$$

Решение такого уравнения, осуществляемое при помощи численных методов, приводит к выводу, что при не слишком большом значении k система устойчива.

При построении таких моделей приходится сталкиваться с определенными математическими трудностями. Даже сравнительно простые экономико-математические модели при попытке их динамизировать, придать им временной аспект, становятся весьма громоздкими. Любопытно, однако, что на определенном участке в окрестности точки равновесия соответствующую функцию можно аппроксимировать линейной функцией и свести неразрешимое в общем виде конечно-разностное уравнение к аналогичному уравнению первого порядка.

Предыдущие экономические модели были устойчивыми. Это связано с тем обстоятельством, что они описываются либо уравнениями *первого*

порядка, либо близкими к ним «по духу», которые в определенных пределах могут быть сведены к уравнениям первого порядка. В моделях такого рода, за исключением некоторых случаев, колебания не возникают. В той мере, в какой экономические связи можно охарактеризовать описанными выше уравнениями, механизм *рентабельности* оказывается вполне приемлемым с точки зрения интересов общества в целом.

С другой стороны, в экономике существуют и такие связи, которые описываются уравнениями *второго порядка* или близкими к ним. В этом случае существует тенденция к неустойчивости.

Здесь важно учесть, что одни величины в экономике представляют собой *потоки*, а другие — *запасы* (например, основные и оборотные фонды), и что взаимодействие существует не только между потоками, но и между потоками и запасами. Так как поток есть первая производная от запаса по времени, то при введении в модель величины запасов порядок уравнений *повышается на единицу*.

Можно переделать разобранный выше модель с двумя эквивалентностями двух продуктов, предположив, что эквивалентность по потреблению между ними устанавливается в зависимости от соотношения между величиной *потока* одного и величиной *запаса* другого. Пусть X и Y — производимые потоки первого и второго продуктов, Z — запас второго продукта (второй продукт можно рассматривать, например, как предметы длительного пользования). Пусть по-прежнему $S = aX + bY$, что характеризует эквивалентность по производству. Эквивалентность же по потреблению (следовательно, и по ценам) устанавливается не между X и Y , а между X и Z . Например, $r = \rho Z / X$.

Модель 3.

$$\begin{cases} aX_t + bY_t = S & (a/b = p), \\ r_t = \rho Z_t / X_t, \\ X_t - X_{t-1} = q(r_{t-1} - p), \\ Z_t - Z_{t-1} = Y_{t-1} - D. \end{cases}$$

По сравнению с моделью 1 здесь появилось еще одно уравнение, характеризующее связь между потоком и запасом второго продукта (D — постоянная величина, показывающая выбывание некоторого количества второго продукта из запаса).

Можно упростить эту модель, предположив, что производится некоторый продукт в количестве Y , причем он образует запас Z . Ценность единицы продукта r зависит от величины этого запаса и измеряется не по отношению к другому продукту, величина которого также варьирует, а по отношению к некоторому неизменному мерилу, например, деньгам. Сложным является вопрос о форме связи между величиной запаса продукта и его ценностью. Пусть соответствующая функция носит линейный характер $r = r^{(0)} - lZ$ ($l > 0$; $r^{(0)} > 0$; то и другое — константы) *. Пусть, далее, расширение производства товара Y' прямо пропорционально разности между ценой r и издержками производства единицы продукта p : $Y' = k(r - p)$; $k > 0$, где k — некоторый коэффициент. Пусть, наконец, из запаса выбывает за единицу времени некоторая постоянная величина D . Оказывается, что *такая система неустойчива*.

Модель 4.

$$\begin{cases} r = r^{(0)} - lZ, \\ Z' = Y - D, \\ Y' = k(r - p). \end{cases}$$

* Параметр l — скорость убывания ценности единицы запаса по мере увеличения объема запаса. Это значение параметра l проходит через все последующие модели.

Следовательно, $Y'' = -klY + klD$. Решение такого уравнения дает

$$Y = D + C_1 \cos(\sqrt{kl} t) + C_2 \sin(\sqrt{kl} t).$$

Налицо, таким образом, незатухающее циклическое колебание с постоянной амплитудой. С экономической точки зрения это означает, что критерий рентабельности $Y' = k(r - p)$, например, в случае накопления потребительских товаров длительного пользования, не совпадает с критерием народнохозяйственной эффективности.

Не следует, однако, думать, что товарно-денежный механизм в подобного рода случаях вообще не может приводить к устойчивости процесса. На самом деле существует ряд стабилизирующих факторов. В настоящей статье предпринята попытка проанализировать некоторые стабилизирующие свойства товарно-денежного механизма, а также некоторые противоположные тенденции.

Заменим в предыдущей модели одно из условий другим, а именно будем считать, что *выбывание из запаса* за единицу времени представляет собой не постоянную величину, а *пропорционально величине запаса*, т. е. второе уравнение в системе примет вид $Z' = Y - qZ$; $0 < q < 1$, где q — некоторый коэффициент. Такое вроде бы «невинное» изменение приводит к качественному скачку: система *становится устойчивой*.

Модель 5.

$$\begin{cases} r = r^{(0)} - lZ, \\ Z' = Y - qZ, \\ Y' = k(r - p). \end{cases}$$

Следовательно, $Z'' + qZ' + klZ = k(r^{(0)} - p)$.

Поскольку во втором члене этого дифференциального уравнения второго порядка содержится положительный коэффициент, система является устойчивой. Таков один из путей стабилизации неустойчивого ранее процесса. Так как закономерность, положенная в основу модели 5, более правдоподобна, чем закономерность, положенная в основу модели 4, не следует придавать слишком большое значение выводу о неустойчивости процесса при накоплении потребительских товаров длительного пользования.

Существует множество других факторов, которые, будучи включены в такого рода модель, выступают то как стабилизирующие, то как дестабилизирующие.

Направляется мысль применить этот тип анализа к проблемам *воспроизводства*, в частности к вопросу о соотношении накопления и потребления. Очевидно, что по мере накопления основных фондов оценка их единицы падает, однако при попытке распространить это положение со случая накопления потребительских товаров на случай накопления основных фондов мы сталкиваемся с целым рядом проблем, специфичных именно для средств производства. Дело прежде всего в том, что функция эффекта накопленных средств производства зависит от отношения *количества Z к объему производимой продукции*. Если для простоты воспользоваться линейной функцией из модели 4 и обозначить при этом объем производимой продукции через P , ценность единицы накапливаемых капитальных благ через r , можно более или менее условно принять следующую зависимость, в действительности гораздо более сложную: $r = r^{(0)} - lZ / P$. Чтобы преодолеть нелинейность, которая приводит к большим математическим трудностям, заменим эту формулу такой (в этом состоит следующее упрощение): $r = r^{(0)} - lZ + mP$.

Пусть вся продукция представляет собой капитальные блага (сделаем для начала такое нереалистическое предположение). Модель 4 приобретает в таком случае следующий вид.

Модель 6.

$$\begin{cases} r = r^{(0)} - lZ + mP, \\ Z' = P - D, \\ P' = k(r - p). \end{cases}$$

Следовательно, $P'' - kmP' + klP = klD$.

В случае $km^2 > 4l$ имеет место монотонное возрастание производства; в случае $km^2 < 4l$ имеют место циклические колебания, при этом, поскольку во втором члене коэффициент является отрицательным (предполагается, что $k > 0$, $m > 0$), эти колебания усиливаются, т. е. наличие неустойчивости. Таким образом, введение положительной корреляции между объемом производства и оценкой единицы продукции (т. е. фактора, противоположного обычному соотношению спроса и предложения) выступает как благоприятный фактор: чем больше значение этого фактора, тем больше шансов, что удастся избежать циклических колебаний.

Второй фактор, который появляется с распространением модели запасов на явления воспроизводства, состоит в том, что нужно различать *производство вообще* и *производство капитальных благ* (в предыдущей модели мы не различали их). Обозначим производство капитальных благ через I . Получаем следующую модель:

$$\begin{cases} r = r^{(0)} - lZ + mP, \\ Z' = I - D, \\ I' = k(r - p). \end{cases}$$

Такая модель является не вполне детерминированной: здесь число переменных (r, Z, P, I) больше, чем число уравнений. Чтобы «закрыть» эту модель, введем уравнение, характеризующее связь между объемом производства вообще и объемом производства капитальных благ. Простейшее соотношение здесь таково: приращение производства продукции пропорционально возрастанию объема накопленных средств производства, т. е. $P' = \varepsilon Z'$. (Коэффициент ε необязательно имеет чисто физическое значение приростной «фондоотдачи»; здесь могут выступать довольно сложные, взаимно усиливающие друг друга факторы, опосредствованные финансовой системой, получившие название «принципа мультипликатора». В этом случае коэффициент ε значительно выше, чем обычная «абсолютная эффективность капиталовложений».) Итак, имеем

Модель 7.

$$\begin{cases} r = r^{(0)} - lZ + mP, \\ Z' = I - D, \\ I' = k(r - p), \\ P' = \varepsilon Z'. \end{cases}$$

Следовательно, $I'' + k(l - \varepsilon m)I = k(l - \varepsilon m)D$. Движение этой системы является колебательным при $l > \varepsilon m$ и экспоненциальным при $l < \varepsilon m$.

Приведенная выше модель в какой-то мере проливает свет на характер циклических колебаний производства при капитализме. Но чтобы сделать ее вполне реалистичной, необходимо ввести еще целый ряд осложняющих обстоятельств. Для капитализма очень характерно наличие *неиспользуемых производственных мощностей*, которые начинают работать при благоприятной экономической конъюнктуре. Дело не обстоит так, что производство какого-либо продукта лимитируется производственными мощностями (как было предположено в предыдущей модели), производство продукта лимитируется прежде всего ценой на него, с падением цены производство продукта сокращается, так как на многих участках его производство становится нерентабельным. Это верно и в отношении производства капитальных благ. Математически это можно записать так

$$I' = qr' + k(r - p); \quad q > 0,$$

т. е. увеличение производства капитальных благ зависит не только от увеличения производственных мощностей, пропорционального уровню цены (о чем говорит второй член уравнения), но и от роста цены капитальных благ. Итак, имеем:

Модель 8.

$$\begin{cases} r = r^{(0)} - lZ + mP, \\ Z' = I - D, \\ I' = qr' + k(r - p), \\ P' = \varepsilon Z'. \end{cases}$$

Следовательно, $I'' + q(l - \varepsilon m)I' + k(l - \varepsilon m)I = k(l - \varepsilon m)D$. По сравнению с моделью 7 условия устойчивости меняются.

Чтобы имел место неколебательный тип движения, необходимы следующие условия: либо $l < \varepsilon m$, либо (если $l > \varepsilon m$) $q^2(l - \varepsilon m) > 4k$. При несоблюдении этих условий, т. е. если $l > \varepsilon m$ и при этом $q^2(l - \varepsilon m) < 4k$, возникают колебания, притом затухающие (поскольку $l - \varepsilon m > 0$). Возможности неблагоприятного, неустойчивого типа движения в этой модели значительно снижены по сравнению с предыдущей. Таким образом, гибкая реакция степени использования производственного оборудования на цену выступает как *стабилизирующий фактор*.

Совершенно противоположным, т. е. *дестабилизирующим*, действием обладает такой фактор, как *падающая эффективность капиталовложений*. Известно, что в первую очередь капиталовложения направляются туда, где они могут дать наибольший эффект; в дальнейшем остаются лишь менее эффективные возможности использования капиталовложений. Математически факт падения эффективности капиталовложений можно записать, например, так: $P' = C - \gamma Z + \varepsilon Z'$, где C и γ — некоторые константы; $\gamma > 0$; $\varepsilon > 0$.

Чем больше накоплено основного капитала, тем при прочих равных условиях меньше приращение продукции благодаря приращению накопленных средств производства. Имеем, таким образом, следующую систему:

Модель 9.

$$\begin{cases} r = r^{(0)} - lZ + mP, \\ Z' = I - D, \\ I' = qr' + k(r - p), \\ P' = C - \gamma Z + \varepsilon Z'. \end{cases}$$

При этом получается дифференциальное уравнение третьего порядка. Хотя в этом случае по теореме Гурвица нетрудно установить условия устойчивости системы, экономический смысл соответствующих соотношений не является достаточно наглядным.

Поэтому упростим эту модель, а именно: отбросим в третьем уравнении второй член, т. е. будем считать, что прирост производства капитальных благ зависит только от прироста их цены. Чтобы было возможно надлежащее сопоставление с моделью 8, сделаем ту же операцию и над ней. Получим:

Модель 10

(модификация модели 8)

$$\begin{cases} r = r^{(0)} - lZ + mP, \\ Z' = I - D, \\ I' = qr', \\ P' = \varepsilon Z'. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Z'' + q(l - \varepsilon m)Z' &= 0, \\ I' + q(l - \varepsilon m)(I - D) &= 0. \end{aligned}$$

Модель 11

(модификация модели 9)

$$\begin{cases} r = r^{(0)} - lZ + mP, \\ Z' = I - D, \\ I' = qr', \\ P' = C - \gamma Z + \varepsilon Z'. \end{cases}$$

Отсюда

$$Z'' + q(l - \varepsilon m)Z' - qm\gamma Z = qmC.$$

В модели 10 вообще не возникает колебаний. При $l > \varepsilon t$ имеет место устойчивое движение, при $l < \varepsilon t$ — непрерывный рост.

При переходе к модели 11, т. е. при введении фактора падающей эффективности капиталовложений, появляется возможность колебаний и неустойчивости. При $q(l - \varepsilon t)^2 > 4m\gamma$ колебания не возникают. При этом в случае $l > \varepsilon t$ движение является устойчивым, при $l < \varepsilon t$ отмечается непрерывный рост. Но в случае $q(l - \varepsilon t)^2 < 4m\gamma$ возникают колебания, которые являются затухающими при $l > \varepsilon t$ и усиливающимися при $l < \varepsilon t$.

Модель 11 является уже сравнительно реалистичной, и ее анализ позволяет вскрыть некоторые интересные экономические закономерности. Проанализируем влияние изменения параметров l , m , q , γ и ε на устойчивость. 1) При прочих равных условиях, чем больше l , тем больше шансов, что колебаний не будет, а если они будут, то будут затухающими. 2) Влияние m не однозначно. 3) Увеличение коэффициента q ведет к отсутствию колебательной динамики. 4) Возрастание коэффициента γ ведет к появлению колебаний. 5) Влияние ε не однозначно, но в общем увеличение этого коэффициента ведет, скорее, к усилению неустойчивости.

На ранних стадиях капитализма коэффициент γ был мал, а коэффициент l , наоборот, велик. При том уровне развития техники не существовало сколько-нибудь большого разнообразия в использовании капиталовложений в промышленности, так что они давали всегда приблизительно одинаковый эффект в смысле приращения производства продукции. Явление «падающей эффективности капиталовложений» (в физическом смысле) при этом почти не имело места (величина γ была мала). Для этого этапа развития техники характерен также неэластичный спрос на основной капитал. Существовала довольно жесткая связь между количеством применяемого основного капитала и количеством обслуживающей его рабочей силы. Превышение размера производства капитальных благ над жесткой потребностью в них сразу же вело к резкому падению их цены (т. е. коэффициент l был весьма большим). При таких условиях циклические колебания производства либо совсем не возникали, либо же, в случае если они все же возникали, оказывались весьма быстро затухающими.

Дальнейшее развитие производительных сил привело к коренным изменениям. Экономика приобрела весьма динамичный характер. Большая скорость технического прогресса вызывала возможность новых, очень эффективных применений для инвестиций; тем самым возникала большая разница по эффективности между новыми и старыми направлениями капиталовложений. По мере того как капиталовложения устремлялись по новым путям, эффективность их постепенно падала и «новые» направления быстро превращались в «старые». Таким образом, при отсутствии капиталосберегающего типа технического прогресса падающая эффективность капиталовложений получила большое значение в экономике; коэффициент γ значительно вырос. В то же время в связи с техническим прогрессом появилась многовариантность технологии: продукты могли быть получены благодаря различным комбинациям затрат основного капитала и живого труда. Спрос на основной капитал стал весьма эластичным; даже небольшое понижение цены средств производства давало возможность значительно увеличить их производственное применение благодаря вытеснению живого труда. Иными словами, коэффициент l существенно понизился: значительное увеличение производства капитальных благ вело лишь к незначительному падению их цены. Все эти факторы имели своим результатом появление и развитие в капиталистической экономике циклических колебаний производства, причем размах этих колебаний стал огромным, нередко они приобретали усиливающийся характер.

Правда, увеличение коэффициента q вело, как мы видели, к устойчивости системы. Здесь мы еще раз убеждаемся, что зависимость степени использования оборудования от цены производимого продукта выступает как стабилизирующий фактор. С развитием производительных сил развился и этот фактор, столь характерный для товарно-денежного механизма. Впрочем, усиление степени «разброса» между новым, высокопроизводительным оборудованием и устаревшим, малоэффективным как раз означает падение коэффициента q : в этом случае требуется значительное увеличение цены производимого продукта, чтобы все это устаревшее оборудование пошло в ход.

Выше (модель 5) мы сталкивались с одним стабилизирующим фактором, который теперь попробуем применить к последней модели. Будем считать, что выбывание капитальных благ из запаса за единицу времени не представляет собой постоянную величину, а пропорционально величине запаса. Станет ли в этом случае система устойчивой? Посмотрим.

Модель 12.

$$\begin{cases} r = r^{(0)} - lZ + mP, \\ Z' = I - kZ, \\ I' = qP', \\ P' = C - \gamma Z + \varepsilon Z'. \end{cases}$$

Откуда $Z'' + [q(l - \varepsilon m) + k]Z' + qm\gamma Z = qmC$.

Введенный фактор действует в сторону стабилизации, но в общем, как правило (это вытекает из конкретного соотношения параметров l, q, ε, m, k), не приводит к устойчивости системы; здесь коэффициент при втором члене имеет много шансов быть отрицательным, несмотря на введение k . (В этом существенное отличие от простейшей модели накопления запасов — модели 5.)

Посмотрим, можно ли обеспечить поддержание запаса капитальных благ в строго определенных пределах. Простейший способ решения этой проблемы состоит в том, что совсем разрывается связь между оценкой капитальных благ и объемом их производства. Математически это, например, означает, что коэффициент q становится равным нулю. Получаем, таким образом, систему уравнений в результате изменения нашей последней модели.

Модель 13.

$$\begin{cases} r = r^{(0)} - lZ + mP, \\ Z' = I - D, \\ I' = 0, \\ P' = C - \gamma Z + \varepsilon Z'. \end{cases}$$

Следовательно, $Z'' = 0$. Такое движение, как нетрудно понять, является устойчивым.

Недостатком этого метода регулирования является его крайняя негибкость. Можно было бы попытаться исправить этот недостаток, твердо установив, что производство капитальных благ представляет собой некоторую неизменную часть конечного продукта. Само по себе это еще не могло бы помешать возникновению циклических колебаний. В самом деле, имеем:

Модель 14.

$$\begin{cases} r = r^{(0)} - lZ + mP, \\ Z' = I - D, \\ I' = \kappa P, \\ P' = C - \gamma Z + \varepsilon Z'. \end{cases}$$

Следовательно, $Z'' - \kappa \varepsilon Z' + \gamma Z = \kappa C$. При соответствующем значении параметров возможно возникновение колебаний.

Мы уже знаем, что для устойчивого процесса с отсутствием колебаний достаточно одного: чтобы коэффициент l был достаточно большим.

В нашем предыдущем анализе, как в любом теоретическом построении, было много упрощающих предположений и условностей. Мы отвлекались от таких явлений, как технический прогресс, рост населения и т. д., и вообще от многих факторов экономического роста. Ради математического удобства мы пользовались лишь линейными зависимостями, хотя реально соответствующие связи носят заведомо нелинейный характер. Особых замечаний заслуживает вопрос о падающей эффективности капиталовложений, так как он обсуждался при сильно упрощающих предположениях. Применявшаяся нами форма математической записи этой закономерности такова, что из нее следует при определенной величине накопленного основного капитала падение до нуля эффективности новых капиталовложений и прекращение роста производства. Именно по этой причине, разбирая вопрос об устойчивости, мы ограничивались лишь движением к определенной точке равновесия и не занимались самим ростом как устойчивым процессом. Не теряют ли в таком случае сделанные нами выводы все свое значение? Нет. Соответствующих трудностей можно во многом избежать, если ввести в уравнение, характеризующее приращение объема продукции, положительный член, представляющий собой некоторую функцию от времени. Именно так, по нашему мнению, можно учесть одновременное влияние двух противоположных тенденций — падающей эффективности капиталовложений и технического прогресса. Недостаток места не позволяет нам сделать это. Решение соответствующих неоднородных уравнений будет состоять из двух частей: из некоторого «тренда», являющегося функцией от времени и характеризующего экономический рост, и из решения однородных уравнений (чем, собственно, мы и занимались в данной статье), накладывающегося на тренд и характеризующего устойчивые или неустойчивые колебания либо же полное отсутствие колебаний — «плавное» схождение к некоторой величине, в данном случае движущейся.

В настоящей статье разобраны лишь некоторые, весьма простые модели устойчивости. Главную свою задачу автор видел в том, чтобы привлечь внимание экономистов и математиков к этой проблеме. По мере дальнейшего развертывания исследований в этом направлении (и по мере все большего усложнения самих моделей и роста математических трудностей) будет все более целесообразно переходить от проигрывания подобных моделей «на бумаге» (где в простейших случаях можно получить решение в общем виде) к проигрыванию их на вычислительных машинах — цифровых или аналоговых. Особенно последние будут играть в этом отношении большую роль. Изменяя в этих моделях те или иные параметры воспроизводства, внося те или иные изменения в характер зависимостей между экономическими переменными, можно будет легко и быстро получать ответ на вопрос о том, каковы были бы последствия таких изменений для народного хозяйства с точки зрения устойчивости. Многие споры, которые в настоящее время ведутся между экономистами (например, о границах использования механизма рентабельности), можно будет тогда решать, обратившись к вычислительной технике. Исследования в этом направлении могут существенно способствовать улучшению качества планирования и управления народным хозяйством в нашей стране.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., т. 24.
2. К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., т. 25, ч. II.
3. А. К. Захаров. К вопросу о статическом народнохозяйственном оптимуме. В сб. Мир глазами молодого ученого. Экономика. М., «Наука», 1967.

Поступила в редакцию
3 VI 1968