ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1969
том V, вып. 5

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ И АМОРТИЗАЦИИ ОСНОВНЫХ ФОНДОВ

А. В. ЖДАНКО

(Москва)

Задача внедрения экономико-математических методов и ЭВМ в планирование и управление экономикой тесно связана с вопросом использования ее блочно-иерархической структуры, чтобы преодолеть трудности моделирования такой сверхсложной системы путем построения комплекса взаимосвязанных моделей отдельных блоков. Одним из важных принципов блочности является выделение в экономической системе множеств достаточно однородных элементов, образующих подсистемы типа «запаса», совокупность которых составляет национальное богатство. Оптимальное планирование экономикой требует учета специфики подобных блоков.

Такой подсистемой, в частности, являются основные фонды. Модель движения этих фондов позволяет отразить специфические особенности динамики их численности и стоимости, а также поставить вопрос о связи амортизации основных фондов с этими процессами. Решение указанных вопросов требует введения определенных предположений.

В моделях запаса для описания динамики численности достаточно знать характеристики входного потока и закона, определяющего время задержки единицы в составе запаса. Первый можно охарактеризовать одним показателем — темпом его прироста. Второй проще всего выражается детерминированным сроком службы или законом распределения единиц по срокам службы. Рассматривается последний, более реальный случай. Вследствие его сложности принимается, что темп прироста вводимых фондов равен нулю, стоимость воспроизводства основных фондов не изменяется, техническое устарение и физическое старение в форме ухудшения технико-экономических характеристик в течение срока службы не происходит. Предполагается также неизменность системы цен. Это условие для оптимальных цен в принципе выполняется не только в равновесии, но и при сбалансированном росте неймановского типа, а следовательно, согласно теореме о «столбовой дороге», также и в моделях оптимального развития на длительную перспективу (при соответствующем нормировании). При этих условиях восстановительная стоимость основных фондов равна начальной, перспективная оценка, т. е. капитализированная стоимость (но без дисконтирования), и ретроспективная оценка (по затратам) единицы основных фондов тождественны, изменение стоимости фондов во времени вызывается лишь физическим износом, выражающимся количественно только в уменьшении оставшегося времени работы, которое можно ожидать от фондов данного возраста.

В данной статье специфическая роль амортизации анализируется лишь в плане ее соотношения с движением численности и стоимости основных фондов, исходя из следующих двух положений относительно ее экономического смысла. Оптимальную оценку каждого продукта, полученную из модели равновесия, сбалансированного роста или задачи на оптимум, можно представить как сумму оценок затраченных на его производство ресурсов, умноженных на объемы их затрат. С этой точки зрения амортизация как составной элемент цены производимой продукции выражает (полностью или частично — наряду с платой за фонды) ценообразующую роль основных фондов. С другой стороны, как один из источников финансирования валовых капиталовложений, она представляет собой способ накопления для полного (возмещение) или частичного (капитальный ремонт) восстановления основных фондов *. В первой функции амортизация тесно связана со стоимостью основных фондов, во второй — с движением их численности. Эти две функции могут не совпадать в силу лага между затратой, т. е. износом основных фондов и их восстановлением, который возникает как следствие длительности срока их службы.

К описанию движения и амортизации основных фондов при простом воспроизводстве возможны два подхода. Первый предполагает, что однажды введенные фонды необходимо поддерживать в прежнем размере, и требуется определить размер выбытия, а значит, и ввода при известном законе распределения сроков службы. Этот метод, используемый в теории надежности, применяется в ряде работ [1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 13, 20] и для описания поведения основных фондов. Второй постоянным предполагает лишь размер вводимых фондов [4, 10, 11]. Оба метода приводят к одинаковым результатам в пределе, т. е. для стационарного режима. Но так как в этих моделях имеется два периода — переходный и стационарный, то различная постановка задачи приводит к существенным различиям в характере переходных процессов.

При первом подходе закрепляется размер основных фондов. Поэтому колебания испытывают выбытие и соответственно ввод, необходимый для поддержания численности фондов. В теории надежности (например, [18]), а также в ряде работ по обновлению основных фондов [1, 5, 6, 10, 12] на основе анализа уравнений восстановления показывается, что эти колебания затухают асимптотически. Это позволяет доказать, что в случае единовременного массового ввода основных фондов в экономике должны возникать затухающие реновационные циклы [1, 5, 6, 12]. Недостатком такой модели является излишне усложненная форма.

Вторая модель проще. В ней задается ввод, а колебания в переходный период испытывают наличные фонды и выбытие, в пределе стремящиеся к некоторым постоянным значениям, которые легко выводятся. Так как основные фонды являются суммой доживших фондов, введенных в прошлые годы, и поскольку в определенных интервалах можно принять (хотя бы в среднем) ввод постоянным, эта модель представляется более логичной и более пригодной для теоретических исследований или практического приложения. Переход от нее к модели расширенного воспроизводства основных фондов является естественным, так как первая представляет собой частный случай второй, когда темп прироста ввода равен нулю.

Эти соображения определили выбор последней модели. При этом мы ограничились лишь анализом стационарного режима, оставляя в стороне вопрос о характеристиках переходного периода. Не затрагивается и проблема резервирования основных фондов, прямо вытекающая из стохастического характера срока службы и являющаяся частью более общего вопроса о резервировании ресурсов в народном хозяйстве (например, [15]).

Из возможных уровней исследования в рамках предлагаемой модели реализуется только общетеоретический, при котором выводятся соотношения, действительные для любого закона распределения сроков службы. Целью статьи является анализ проблемы выбора показателей для выраже-

* В рассматриваемой модели не делается различия между возмещением и капитальным ремонтом.

ния движения численности и стоимости основных фондов и в связи с этим вопроса о роли амортизации при введенных допущениях *. Рассматриваемые методы применимы к однородным фондам (в любых единицах измерения, включая и денежные), если известен закон их распределения по срокам службы и если их численность достаточно велика для проявления действия закона больших чисел. Это позволяет использовать для их исследования теорию вероятностей и математическую статистику, а также некоторые специальные методы теории страхования, математической демографии и теории надежности. Подобный подход допускает обобщение и на случай основных фондов неоднородного состава, когда каждый вид фондов имеет особый закон распределения.

Интерпретация используемых математических величин зависит от экономического содержания описываемых процессов, относящихся к трем различным объектам: одновозрастной совокупности единиц; наличным основным фондам, включающим много возрастных групп (слоев); амортизации, взятой в ее отношении к каждому из двух предыдущих объектов. Поэтому сначала рассмотрим математический аппарат, общий для этих объектов, а затем последовательно дадим экономико-математическое описание каждого из них особо.

1. Математический аппарат. Введем следующие обозначения: t — независимая случайная переменная, выражающая срок службы (для начальной единицы) или возраст (для совокупности или дожившей единицы); $f(t)$, $F(t)$, $G(t)$ — плотность распределения, главная и дополнительная функции распределения единиц по срокам службы; $H(t)$ и $h(t)$, $\Theta(t)$ и $\vartheta(t)$ — основные и нормированные случайные функции, получаемые на основе $G(t)$; $f_h(t)$ и $f_\vartheta(t)$ — величины абсолютной скорости убывания нормированных функций $h(t)$ и $\vartheta(t)$; $\mu(t)$, $\mu_h(t)$ и $\mu_\vartheta(t)$ — абсолютные величины относительной скорости убывания функций $G(t)$, $H(t)$ и $h(t)$, $\Theta(t)$ и $\vartheta(t)$; $T \equiv \bar{t}$, $\bar{t}^2$, σ_t^2, v, W — средние значения первого и второго порядка, дисперсия и коэффициент вариации сроков службы и особая константа.

Предполагается, что $f(t) \geqslant 0$ определена в интервале $0 \leqslant t \leqslant +\infty$ и что она не меняется во времени — допущение, которое вместе с условием, что ввод в единицу времени $K = \mathrm{const}$, обеспечивает возможность возникновения стационарного режима. Предполагается также, что t, $f(t)$ и все функции, получаемые исходя из нее, непрерывны, дифференцируемы в любой точке и интегрируемы на любом интервале области их существования.

Исходным пунктом анализа является функция **

$$G(t) = \int_0^\infty f(u)\,du = 1 - F(t). \tag{1}$$

С вероятностной точки зрения $F(t) = P(u < t)$, $G(t) = P(u \geqslant t)$ и $f(t) = P(t < u < t + \Delta t)$, где P — вероятность того, что случайная переменная примет значения, заключенные в заданных границах. В геометрической интерпретации $F(t)$ и $G(t)$ выражают две части фигуры, образованной кривой $f(t)$ и осями координат, расположенные слева и справа от прямой, проведенной в точке t параллельно оси ординат (рис. 1).

* Самостоятельный интерес представляют также временные параметры, которые в данной модели участвуют в выражении всех остальных характеристик основных фондов и амортизации, в частности плотность возрастного распределения, средний возраст и средний оставшийся срок службы единицы действующих основных фондов. (Заметим, что время — срок службы, возраст и т. д. — можно измерять и в натуральных единицах выпущенной продукции.)

** Функция $G(t)$ в математической демографии называется функцией дожития, в математической биологии — функцией выживания, в технических приложениях — функцией живучести и т. п.

Через $G(t)$ можно выразить все элементы, необходимые для описания обновления и амортизации основных фондов. Их можно разбить на пять групп.

1. Основные функции (рис. 2)

$$\text{(а)}\ H(t) = \int_t^\infty G(u)\,du; \qquad \text{(б)}\ \Theta(t) = H(t)/G(t) \tag{2}$$

При этом существенно, что

$$\begin{gathered}\text{(а)}\ H(0) = \Theta(0) = T; \quad \text{(б)}\ H(\infty) = 0;\\ \text{(в)}\ H(t) < \Theta(t)\ \text{при}\ G(t) < 1.\end{gathered} \tag{3}$$

2. Нормирование функции (коэффициенты)

$$\text{(а)}\ h(t) = H(t)/T; \qquad \text{(б)}\ \vartheta(t) = \Theta(t)/T. \tag{4}$$

В силу (3) имеем

$$\begin{gathered}\text{(а)}\ h(0) = \vartheta(0) = 1; \quad \text{(б)}\ h(\infty) = 0;\\ \text{(в)}\ h(t) < \vartheta(t)\ \text{при}\ G(t) < 1.\end{gathered} \tag{5}$$

3. Производные нормированных функций (абсолютные величины), выражающие скорость их изменения

$$\begin{gathered}\text{(а)}\ f_h(t) = -h'(t) = G(t)\,/\,T;\\ \text{(б)}\ f_\vartheta(t) = -\vartheta'(t) = \\ = [1 - \mu(t)\,/\,\mu_h(t)]\,/\,T.\end{gathered} \tag{6}$$

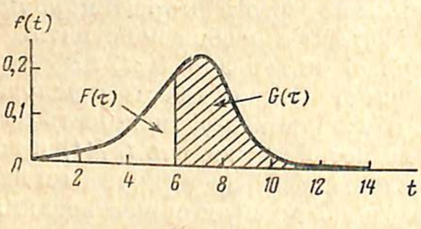

Рис. 1

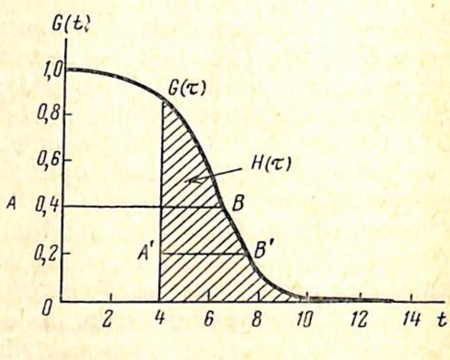

Рис. 2

К нормированным случайным функциям следует отнести также и $G(t)$, а к их производным — $f(t)$.

4. Абсолютные величины логарифмических производных функций $G(t)$, $H(t)$ и $h(t)$, $\Theta(t)$ и $\vartheta(t)$, выражающие темп их прироста *

$$\begin{gathered}\text{(а)}\ \mu(t) = f(t)\,/\,G(t) \geqslant 0; \quad \text{(б)}\ \mu_h(t) = 1\,/\,\Theta(t) > 0;\\ \text{(в)}\ \mu_\vartheta(t) = \mu(t) - \mu_h(t) \gtreqless 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Эти величины можно использовать для выражения всех других функций и для их исследования **.

5. Константы: среднее значение $T \equiv \bar{t}$, средний квадрат $\bar{t^2}$, дисперсия σ_t^2 и коэффициент вариации v временно́й переменной t, а также особая

* $\mu(t)$ известна в демографии как коэффициент смертности, а в теории надежности — как лямбда-характеристика (см. [10] и [18]).

** В частности, в силу (7) величина и знак $f_\vartheta(t)$ в (6 (а)), а тем самым и поведение $\Theta(t)$ и $\vartheta(t)$ зависят только от соотношения $\mu(t)$ и $\mu_h(t)$, т. е. от поведения $G(t)$ и $H(t)$, как и следовало ожидать на основании (2 (б)). Нетрудно показать, что в случае, если $\mu(t) > \mu_h(t)$, в момент t имеет место прирост функций $\Theta(t)$ и $\vartheta(t)$.

величина W, которая имеет не только вспомогательное значение, но и ясный экономический смысл. В дальнейшем анализе существенную роль играет выражение T и $\overline{t^2}$ соответственно через $G(t)$ и $H(t)$. Используя равенства $f(t)\,dt = -dG(t)$ и $G(t)\,dt = -dH(t)$, можно заменой переменных и последующим интегрированием по частям ([13, 14, 17, 18]), получить

$$T \equiv \bar{t} = \int_0^\infty tf(t)\,dt = \int_0^\infty G(t)\,dt; \tag{8}$$

$$\overline{t^2} = \int_0^\infty t^2 f(t)\,dt = 2W, \tag{9}$$

где

$$W = \int_0 H(t)\,dt. \tag{10}$$

Так как

$$\overline{t^2} = T^2 + \sigma_t^2 = T^2(1 + v^2), \tag{11}$$

где $v = \sigma / T \geqslant 0$, то

$$\overline{t^2} / T^2 = 1 + v^2 \geqslant 1 \tag{12}$$

для рассматриваемого здесь нецентрированного распределения положительной случайной переменной t.

2. Совокупность одновременно введенных единиц. Введем дополнительные обозначения: N_0 и $N(t)$, K_0 и $K(t)$ — численность единиц совокупности в натуральном и стоимостном выражении в начальный момент $t = 0$ и доживших до момента (возраста) $t > 0$; $M(t)$, $R(t)$ — то же самое для той части начальной численности совокупности, которая выбыла в интервале $(0, t)$, т. е. не дожила до возраста t; p — цена единицы; $U(t)$ и $S(t)$, $U_e(t)$ и $S_e(t)$ — обесценение и остаточная стоимость соответственно совокупности в целом и ее средней единицы в возрасте t; $m(t)$ и $n(t)$, $u(t)$ и $s(t)$, $u_e(t)$ и $s_e(t)$ — коэффициенты выбытия и сохранности численности совокупности, обесценения и остаточной стоимости совокупности в целом и средней единицы; $\nu(t)$, $\upsilon(t)$ и $\upsilon_e(t)$ — нормы выбытия и обесценения совокупности в целом и средней дожившей единицы в возрасте t.

Рассмотренные выше переменные и константы позволяют описать динамику одновременно введенных фондов, если учесть, что она складывается из трех различных процессов движения: 1) численности, 2) стоимости совокупности и 3) стоимости средней единицы. Для этого необходимо рассмотреть экономический смысл всех вероятностных величин в применении к такой совокупности.

Нетрудно убедиться, что со статистической точки зрения плотность распределения и ее функции имеют четкий физический смысл: они выражают соответственно долю совокупности, которая выбывает в момент t, долю, выбывшую накопленным итогом за время, протекшее с момента ввода до t, и дожившую долю совокупности *. Следовательно, движение численности одновозрастной совокупности можно выразить показателями

$$\text{(а)}\ m(t) = F(t) = 1 - G(t);\ \text{(б)}\ n(t) = G(t);\ \text{(в)}\ \nu(t) = f(t) \tag{14}$$

Сложнее вопрос о движении стоимости. Здесь следует четко различать процессы, характеризующие совокупность в целом и ее среднюю единицу. При принятых предположениях обесценение и остаточная стоимость как совокупности, так и средней ее единицы могут быть выражены просто че-

* Иначе говоря, можно записать

$$\text{(а)}\ f(t) = \frac{M'(t)}{N_0} = -\frac{N'(t)}{N_0};\quad \text{(б)}\ F(t) = \frac{M(t)}{N_0};\quad \text{(в)}\ G(t) = \frac{N(t)}{N_0}. \tag{13}$$

рез затраченное и оставшееся время работы. Для средней единицы изменение среднего оставшегося срока службы выражает процесс ее физического износа и уменьшения сохранности. Для совокупности в целом уменьшение оставшегося времени работы отражает как износ средней единицы, так и выбытие единиц, не доживших до данного возраста t. Поэтому движение стоимости совокупности и динамика стоимости средней единицы выражаются различными показателями.

В отношении совокупности следует учесть двойной смысл показателей численности. Величину $N(t)\,dt = N_0G(t)\,dt$ можно рассматривать не только как численность совокупности в интервале $(t, t + dt)$, но и как число фондоединиц времени (например, фондолет), отработанных совокупностью в возрасте t в бесконечно малом интервале dt. Следовательно, общее число фондолет, отрабатываемых совокупностью за всю жизнь, и объемы предстоящих и уже отработанных фондолет, учитывая (8), (2(а)) и (3(а)), соответственно равны интегралам этой величины в пределах $(0, \infty)$, (t, ∞), $(0, t)$ *. Деля два слагаемых на их сумму, получим коэффициенты, выражающие физические износ и сохранность, а тем самым обесценение и остаточную стоимость совокупности в целом. Следовательно, учитывая (4(а)) и (6(а)), динамику стоимости совокупности можно описать показателями

$$\text{(а)}\ u(t) = 1 - h(t);\quad \text{(б)}\ s(t) = h(t);\quad \text{(в)}\ v(t) = f_h(t). \tag{16}$$

Наконец, описание динамики стоимости средней дожившей единицы определяется следующими соображениями. В любой момент $t \geqslant 0$ оставшееся время работы в расчете на среднюю единицу (оставшийся срок службы) равно частному от деления оставшегося времени работы, которое можно ожидать от совокупности единиц в целом в возрасте t, на дожившую численность. Это частное выражается функцией $\Theta(t)$. Действительно, согласно (15) $N_0H(t)$ показывает оставшееся время работы совокупности, а $N_0G(t)$ — ее остаточную численность. Результат деления первого на вторую дает $\Theta(t)$. Нетрудно убедиться в справедливости (3(а)), показывающей, что в начальный момент оставшийся срок службы средней единицы $\Theta(0) = H(0) = T$. Следовательно, при введенных предположениях частное $\vartheta(t) = \Theta(t)\,/\,T$ показывает физическую сохранность, а $1 - \vartheta(t)$ — физический износ средней единицы. Поэтому для описания динамики стоимости средней единицы в соответствии с (4(б)) и (6(б)) необходимо принять следующие показатели:

$$\text{(а)}\ u_e(t) = 1 - \vartheta(t);\quad \text{(б)}\ s_e(t) = \vartheta(t),$$
$$\text{(в)}\ v_e(t) = f_\vartheta(t). \tag{17}$$

Можно заметить, что $s_e(t) = s(t)\,/\,n(t)$ **. Поэтому $s_e(t)$ отличается сложным поведением, которое зависит от соотношения динамики функций

---

* Т. е., согласно (8) и (2 (а)), имеем

$$\text{(а)}\ \int_0^\infty N_0G(t)\,dt = N_0T;\quad \text{(б)}\ \int_t^\infty N_0G(u)\,du = N_0H(t);$$

$$\text{(в)}\ \int_0^t N_0G(u)\,du = N_0\,[T - H(t)]. \tag{15}$$

Очевидно (если разделить эти выражения на N_0), здесь T выражает средний срок службы единиц основных фондов в возрасте $t = 0$; $H(t)$ — среднее оставшееся время работы единичной совокупности, измеряемой в каких-либо укрупненных единицах; $T - H(t)$, согласно (3 (а)),— среднее прошлое время работы такой совокупности.

** Как показывают (3 (в)) и (5 (в)), для любого t, при котором $n(t) < 1$, имеет место неравенство $s(t) < s_e(t)$.

$s(t)$ и $n(t)$. В то время как $\nu(t) \geqslant 0$, а $v(t) > 0$, согласно (7(в)), $v_e(t) \gtreqless 0$. Случай $v_e(t) < 0$ означает возрастание остаточной стоимости средней дожившей единицы. Такое явление теоретически может быть только в отношении стоимости средней единицы, но не в отношении стоимости совокупности, которая с увеличением ее возраста строго убывает независимо от того, уменьшается или остается неизменной ее численность.

Эти показатели позволяют выразить дожившую и выбывшую численность в натуральном или стоимостном (если измерять в начальной стоимости) выражениях, остаточную стоимость и обесценение совокупности и средней ее единицы в следующем виде:

$$\text{(а)}\ K(t) = K_0 G(t); \quad \text{(б)}\ R(t) = K_0[1 - G(t)], \tag{18}$$

где $K = pN$ и $R(t) = pM(t)$;

$$\text{(а)}\ S(t) = K_0 h(t); \quad \text{(б)}\ U(t) = K_0[1 - h(t)] \tag{19}$$

$$\text{(а)}\ S_e(t) = p\vartheta(t); \quad \text{(б)}\ U_e(t) = p[1 - \vartheta(t)]. \tag{20}$$

3. Наличные основные фонды разного возраста. Дополнительные обозначения: τ — возраст; $\Phi(t)$ и Φ_0, $\overline{\Phi}(t)$ и $\overline{\Phi}_0$ — соответственно основные фонды в момент t (отсчитываемый от момента $t = 0$, с которого начали впервые вводить фонды данного типа *) и в стационарном режиме (при $t \to \infty$) в натуральном и ценностном выражении; $\phi(\tau)$ — численность группы в возрасте τ; $U(t)$ и U_0, $\overline{U}(t)$ и $\overline{U}_0$, $\overline{S}(t)$ и $\overline{S}_0$ — обесценение всех единиц наличных фондов в единицу времени и за весь период их существования $(0, t)$ и их остаточная стоимость в целом — в переходный период и в стационарном режиме; $\bar{s}_0$ и $\bar{u}_0$ — коэффициенты остаточной стоимости и обесценения наличных фондов в стационарном режиме; $\overline{T}(\tau)$ и $\overline{T}_0$, $\overline{\Theta}_0$, $\bar{\tau}_0$, ϑ_0 — полный средний срок службы отдельной группы в возрасте τ и фондов в целом, средний оставшийся срок службы и средний возраст наличных фондов в целом, средний по фондам коэффициент среднего оставшегося срока службы (и среднего возраста) в равновесии; $\varphi(\tau)$ — предельная плотность распределения возрастов; $m(t)$ и m_0, $n(t)$ и n_0, $v(t)$ и v_0 — нормы выбытия, ввода и обесценения — для переходного и стационарного состояний.

В применении к наличным основным фондам показатели, рассмотренные в п. 1, приобретают иное экономическое содержание: t выражает время в некоторой абсолютной шкале, общей всем возрастным группам. При $N = 1$ (или $K = 1$) $G(\tau)$ есть функция возрастного дожития, показывающая численности доживших возрастных групп (см. [11] и [19]). Это вызывает изменение смысла всех величин, определяемых через $G(\tau)$, и прежде всего T, который выражает при этих условиях не средний срок службы, а численность наличных основных фондов в стационарном режиме. Точно также $H(\tau)$ показывает численность (или начальную стоимость) групп в возрасте, равном или старше τ, а $T - H(\tau)$ — то же самое для групп в возрасте моложе τ и т. д.

Все показатели движения численности и стоимости основных фондов являются суммарными ** или средними значениями характеристик возрастных слоев. В стационарном режиме численность, остаточная стоимость и

---

* При этом $0 \leqslant t \leqslant \infty$ и $0 \leqslant \tau \leqslant t$.

** В силу этого состояние фондов в момент t представляет собой гамму всех одновременно существующих состояний, через которые проходит одна возрастная группа за время своего существования от момента $\tau = 0$ до $\tau = t$ (включая и случай $\tau = \infty$, т. е. стационарный режим).

обесценение наличных фондов, согласно (8)—(12) и (18), (19), получают простое выражение

$$\text{(a)}\ \Phi_0 = \int\limits_0^\infty N_0 G(\tau)\,d\tau = NT; \text{(б)}\ \overline{\Phi}_0 = K_0T; \tag{21}$$

$$\overline{S}_0 = \int\limits_0^\infty S(\tau)\,d\tau = K_0T(1+v^2)/2; \tag{22}$$

$$\overline{U}_0 = \overline{\Phi}_0 - \overline{S}_0 = K_0T(1-v^2)\,/\,2, \tag{23}$$

откуда получаем коэффициенты остаточной стоимости и обесценения средней наличной единицы

$$\bar{s}_0 = \overline{S}_0\,/\,\overline{\Phi}_0 = (1+v^2)\,/\,2; \tag{24}$$

$$\bar{u}_0\,/\,\overline{U}_0\,/\,\overline{\Phi}_0 = (1-v^2)\,/\,2. \tag{25}$$

Нетрудно ответить на вопрос, усреднением каких показателей одновозрастной совокупности являются коэффициенты $\bar{s}_0$ и $\bar{u}_0$. Коэффициенты и нормы, характеризующие наличные основные фонды, являются средними значениями соответствующих показателей возрастных групп, причем весами служат относительные доли данной группы $\phi(\tau)$ в общем объеме фондов

$$\varphi(\tau) = \phi(\tau)\,/\,\Phi_0 = G(\tau)\,/\,T = f_h(\tau), \tag{26}$$

представляющие собой плотность распределения возрастов *.

Пользуясь этими весами, можно убедиться в том, что, учитывая (4(б)), (10)—(12) и (26), средний по фондам коэффициент оставшегося срока службы единицы

$$\overline{\vartheta}_0 = \int\limits_0^\infty \vartheta(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = (1+v^2)/2 \tag{28}$$

и, следовательно **,

$$\text{(a)}\ \bar{s}_0 = \overline{\vartheta}_0;\ \text{(б)}\ \bar{u}_0 = 1 - \overline{\vartheta}_0, \tag{31}$$

т. е. эти величины являются средними значениями показателей $s_e(\tau)$ и $u_e(\tau)$, но не $s(\tau)$ и $u(\tau)$.

* Соответственно интегральные функции

$$\text{(a)}\ \varphi(u < \tau) = 1 - h(\tau);\ \text{(б)}\ \varphi(u \geqslant \tau) = h(\tau) \tag{27}$$

являются коэффициентами возрастной структуры.

** Тот же результат можно получить исходя из (2 (б)), (4 (б)), (9) — (12), если определить среднее межгрупповое значение среднего оставшегося срока службы

$$\overline{\Theta}_0 = \int\limits_0^\infty \Theta(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = W/T = T(1+v^2)/2 \tag{29}$$

(W выражает суммарное количество фондолет, ожидаемых от всех возрастных групп в будущем при $N = 1$, а T — численность фондов при том же условии) и разделить эту величину на средний срок службы новой единицы. Заметим, что $\overline{\Theta}_0$ необходимо относить именно к среднему сроку службы новой единицы (см. [4, 8, 10]), а не к полному среднему сроку службы T единицы наличных фондов, как предлагалось, например, в [2], так как в этом случае в силу того, что

$$\overline{\tau_0} = \int\limits_0^\infty \tau\varphi(\tau)\,d\tau = T(1+v^2)/2 = \overline{\Theta}_0 = {}^1/{}_2\mathbf{T}, \tag{30}$$

$$\mathbf{T} = \int\limits_0^\infty \mathbf{T}(\tau)\,d\tau = T(1+v^2) = \overline{\tau_0} + \overline{\Theta}_0, \quad \mathbf{T}(\tau) = \tau + \Theta(\tau) \tag{30a}$$

мы получим заниженное значение для $\overline{\vartheta}_0$, равное в любом случае 0,5 (см. также [2, 4, 6]), независимо от величины коэффициента вариации.

В стационарном режиме все рассмотренные показатели численности, остаточной стоимости и обесценения фондов в целом и их средней единицы — постоянные величины. Это является выражением статики фондов как состояния равновесия взаимно противоположных процессов ввода в строй основных фондов, с одной стороны, физического выбывания и обесценения их, с другой. Причем равновесие в данной модели возникает лишь в пределе (при $t \to \infty$), в связи с чем все величины являются асимптотическими *.

Состояние равновесия объема основных фондов определяется равенством между выбытием и вводом (в натуральном или ценностном выражении). Рассмотрим пример регулярного ввода N_0 какого-либо вида основных фондов, начиная с некоторого момента $t = 0$, для которого $\Phi(0) = 0$. В этом случае

$$M_0 = \lim_{t\to\infty} M(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t N_0 f(\tau)\, d\tau = N_0. \tag{32}$$

Понятия нормы ввода $n(t) = N_0 / \Phi(t)$ и нормы выбытия ** $m(t) = M(t) / \Phi(t)$ с учетом того, что фонды также представляют собой асимптотическую величину позволяют записать ***

$$m_0 = \lim_{t\to\infty} m(t) = \lim_{t\to\infty} n(t) = n_0 = 1/T. \tag{34}$$

Поскольку $\Phi(0) = 0$, а $\Phi(\infty) > 0$, мы должны предположить, что в переходный период равновесие между вводом и выбытием нарушается в пользу первого, т. е., что накопленный итог разностей между вводом и выбытием фондов положителен. Действительно

$$\int_0^\infty [N_0 - M(t)]\, dt = N_0 T = \Phi_0. \tag{35}$$

Следовательно, в переходный к стационарному период имеет место ограниченное расширение основных фондов, хотя условия воспроизводства и объем регулярных вводов остаются неизменными.

Остаточная стоимость как постоянная величина определяется равновесием между обесценением наличных фондов в единицу времени и стоимостью постоянных вводов. В силу (16(в)) и (19(б)) суммарное обесценение всех групп в единицу времени (при статическом равновесии)

$$U_0 = \lim_{t\to\infty} U(t) = \int_0^\infty K_0 v(\tau)\, d\tau = K_0, \tag{36}$$

а норма обесценения основных фондов

$$v_0 = \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} U(t)/\Phi(t) = 1/T = m_0. \tag{37}$$

---

* Поэтому они выражаются несобственными интегралами, сходящимися на бесконечном полуинтервале $(0, \infty)$.

** Использование стоимостных величин $R(t) = pM(t)$, $K(t) = pN(t)$ и $\overline{\Phi}(t) = p\Phi(t)$ в данном случае дает те же значения для норм ввода и выбытия.

*** Норму выбытия можно также выразить как среднее значение коэффициентов интенсивностей выбытия отдельных возрастных групп в виде

$$m_0 \equiv \bar{\mu}_0 = \int_0^\infty \mu(\tau)\varphi(\tau)\, d\tau = \frac{1}{T}. \tag{33}$$

В начальный момент, когда фонды отсутствуют, $\overline{S}(0) = 0$ и $\overline{U}(0) = 0$. Очевидно, лишь с накоплением фондов в переходный период образуются $\overline{S}(t)$ и $\overline{U}(t)$, которые при $t \to \infty$ стремятся к $\overline{S}_0$ и $\overline{U}_0$. Действительно, учитывая (19(a)),

$$\overline{S}_0 = \lim_{t\to\infty} \overline{S}(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t S(\tau)\,d\tau = K_0 T(1+v^2)/2. \tag{38}$$

Приведенный выше пример позволяет представить $\overline{S}_0$ и $\overline{U}_0$ как величины, накопленные в переходный период. При этом оказывается, что остаточную стоимость можно выразить через соотношение между обесценением и вводом. В самом деле, если в начальный момент $\overline{S}(0) = 0$, то для образования $\overline{S}_0 > 0$ необходимо, чтобы накопленный итог разностей между регулярными вложениями и обесценением наличных фондов в единицу времени за весь переходный период был положителен. Легко убедиться, что

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t [K_0 - U(u)]\,du = K_0 T(1+v^2)/2 = \overline{S}_0. \tag{39}$$

В свою очередь объем обесценения наличных фондов зависит от соотношения между потерянной стоимостью $U(t)$ и стоимостью восстановительного ввода, составляющего часть валового ввода K_0 и равного начальной стоимости $R(t)$ выбывших в момент t единиц *. Отличие $\overline{U}_0$ от нуля доказывает, что в переходный период имело место превышение обесценения над восстановительными вложениями. Действительно

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t [U(u) - R(u)]\,du = K_0 T(1-v^2)/2 = \overline{U}_0. \tag{40}$$

Итак, численность, остаточная и потерянная стоимость основных фондов в стационарном режиме — величины постоянные потому, что они выражают состояние равновесия между капиталовложениями (по их численности и стоимости), с одной стороны, и процессами выбывания и обесценения основных фондов, с другой. В переходный период такое равновесие нарушено, благодаря чему имеет место ограниченный рост объема и стоимости основных фондов и образование всех констант, которые характеризуют количественно основные фонды в состоянии статического равновесия.

4. Амортизация. Дополнительно используются обозначения: a_0, $\alpha(\tau)$, $\bar{a}(\tau)$ — стационарная линейная норма, коэффициент и объем амортизации с возрастной группы в единицу времени; A_0 — амортизация, отчисляемая возрастной группой за все время ее жизни или всеми наличными фондами в стационарном режиме в единицу времени; $A(u < \tau)$ и $A(u \geqslant \tau)$ — амортизация с единиц совокупности, выбывших до и после произвольного момента (возраста) τ; $R(u < \tau)$ и $R(u \geqslant \tau)$ — выбытие из группы до и после возраста τ; $A_s(u < \tau)$, $A_s(u \geqslant \tau)$ — избыточная амортизация (отрицательная или положительная) с единиц одновозрастной совокупности, выбывших до и после возраста τ; $\overline{A}_s(u < \tau)$ и $\overline{A}_s(u \geqslant \tau)$ — избыточная амортизация, выплаченная выбывшими в прошлом и дожившими единицами всех возрастных групп фондов; $A(\tau)$, $\overline{A}_\tau$, $\overline{A}_\Theta$, $\widetilde{A}$, $\overline{A}_0$ — амортизация с возрастной группы за период ее жизни $(0, \tau)$, со всех возрастных групп вместе в прошлом, в будущем и за весь срок их жизни, а также накоплен-

* В переходный период $R(t) < K_0$ для любого $0 < t < \infty$, и поэтому K_0 включают также чистые вложения; лишь в пределе, по истечении максимального срока службы, постоянные вложения целиком превращаются в реновационные.

ный фонд амортизации: $A(t)$ — амортизация с наличных фондов в единицу времени в момент t переходного периода $(0 < t < \infty)$; $K_s(t)$, $\overline{K}_s$ — объем капиталовложений из фонда чистого накопления в данные основные фонды в единицу времени и предельное значение суммарного объема таких вложений; Φ_i и w_i — основные фонды вида i и их относительная доля в фондах данной структуры в стационарном режиме; a_i, $\bar{a}_0$ — нормы линейной стационарной амортизации фондов вида i и их среднее значение; T_i, $\overline{T}_{\text{гар}}$ — средние сроки службы фондов вида i и их средняя гармоническая.

Экономическая роль амортизации выявляется при сопоставлении ее с выбыванием и обесценением основных фондов в процессе обновления. Центральной проблемой амортизации является норма амортизационных отчислений $a = A / \overline{\Phi}$. Так как отчисления в единицу времени A должны обеспечить финансирование реновационных вложений для возмещения выбытия, то необходимо и достаточно, чтобы в стационарном режиме

$$a_0 = m_0 = 1 / T, \text{ т. е. } A_0 = \overline{\Phi}_0 / T. \tag{41}$$

В этом случае отчисления $A_0 = R_0$ также полностью покроют обесценение фондов в единицу времени U_0, так как согласно (37) $v_0 = m_0$. Значит, амортизация по норме a_0 в стационарном режиме реализует обе экономические функции в равной мере.

Такое положение имеет место только в неизменных условиях воспроизводства, иначе равенство выбытия и обесценения может не соблюдаться. Это относится к любому случаю расширенного воспроизводства, значит, и к переходному периоду, когда постоянный объем вложений превышает выбывание. Использование нормы a_0 в этот период приводит к образованию дополнительных накоплений в виде фонда неиспользованных амортизационных отчислений $\overline{A}_0$. Накопление такого фонда предполагает: а) превышение обесценения над выбытием в переходный период и б) ведущее значение ценообразующей роли основных фондов в возникновении амортизации как особого экономического явления, отражающего в денежно-финансовой сфере обесценение основных фондов. Первое условие выполняется, как показывает (40). Докажем теперь, что амортизация по стационарной норме a_0 при принятых предположениях компенсирует потерю стоимости фондов и лишь в силу этого позволяет финансировать возмещение выбытия.

Начнем с одновозрастной совокупности. Условия простого воспроизводства для нее означают, что накопленный фонд амортизации A_0 должен вернуть начальную стоимость вложения K_0. Действительно, если применяется норма a_0, то отчисления в единицу времени $\bar{a}(\tau) = a_0 K_0 G(\tau)$, а общая сумма отчисленной за всю жизнь совокупности амортизации

$$A_0 = \int_0^\infty \bar{a}(\tau)\, d\tau = K_0. \tag{42}$$

При этом оказывается, что коэффициент амортизации $\alpha(\tau) = a_0 G(\tau) = \upsilon(\tau)$. Поэтому обесценение и отчисление амортизации в единицу времени равны, а значит, равны их накопленные итоги за время существования совокупности до момента (возраста) τ.

Сложнее доказательство равенства обесценения и амортизации по норме a_0 для разновозрастных фондов. Покажем, что амортизация по норме a_0 образует фонд, равный обесценению наличных фондов $\overline{U}_0$ в стационарном режиме (см. [6]).

В прошлом дожившие единицы каждой возрастной группы отчислили $A(\tau) = a_0 \tau K_0 G(\tau)$, а группы всех возрастов $(0 \leqslant \tau \leqslant \infty)$ отчислили, учитывая (30), $\overline{A}_\tau = K_0 \bar{\tau}_0$. Нетрудно показать, что в будущем они отчисляют такую же сумму $A_\Theta = K_0\overline{\Theta}_0$, так как $\overline{\Theta}_0 = \bar{\tau}_0$. Суммируя, получим $\bar{A} = \bar{A}_\tau + \bar{A}_\Theta > \Phi_0$ на величину KTv^2. Может показаться, что правило равенства обесценения и амортизации здесь нарушено. Но это неверно. Разбалансировка относится только к прошлому, но не к будущему, так как согласно (22) $\bar{A}_\Theta = \bar{S}_0$. Причину того, что $\bar{A}_\tau > \bar{U}_0$ следует искать в особенностях процесса амортизации одновозрастной совокупности при случайном сроке службы.

Ясно, что при норме a_0 единицы отчисляют меньше, равно или больше своей начальной стоимости в зависимости от значения $t\,/\,T$, где t — индивидуальный срок службы. Баланс между амортизацией, выплаченной выбывшими единицами, и их начальной стоимостью возникает лишь по истечении максимального срока службы ω (у нас $\omega = \infty$). Значит в интервале, в котором возраст совокупности $\tau < \infty$, указанный баланс для выбывших единиц не имеет места. В этом пункте — ключ к решению поставленного вопроса.

Для ответа на него разобьем интервал существования возрастной группы на два периода: до и после произвольного возраста τ, найдем для каждого из них разность между амортизацией выбывших единиц (но не амортизационными отчислениями со всей совокупности за тот же период) и их начальной стоимостью, определяемой согласно (18), и, наконец, просуммируем эти разности отдельно для каждого периода $(0, \tau)$ и (τ, ∞) по всем возрастным группам. Получим

$$\bar{A}_s(u \geqslant \tau) = -\bar{A}_s(u < \tau) = K_0Tv^2 > 0. \tag{43}$$

Следовательно, отчисленная в прошлом единицами наличных фондов амортизация $\bar{A}_\tau$ содержала избыток в размере $\bar{A}_s(u \geqslant \tau)$, за счет которого была покрыта равная ему недоамортизация $\bar{A}_s(u < \tau)$ единиц, выбывших в прошлом, т. е. до достижения каждой соответствующей группой возраста τ. В возмещение же собственного износа наличные фонды отчислили

$$\bar{A}_0 = \bar{A}_\tau - \bar{A}_s(u \geqslant \tau) = K_0T(1 - v^2)\,/\,2 = \bar{U}_0. \tag{44}$$

Так как $\bar{A}_0$ не пришлось использовать на возмещение выбытия, то к моменту установления статического равновесия должны образоваться дополнительные накопления в размере $\bar{A}_0$, если отчисления производились по норме a_0 *. Таким образом, не только в условиях роста валовых капиталовложений (см. [1, 16]), но и при постоянном их объеме возможно превышение амортизационных отчислений над восстановительными капиталовложениями и в результате этого накопление средств в виде неиспользованного амортизационного фонда в переходный период, предшествующий установлению равновесия.

Это накопление не имело бы места, если бы в переходный период использовалась переменная норма амортизации $a(t) = m(t) < m_0$. Однако в этом случае амортизация не могла бы верно отражать ценообразующую роль основных фондов. Для этого требуется соблюдение равенства $\bar{A}(t) = \bar{U}(t)$ для любого $0 \leqslant t \leqslant \infty$ и, значит, использование нормы a_0 и в пе-

---

* Действительно, свободный фонд амортизации $\bar{A}_0$ можно рассматривать как накопленный за переходный период итог разностей между амортизационными отчислениями со всех фондов $A(t) = K_0[1 - h(t)]$ и реновационными вложениями $R(t) = pM(t) = K_0[1 - G(t)]$ в единицу времени, который равен

$$\int_0^\infty [A(t) - R(t)]\,dt = K_0T(1 + v^2)/2 = \bar{A}_0. \tag{45}$$

реходный период *. В пользу применения $a_0 = 1/T$ независимо от характера воспроизводства говорят и чисто экономические соображения. Новая экономическая реформа выдвигает на первый план методы хозрасчета. Логическим завершением таких методов является перевод финансирования капиталовложений на банковское кредитование. В этом случае амортизация тождественна возвращению взятой ссуды, а плата за основные фонды — проценту на эту ссуду. Чтобы амортизация играла роль средства возвращения кредитов на капиталовложения, неоходимо при определении амортизационных отчислений использовать стационарную линейную норму амортизации (исходя при этом из начальной, а не восстановительной стоимости основных фондов **).

Рассмотренная модель может быть распространена и на случай разнородных фондов сложной структуры путем агрегирования всех показателей, характеризующих каждый отдельный вид фондов ***. Дальнейшее обобщение модели требует последовательно устранить ограничения, характерные для статического состояния: прежде всего условие постоянности объема ввода, а затем и предположения неизменности во времени функции дожития (и всех показателей, получаемых на ее основе), независимости технико-экономических характеристик основных фондов от их возраста и момента ввода в строй и т. д.

Задача оптимизации процесса обновления и амортизации основных фондов требует увязки реновационно-амортизационных моделей рассмотренного типа как с моделями оптимизации капиталовложений, например, путем определения оптимального срока, так и с наиболее общими моделями экономического развития и распределения капиталовложений типа динамических задач математического программирования. В частности, реновационные модели необходимо включить в динамический межотраслевой баланс, в котором обычно используется предположение о детерминированности срока службы и совершенно не учитывается эффект от расширения основных фондов, вызывающий количественное расхождение между возмещением и амортизацией по стационарной линейной норме. Это позволит учесть случайность сроков службы, использовать статистические данные о выбытии и дожитии основных фондов, подготовить применение стохастических моделей восстановления в качестве элемента структуры более сложных оптимизационных задач.

* Правильность этого подтверждается и тем, что остаточную стоимость $\bar{S}_0$ можно рассматривать как объем вложений, необходимых для образования наличных фондов заданной численности (с учетом износа). Пусть часть вложений финансируется за счет отчислений с уже введенных основных фондов $\overline{\Phi}(t) > 0$ для $t > 0$, а другая часть $K_s(t) = K_0 - A(t)$ $(A(t) = a_0\overline{\Phi}(t))$ получается за счет внешних источников (из фонда накопления). Легко определить, что общая сумма всех внешних вложений $\bar{K}_s = \bar{S}_0$.

** Понижение восстановительной стоимости по сравнению с начальной обязано своим происхождением не использующей, а производящей фонды отрасли, а в конечном итоге — прогрессу во всем народном хозяйстве. Поэтому избыток амортизации, вызванный уменьшением восстановительной стоимости, логично считать дополнительной прибылью, которую должно присвоить общество, но не предприятие. Нужно отметить, что такой подход к амортизации предполагает действие если не оптимальной, то хотя бы хорошо сбалансированной системы цен.

*** В частности, в стационарных условиях агрегированная норма амортизации $\bar{a}_0$, будучи средней арифметической частных норм a_i, оказывается величиной, обратной средней гармонической $\bar{T}_{\text{гар}}$ средних сроков службы T_i отдельных видов фондов (см. также [7] и [21]), т. е.

$$\bar{a}_0 = \sum_i a_i w_i = \sum \frac{1}{T_i} w_i = 1/\bar{T}_{\text{гар}}, \tag{46}$$

где веса $w_i = \bar{\phi}_i / \overline{\Phi}_0$ представляют собой коэффициенты стоимостной структуры основных фондов.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Ланге. Теория воспроизводства и накопления. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
2. М. М. Филоненко-Бородич. Математические основы теории амортизации. Труды Экономического Бюро при Народном Комиссаре путей сообщения, вып. 1. М., 1925.
3. М. М. Филоненко-Бородич. О кривой ежегодного амортизационного расхода. Труды Экономического бюро при Народном Комиссаре путей сообщения, вып. 4. М., 1926.
4. М. Е. Подтягин. Методы изучения амортизации. Плановое хозяйство, 1928, № 1.
5. Е. Н. Бухман. Амортизация массового однородного имущества. Вестник статистики, 1927, № 4.
6. Е. Н. Бухман. Амортизация массового однородного имущества (продолжение). Вестник статистики, 1928, № 2.
7. Е. Н. Бухман. К построению теории амортизации. Вестник статистики, 1929, № 1.
8. Е. Н. Бухман, И. А. Подгородецкий. Статистика связи. М. Связьиздат, 1948 (гл. 8).
9. А. Я. Боярский. Математика для экономистов. М., Госстатиздат, 1961.
10. А. Я. Боярский. Математико-экономические очерки. М., Госстатиздат, 1962.
11. Я. Б. Кваша. Амортизация и сроки службы основных фондов. М., Изд-во АН СССР, 1959.
12. J. Koźniewska. Teoria Odnowienia. Warszawa, 1965.
13. А. Кофман. Методы и модели исследования операций. М., «Мир», 1966.
14. В. Ф. Шукайло. О некоторых общих математических вопросах теории надежности и демографической статистики. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 3.
15. С. М. Вишнев. Проблемы оптимальной системы народнохозяйственных резервов. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, вып. 3.
16. E. Domar. Essays in the theory of economic growths N. Y., Oxford Univ. Press, 1957.
17. Н. В. Смирнов, И. В. Дунин-Барковский. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М., «Наука», 1965.
18. И. Базовский. Надежность. Теория и практика. М., «Мир», 1965.
19. А. Цигельник. Статистическое определение фактического срока службы парка металлорежущих станков. Вестник статистики, 1964, № 3.
20. Г. Кузнецов. О методах статистического изучения сроков службы оборудования. Вестник статистики, 1956, № 5.
21. В. Анисимов. О форме средней для определения сроков амортизации основных фондов. Вестник статистики, 1962, № 9.

Поступила в редакцию
12 VIII 1968