

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАЗМЕЩЕНИИ ОСТАНОВОК ГОРОДСКОГО ПАССАЖИРСКОГО ТРАНСПОРТА

М. Г. АЛИШАЕВ

(Махачкала)

Вопросы совершенствования организации движения пассажирского транспорта привлекают все большее внимание и связи с ростом пассажирского движения в городах [1—3]. Выигрыш нескольких минут в день каждым пассажиром означает экономию десятков тысяч часов в масштабе среднего города.

В статье рассматривается простейшая проблема наилучшего размещения остановок по выбранным маршрутам: предполагается, что имеется город лишь с одной прямолинейной улицей, по которой проложена единственная линия маршрута автобуса, троллейбуса или трамвая (в дальнейшем будем говорить лишь об автобусе); пассажир, вышедший из какого-либо пункта до пункта назначения, следует всегда вдоль этой линии пешком или на автобусе; пассажирские потоки считаются детерминированными. Требуется определить, сколько и где нужно сделать остановок автобуса, чтобы суммарное время — потерянное пассажирами на пешие переходы и время автобусных остановок — было наименьшим.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Введем некоторые понятия, необходимые для описания пассажирских перевозок в одномерном городе.

Движение по городу в течение года носит периодический характер. Можно считать, что пассажирские потоки меняются в течение недели, оставаясь одинаковыми от одной недели к другой, т. е. представляют собой функции времени с периодом, равным одной неделе.

Примем следующие обозначения: ось ox — направление движения автобуса; a и b — границы города, $a \leq x \leq b$; x_i — остановки по ходу движения; $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$; $x_{i+1/2} = 0,5(x_i + x_{i+1})$ — середины между остановками, $i = 0, 1, \dots, n-1$; $x_{-1/2} = a$, $x_{n+1/2} = b$.

Количество пассажиров, выходящих для посадки в транспорт за одну неделю на отрезке $[a, x]$, представляет собой неубывающую функцию $P(x)$. Производную этой функции $p(x) = P'(x) \geq 0$ будем называть входящим потоком в точке x .

Количество пассажиров, покидающих транспорт и прибывающих к месту назначения на отрезке $[a, x]$, представляет также неубывающую функцию $Q(x)$, причем $Q(x) \leq P(x)$, $Q(b) = P(b)$. Производную этой функции $q(x) = Q'(x) \geq 0$ будем называть выходящим потоком в точке x , а пассажиропотоком $s(x)$ — сумму входящего и выходящего потоков, пассажирообменом $r(x)$ — разность между ними

$$s(x) = p(x) + q(x) \geq 0, \quad r(x) = p(x) - q(x) \geq 0. \quad (1)$$

Согласно определениям, единицей измерения этих потоков является *пасс/км*.

Областью влияния остановки x_i для поступающих в транспорт пассажиров назовем тот участок маршрута около остановки x_i , с которого пассажиры предпочтут прийти для посадки к этой остановке. Она, очевидно, представит собой некоторую окрестность точки x_i , содержащую примерно половинки интервалов (x_{i-1}, x_i) и (x_i, x_{i+1}) . Найдем эту окрестность, приняв во внимание скорость движения автобуса v и скорость движения пассажира v_0 .

Если пассажир находится в точке x , $x_{i-1} < x < x_i$, то он прикинет время прихода на ту или другую остановку $(x - x_{i-1}) / v_0$ и $(x_i - x) / v_0$ и учтет, что при выборе последующей остановки по ходу движения он выигрывает то время, которое потратит автобус на передвижение от x_{i-1} до x_i , т. е. $(x_i - x_{i-1}) / v$. Следовательно, он предпочтет остановку x_i , если

$$\frac{x_i - x}{v_0} < \frac{x - x_{i-1}}{v_0} + \frac{x_i - x_{i-1}}{v}. \quad (2)$$

Если же пассажир находится между остановками x_i и x_{i+1} , то аналогичные рассуждения показывают, что он предпочтет остановку x_i , если

$$\frac{x - x_i}{v_0} < \frac{x_{i+1} - x}{v_0} + \frac{x_{i+1} - x_i}{v}. \quad (3)$$

Из неравенств (2), (3) получим область влияния остановки для пассажиров, входящих в транспорт

$$x_{i-1/2} - \frac{v_0}{2v}(x_i - x_{i-1}) < x < x_{i+1/2} - \frac{v_0}{2v}(x_{i+1} - x_i). \quad (4)$$

Для пассажиров, выходящих на данной остановке, область ее влияния можно найти подобными же рассуждениями. При выборе последующей остановки по ходу движения теперь уже пассажир теряет то время, которое тратит автобус на передвижение от данной остановки до последующей

$$x_{i-1/2} + \frac{v_0}{2v}(x_i - x_{i-1}) < x < x_{i+1/2} + \frac{v_0}{2v}(x_{i+1} - x_i). \quad (5)$$

В следующем разделе будет показано, что с достаточной для практики точностью можно пользоваться одной областью влияния как для входящих в транспорт, так и для покидающих его пассажиров. Эта область получится, если в неравенстве (4) или (5) перейти к пределу, когда $v \rightarrow \infty$. Полученную область будем называть просто областью влияния остановки x_i и обозначать ее через ω_i : $x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}$. Области влияния конечных остановок x_0 и x_n соответственно $a < x < x_{1/2}$ и $x_{n-1/2} < x < b$.

Наполнением N_i назовем количество пассажиров, которые проехали в течение недели между остановками x_i и x_{i+1} . Нетрудно видеть, что

$$N_i = R(x_{i+1/2}), \quad R(x) = \int_a^x r(x) dx, \quad S(x) = \int_a^x s(x) dx. \quad (6)$$

Функцию $R(x)$ будем называть функцией наполнения. Очевидно, $R(x) \geq 0$, так как число пассажиров, покидающих транспорт на отрезке $[a, x]$, не может превзойти числа вошедших в транспорт пассажиров. Если функция наполнения обращается в нуль в какой-либо промежуточной точке c , $a < c < b$, то это означает, что маршрут $[a, b]$ можно разбить на два самостоятельных маршрута $[a, c]$ и $[c, b]$. Поэтому положим, что во всех промежуточных точках $N_i \geq N_{\min} > 0$. Пусть время τ , теряемое автобусом на всех остановках, всегда одинаково. Оно складывается из времени на

торможение и разгон автобуса, открытие и закрытие дверей и на вход и выход пассажиров. Последняя часть может зависеть от числа пассажиров, входящих и выходящих на данной остановке, и от наполнения автобуса. Предположение постоянства τ обеспечивает линейность функционала, благодаря чему становится возможным введение характеристик пассажирских потоков за неделю.

2. ОЦЕНКА РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ОСТАНОВКАМИ

Рассмотрим тривиальный случай, чтобы получить простую формулу для оценки расстояний между остановками.

Пусть длина маршрута автобуса бесконечна, пассажиропотоки постоянны, автобусы следуют регулярно с интервалом T минут. Будем считать, что на каждом километре пути в минуту является на посадку одно и то же количество пассажиров j и столько же покидает автобус, так что количество пассажиров в автобусе на каждом рейсе и каждой остановке остается постоянным и равным N .

Из условия очевидно, что остановки расположатся на одинаковых расстояниях h друг от друга. Если ввести обозначения $\delta = 0,5(1 - v_0/v)h$, $\Delta = 0,5(1 + v_0/v)h$, область влияния остановки $x_i = 0$ для пассажиров, входящих и покидающих транспорт, примет соответственно вид $-\Delta < x < \delta$ и $-\delta < x < \Delta$.

Суммарное время в области влияния одной данной остановки будет складываться из времени на пеший переход до остановки едущими пассажирами, на пеший переход до места назначения после выхода из автобуса прибывшими пассажирами, из времени, теряемого в ожидании автобуса и за счет самой остановки автобуса едущими пассажирами, и времени на движение по трассе. Эти пять слагаемых соответственно имеют вид

$$\frac{jT}{v_0} \int_{-\Delta}^{\delta} |x| dx, \frac{jT}{v_0} \int_{-\delta}^{\Delta} |x| dx, jh \int_0^T (T-t) dt, N\tau, \frac{Nh}{v_0}. \quad (7)$$

Сложив эти составляющие и умножив их на число остановок, обратно пропорциональное h , получим общее потерянное за один рейс время (функцию цели)

$$C = \frac{jhT}{2v_0} \left(1 + \frac{v_0^2}{v^2} \right) + \frac{N\tau}{h} + \frac{jT^2}{2} + \frac{N}{v}. \quad (8)$$

Приравняв нулю производную, получим формулу для наивыгоднейшего расстояния между двумя остановками

$$h = \sqrt{2Nv_0\tau / (jT(1 + v_0^2/v^2))}. \quad (9)$$

Наблюдения, проведенные на маршруте № 3 в Махачкале вне часов «пик», показали, что среднее число пассажиров в автобусе составляет 40 человек, среднее время, теряемое автобусом на остановке, $\tau = 45$ сек., количество пассажиров на 1 км пути за интервал движения $jT = 15$ человек, скорость автобуса на трассе 40 км/час, скорость пешехода примерно 5 км/час. Подставив эти данные в формулу (9), получим оценку оптимального расстояния в среднем 570 м. При длине маршрута в 8 км число всех остановок должно равняться 15, что совпадает с существующим их количеством.

Слагаемым v_0^2/v^2 в знаменателе (9) можно пренебречь, поскольку оно представляет собой величину порядка 0,01. Такое пренебрежение равносильно предположению, что скорость автобуса бесконечна. В дальнейшем

мы всюду примем это предположение, оно значительно упростит выкладки, не влияя существенно на результат.

Заметим также, что последние два слагаемых в формуле (8) — время ожидания пассажиров автобуса и время, потерянное на движение по трассе, — представляет собой постоянные, не зависящие от h . Выбор расположения остановок не влияет на эти слагаемые. В дальнейшем при подсчете потерянного времени мы их вовсе не будем учитывать.

3. ПОТЕРЯННОЕ ВРЕМЯ. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Размещение остановок автобуса по маршруту будем считать оптимальным, если суммарное время, потерянное всеми пассажирами в течение недели, минимально. Это время складывается из времени, потерянного на переходы до и от остановки, и времени, потерянного на остановках автобуса.

Время, потерянное на переходы в области влияния любой остановки x_i , можно выразить в виде интеграла по этой области

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_0} \int_{\omega_i} |x - x_i| s(x) dx &= \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i) S(x_{i+1/2}) - \\ &- \frac{1}{2} (x_i - x_{i-1}) S(x_{i-1/2}) + \int_{\omega_i} S(x) \operatorname{sign}(x_i - x) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Время, потерянное пассажирами на самой остановке x_i , примем равным произведению числа едущих от этой остановки пассажиров N_i на время τ , теряемое автобусом за счет остановки

$$N_i \tau = \tau R(x_{i+1/2}). \quad (11)$$

В эту формулу не входит время, теряемое выходящими из автобуса пассажирами. Мы полагаем, что на остановке выходящие пассажиры не теряют времени. Его теряют входящие и транзитные пассажиры.

Складывая (10) и (11) и суммируя по всем i от 0 до n , получим общее потерянное время (функцию цели)

$$Ц = \tau \sum_0^n R(x_{i+1/2}) + \frac{1}{v_0} \sum_0^n \int_{\omega_i} |x - x_i| s(x) dx. \quad (12)$$

Начальная и конечная остановки могут быть выбраны заранее. В этом случае имеем задачу с фиксированными границами. Если же начальная и конечная остановки x_0 и x_n также являются искомыми, то задача будет с подвижными границами. Функции $s(x)$ и $r(x)$ будем считать непрерывными всюду на $[a, e]$, тогда из (12) следует дифференцируемость функции цели всюду. Это предположение не представляет собой сильного ограничения, так как при практическом измерении пассажирских потоков они могут быть аппроксимированы непрерывными функциями.

Для оптимального размещения остановок, при котором функция цели достигает минимального значения, необходимо обращение в нуль производной функции цели по каждой искомой переменной.

От промежуточной остановки x_i в функции цели зависят пять членов. Вычислив производную, имеем

$$\frac{\partial Ц}{\partial x_i} = \frac{\tau}{2} [r(x_{i-1/2}) + r(x_{i+1/2})] + \frac{1}{v_0} [2S(x_i) - S(x_{i+1/2}) - S(x_{i-1/2})]. \quad (13)$$

От положения начальной и конечной остановок зависят по три члена. Вычисления дают для производных

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_0} = \frac{\tau}{2} r(x_{1/2}) + \frac{1}{v_0} [2S(x_0) - S(x_{1/2})], \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_n} = \frac{\tau}{2} r(x_{n-1/2}) + \frac{1}{v_0} [2S(x_n) - S(b) - S(x_{n-1/2})]. \quad (15)$$

Сравнивая последние две формулы с (13), видим, что они получаются из (13) при $i = 0$ и $i = n$, если условно принять

$$a = x_{-1/2}, \quad b = x_{n+1/2}, \quad r(a) = r(b) = 0. \quad (16)$$

Приравняв нулю производные, получим необходимые условия оптимальности

$$S(x_{i+1/2}) - 2S(x_i) - S(x_{i-1/2}) = \frac{v_0 \tau}{2} [r(x_{i+1/2}) + r(x_{i-1/2})], \quad (17)$$

которые в задаче с фиксированными границами должны выполняться для всех промежуточных остановок x_i ; $i = 1, 2, \dots, n-1$; в случае подвижных границ эти же условия (17) должны выполняться для всех без исключения $i = 0, 1, \dots, n$, если принять во внимание (16).

Условия (17) позволяют сделать уже практически важный вывод: если на достаточно большой части маршрута, которая содержит несколько остановок, пассажирские потоки остаются постоянными, т. е. $s(x) = s_0$, $r(x) = r_0$, то расстояния между остановками последовательно по ходу движения должны возрастать (убывать при $r_0 < 0$) на одну и ту же величину $2v_0 \tau r_0 / s_0 \leq 2v_0 \tau$.

Заметим, что необходимые условия оптимальности (17) представляют собой нелинейную в общем случае систему, когда число неизвестных равно числу уравнений. Трудность решения системы состоит в том, что заранее порядок ее неизвестен, так как число остановок n тоже является искомым. Нельзя думать, что система (17) является определенной. Приводимый ниже пример показывает, что эта система может иметь несколько решений.

Пусть $a = 0$, $b = l$, $n = 2$, $x_0 = 0$, $x_n = l$; $s(x) = |1 - 2x/l|$, $r(x) = 1 - 2x/l$, остановка x_1 является искомой. Подставив в (17) и обозначив $\varepsilon = v_0 \tau / l$, $\xi = x_1 / l$, получим $(1 - 2\xi)(1 - 4\xi) = 2\varepsilon(1 - 2\xi)$ в предположение, что $\xi \leq 0,5$, $(1 - 2\xi)(-3 + 4\xi) = 2\varepsilon(1 - 2\xi)$ и $\xi \geq 0,5$. Решив эти уравнения, будем иметь три возможных значения для остановки x_1 : $(l/4) - (v_0 \tau / 2)$, $l/2$, $(3l/4) + (v_0 \tau / 2)$. Подсчет функции цели показывает, что крайние два значения дают минимум, а среднее значение $x_1 = l/2$ приводит к локальному максимуму.

Если даже система (17) при некоторых ограничениях на $s(x)$ и $r(x)$ и окажется определенной, то это еще не означает единственности решения исходной задачи. Может случиться, что целевая функция будет достигать минимума не при одном n . Выяснение необходимых и достаточных условий, при которых функция цели имеет заведомо единственную точку минимума, представляет довольно трудную задачу. Мы ее затрагивать не будем. Укажем лишь, что при выполнении весьма жесткого условия

$$2s_{\min} > s_{\max} - \frac{v_0 \tau}{2} r_{\min}, \quad (18)$$

второй дифференциал функции цели имеет всюду положительный знак.

4. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ ЗАДАЧИ

А. Рассмотрим наиболее простую задачу для города $0 \leq x \leq l$ с фиксированными границами маршрута $x_0 = 0, x_n = l$.

Пусть на начальной остановке x_0 в автобус садятся N пассажиров, в промежутке $0 < c \leq x \leq d < l$ входящий и выходящий потоки постоянны и равны между собой, так что пассажирообмен равен нулю, а пассажиропоток постоянен и равен $2p_0$. В промежутках $(0, c)$ и (d, l) пассажирские потоки отсутствуют, на конечной остановке x_n выходят N пассажиров

$$s(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < c, \quad d < x < l, \quad r(x) = 0, \\ 2p_0, & c \leq x \leq d, \quad R(x) = N. \end{cases} \quad (19)$$

Будем для простоты предполагать, что области влияния конечных остановок x_0 и x_n не выходят за промежутки $(0, c)$ и (d, l) . Тогда необходимые условия оптимальности (17) примут вид

$$x_{i+1/2} - 2x_i + x_{i-1/2} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (20)$$

где надо условно принять $x_{1/2} = c, x_{n-1/2} = d$.

Система (20) имеет одно решение

$$x_i = c + \left(i - \frac{1}{2}\right)h, \quad h = \frac{d-c}{n-1}, \quad (21)$$

а вычисления дают для функции цели выражение

$$\Pi = N\tau n + \frac{p_0(d-c)^2}{2v_0(n-1)}. \quad (22)$$

Эта функция дискретного переменного имеет наименьшее значение для целого n , удовлетворяющего неравенству

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{p_0(d-c)^2}{2Nv_0\tau}} \leq n \leq \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{p_0(d-c)^2}{2Nv_0\tau}}. \quad (23)$$

Однако вычисление n лучше упростить, имея в виду, что в практических условиях $d-c \gg 2v_0\tau$, $p_0(d-c) \sim N$. Тогда под знаком радикала первым слагаемым можно пренебречь и получить приближенные формулы

$$n \approx 1 + \sqrt{\frac{p_0(d-c)^2}{2Nv_0\tau}}, \quad h \approx \sqrt{\frac{2Nv_0\tau}{p_0}}. \quad (24)$$

Заметим, что первая из этих формул получится, если в функции цели считать переменное n непрерывным и отыскать стационарное его значение, приравняв производную $\partial\Pi/\partial n$ нулю. Вторая из этих формул совпадает с оценкой (9), если принять $v = \infty$.

Б. Пусть в городе $0 \leq x \leq l$ конечные остановки маршрута фиксированы, $x_0 = 0, x_n = l$, а пассажирские потоки линейно зависят от координаты x

$$p(x) = \frac{p_0(l-x)}{l}, \quad q(x) = \frac{p_0x}{l}, \quad s(x) = p_0, \quad r(x) = \frac{p_0(l-2x)}{l}. \quad (25)$$

Подставив в условие оптимальности (17), после некоторых упрощений получим систему

$$x_{i+1} - 2\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}x_i + x_{i-1} = \frac{2\varepsilon l}{1+\varepsilon}, \quad x_0 = 0, \quad x_n = l, \quad \varepsilon = \frac{v_0\tau}{l}, \quad (26)$$

решение которой можно представить в виде

$$x_i = \frac{\sin^{1/2} i \alpha \cos^{1/2} (n-i) \alpha}{\sin^{1/2} n \alpha} l, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}. \quad (27)$$

При вычислении функции цели удается упростить суммы тригонометрических рядов. Опуская выкладки, приводим лишь результат

$$C = \frac{p_0 l \tau}{2} \left\{ n \left(1 - \frac{\cos \alpha}{4 \sin^2 \frac{n \alpha}{2}} \right) + \frac{2 + \cos \alpha}{2 \sin \alpha} \operatorname{ctg} \frac{n \alpha}{2} \right\}. \quad (28)$$

Приравняв производную по n нулю, приходим к трансцендентному уравнению $2 \sin n \alpha = n \alpha$, имеющему единственное положительное решение

$$n = \frac{1,896}{\arccos [(1 - \varepsilon)/(1 + \varepsilon)]} \approx 0,95 \sqrt{l/v_0 \tau}. \quad (29)$$

Практически при нахождении числа остановок удобна последняя замечена точной формулы приближенной, так как n — целое число, а $\varepsilon = v_0 \tau / l \ll 1$. Подставив (29) в (27), будем иметь

$$x_i = 0,5l(1 - \cos i \alpha + 0,7185 \sin i \alpha). \quad (30)$$

Например, если $l = 10$ км, $v_0 = 5$ км/час, $\tau = 45$ сек., то $n = 12$, $\alpha = 0,1581$. Координаты остановок автобуса будут: 630, 1365, 2195, 3090, 4035, 5000, 5965, 6910, 7805, 8635, 9730, 10 000 м.

В. Приведем пример задачи с подвижными границами маршрута.

Пусть в городе $-l \leq x \leq l$ пассажирские потоки заданы формулами $s(x) = p_0$, $S(x) = p_0(x + l)$, $r(x) = -p_0 \operatorname{sign} x$, $R(x) = p_0(l - |x|)$. (31)

Согласно этим формулам, входящий поток равен p_0 на левой половине маршрута и нулю на правой половине. Выходящий поток, наоборот, равен нулю на левой половине пути и p_0 на правой. В точке $x = 0$ функция $r(x)$ имеет разрыв. В силу симметрии исходных данных, очевидно, оптимальное расположение остановок симметрично относительно середины маршрута. Если $n = 2k$, то средняя остановка расположится в начале координат, если же $n = 2k - 1$, то будут две средние остановки x_{k-1} и x_k .

Подставив (31) в условия оптимальности (17), получим для левой части маршрута систему

$$x_{1/2} - 2x_0 - l = \frac{1}{2} v_0 \tau,$$

$$x_{i+1/2} - 2x_i + x_{i-1/2} = v_0 \tau, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \quad (32)$$

решение которой можно представить в виде

$$x_i = -l + \left(i + \frac{1}{2}\right) h + i^2 v_0 \tau, \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (33)$$

Величина h , а вместе с ней и x_0 , будет различной для четного и нечетного n . Для четного n эта величина найдется из условия $x_k = 0$, а для нечетного из условия $x_{k-1} + x_k = 0$, если воспользоваться (33)

$$l = \begin{cases} (k + 0,5)h + k^2 v_0 \tau, & n = 2k, \\ kh + (k^2 - k + 0,5) v_0 \tau, & n = 2k - 1. \end{cases} \quad (34)$$

Вычисление функции цели также проводится в два этапа, для четного и нечетного n . Опуская выкладки, связанные с суммированием степеней натурального ряда чисел, приводим конечный результат

$$\frac{4v_0 l}{\rho_0 l^2} = \begin{cases} (4 - 2\varepsilon + 0,25\varepsilon^2)(n+1)^{-1} - \varepsilon^2 + \left(2\varepsilon + \frac{5}{6}\varepsilon^2\right)(n+1) - \frac{1}{12}\varepsilon^2(n+1)^3, & n = 2k, \\ (4 - \varepsilon^2)(n+1)^{-1} - \varepsilon^2 + \left(2\varepsilon + \frac{4}{3}\varepsilon^2\right)(n+1)^3 - \frac{1}{12}\varepsilon^2(n+1)^3, & n = 2k-1. \end{cases} \quad (35)$$

Как и в предыдущих примерах, $\varepsilon = v_0 \tau / l$ представляет собой малую величину. Из сравнения формул (35) видно, что во втором случае функция цели имеет большие значения при одном и том же n , причем это превышение незначительно и имеет относительный порядок ε . Поэтому в сомнительных случаях лучше отдать предпочтение четному n (общее число остановок нечетно).

Приравняв нулю производные по n в формулах (35), получим биквадратные уравнения, имеющие по два положительных корня. Один из этих корней, больший, должен быть отброшен как противоречащий (34) при положительном h

$$n = \begin{cases} -1 + 2 \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{5}{12} - \sqrt{\frac{4}{3\varepsilon} + \frac{1}{9}}}, & n = 2k, \\ -1 + 2 \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{4}{3\varepsilon} + \frac{25}{36}}}, & n = 2k-1. \end{cases} \quad (36)$$

Практически удобнее заменить эту формулу приближенной, принимая во внимание неравенство $\varepsilon \ll 1$. Вторыми слагаемыми под знаками радикалов можно пренебречь и обе формулы примут вид

$$n = -1 + 2 \sqrt{\frac{l}{v_0 \tau} - \sqrt{\frac{4l}{3v_0 \tau}}}. \quad (37)$$

Например, если $l = 5$ км, $v_0 = 5$ км/час, $\tau = 45$ сек., то $n = 16$, что на четыре остановки больше, чем в предыдущем случае. Из формулы (34) найдем $h = 118$ м, $2v_0 \tau = 125$ м. Расстояния между остановками, начиная с середины, составят 1055, 930, 805, 680, 555, 430, 305, 180 м.

5. НЕСКОЛЬКО ТЕОРЕМ И ЗАМЕЧАНИЙ

Теорема 1. Если в городе $-l \leq x \leq l$ пассажиропоток $s(x)$ — четная, пассажирообмен $r(x)$ — нечетная функции, а функция цели имеет единственный минимум, то оптимальная расстановка остановок симметрична относительно середины маршрута.

В самом деле, последнее слагаемое первой суммы в функции цели (12) равно нулю в силу $N_n = 0$ (6). Поэтому суммирование достаточно про-

водить до $i = n - 1$. Увеличив переменный индекс суммирования на единицу и учитывая принятое нами обозначение $x_{-1/2} = a$, будем иметь

$$\sum_0^n R(x_{i+1/2}) = \sum_0^{n-1} R(x_{i+1/2}) = \sum_1^n R(x_{i-1/2}) = \sum_0^n R(x_{i-1/2}). \quad (38)$$

Сделаем в функции цели замену $z = -x$ и учтем, что $r(-z) = -r(z)$, $s(-z) = s(z)$. Меняя пределы интегрирования в интегралах второй суммы, имеем

$$\Pi = \tau \sum_0^n R(-x_{i-1/2}) + \frac{1}{v_0} \sum_0^n \int_{-x_{i-1/2}}^{-x_{i-1/2}} |z + x_i| r(z) dz. \quad (39)$$

Сравнение с (12) показывает, что $\Pi(x_0, x_1, \dots, x_n) = \Pi(-x_n, -x_{n-1}, \dots, -x_1, -x_0)$, т. е. оптимальную расстановку дают также и значения $-x_n < -x_{n-1} < \dots < -x_1 < -x_0$. Из единственности минимума функции цели следует, что $-x_i = x_{n-i}$, т. е. остановки располагаются симметрично относительно середины маршрута.

Теорема доказана для задачи с подвижными границами. Она же будет верна и для фиксированных x_0 и x_n , если $x_0 = -x_n$.

Теорема 2. *Оптимальная расстановка остановок по маршруту в прямом и обратном направлении совпадают.*

Входящий поток в прямом направлении $p(x)$ должен равняться в каждой точке выходящему потоку обратного направления, так как пассажир возвращается к месту выезда противоположным маршрутом

$$p(x) = q_1(x), \quad q(x) = p_1(x), \quad s(x) = s_1(x), \quad r(x) = -r_1(x). \quad (40)$$

Перемена знака $r(x)$ в условиях (17) приводит к изменению порядка интегрирования в левой части, что равносильно изменению

$$S(x) \text{ на } S_1(x) = \int_a^x s(x) dx.$$

Для функций цели справедливо равенство $\Pi_1(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) = \Pi(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Это означает, что начальная остановка прямого направления совпадает с конечной остановкой обратного направления, первая совпадает с предпоследней и т. д.

Покажем, что результаты, полученные выше, сохраняют силу и для плоского города специальной геометрии.

Пусть пассажирские потоки распределены в двух измерениях, но в городе имеется лишь одна прямолинейная трасса движения, которую примем за ось ox . Геометрию города будем считать прямоугольной, т. е. расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определим равенством

$$\rho(M_1, M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|. \quad (41)$$

Пассажирские потоки определим на единицу площади. Обозначим их теми же буквами $p(x, y)$, $q(x, y)$, $r(x, y)$, $s(x, y)$. Для области влияния остановки в силу (41) сохраняются все соотношения раздела 1. Рассуждения, подобные приведенным в разделе 3, дают для потеряннного пассажирами времени (функции цели)

$$\Pi = \tau \sum_0^n \int_a^{x_{i+1/2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} r(x, y) dy + \frac{1}{v_0} \sum_0^n \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} (|x - x_i| + |y|) s(x, y) dy. \quad (42)$$

Естественно обозначить

$$r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r(x, y) dy, \quad s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y) dy \quad (43)$$

и провести интегрирование. Тогда для функции цели будем иметь выражение

$$U = \tau \sum_0^n R(x_{i+1/2}) + \frac{1}{v_0} \sum_0^n \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} |x - x_i| s(x) dx + \frac{1}{v_0} \int_a^b dx \int_{-\infty}^{\infty} |y| s(x, y) dy, \quad (44)$$

отличающееся от (12) лишь постоянным слагаемым, что не влияет на оптимальное размещение остановок и их количество.

ЛИТЕРАТУРА

1. Применение математических методов и электронно-вычислительной техники в решении задач городского транспорта и расселения. Ереван (Объединенный ВЦ АН АрмССР, ЦНИИ по градостроительству), 1966.
2. М. Р. К о г а л о в с к и й. Моделирование процесса составления маршрутных расписаний городского пассажирского транспорта на ЭВМ. Экономика и матем. методы, 1965, т. 1, вып. 5.
3. С. Л. А м б а р я н. Выбор оптимальных трасс движения пассажиров при заданной транспортной сети города. Экономика и матем. методы, 1967, т. 3, вып. 6.

Поступила в редакцию
10 X 1967