ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1969
том V, вып. 5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОГНОЗА ПАССАЖИРОПОТОКОВ В ГОРОДСКОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

Б. Г. ПИТТЕЛЬ, В. П. ФЕДОРОВ

(Ленинград)

В настоящей работе излагаются некоторые возможные подходы к математическому моделированию распределения пассажиропотоков в городской транспортной сети. Этой же теме посвящена недавно вышедшая работа [1].

Общей чертой приводимых ниже моделей является следующее. Транспортной сети города сопоставляется связный ориентированный граф. Его вершины — это узловые точки реальной сети, а ребра отвечают непосредственным транспортным связям между ними (часть ребер может быть введена в рассмотрение для учета пеших переходов). Каждому ребру (i, j) графа, соединяющему i-ю и j-ю вершины, сопоставлено время τ_{ij} передвижения по нему, определяемое его длиной и видом транспорта, который это ребро обслуживает.

Будем считать, что задана матрица $M = \|\mu_i{}^k\|$, где $\mu_i{}^k \geqslant 0$ — интенсивность потока пассажиров, поступающих *извне* в i-ю вершину и стремящихся попасть в k-ю. Обозначая через $x_{ij}{}^k$ $(i \neq k)$ интенсивность потока k-го типа (т. е. потока пассажиров, стремящихся к k-ю вершину) по ребру (i, j), приходим к следующим обычным уравнениям неразрывности

$$\sum_{\substack{j \in \Gamma_i^{-1} \\ j \neq k}} x_{ji}{}^k + \mu_i{}^k = \sum_{j \in \Gamma_i} x_{ij}{}^k, \quad i \neq k, \tag{1}$$

где Γ_i, $\Gamma_i{}^{-1}$ — множества вершин графа, последующих и предшествующих по отношению к вершине i. (Всюду ниже, называя набор $\{x_{ij}{}^k\}$ потоком, будем иметь в виду неотрицательные числа, удовлетворяющие ограничениям (1).)

В основе предлагаемых ниже моделей прогноза лежит предположение о том, что: 1) главным фактором, влияющим на выбор маршрута, являются затраты времени на поездку; 2) маршрут определяется благодаря последовательному выбору направлений в каждой из промежуточных вершин, причем этот выбор в фиксированной вершине производится пассажиром без какой-либо договоренности с остальными пассажирами и не зависит от ранее пройденного пути. Как видно из самой записи уравнений, стремясь к простоте модели, мы не различаем в каждой вершине транзитных пассажиров и пассажиров, только что поступивших в сеть извне, т. е. считаем, что выбор дальнейшего направления осуществляется всеми ими в равных условиях.

Недостатком такого подхода является потеря информации относительно маршрутности реальной транспортной сети: мы не учитываем, что пассажир, прибывающий в некоторый узел реальной сети и продолжающий движение по тому же маршруту, тратит время только на остановку, но не на ожидание транспорта. Этот недостаток можно отчасти устранить, усложнив структуру графа введением новых вершин и дополнительных ребер, отражающих затраты времени на ожидание. Однако в новой схеме в потоке пассажиров, прибывающих в фиксированную вершину по ребру, обслуживаемому каким-либо маршрутом, мы не сможем различить пассажиров, воспользовавшихся разным количеством ребер этого маршрута. Существенно и другое: на выбор маршрута в фиксированной вершине влияют не только предстоящие затраты времени, но также и время, потраченное на попадание в эту вершину. Позднее мы укажем, как можно частично учесть это обстоятельство.

Начнем с рассмотрения простейшей модели, когда каждый пассажир k-го типа выбирает кратчайший маршрут в k-ю вершину. Введем обозначение: T_i^k — время проезда по кратчайшему маршруту из i-й вершины в k-ю $(i \neq k)$. Очевидно

$$T_i^k = \min_{j \in \Gamma_i} [\tau_{ij} + T_j^k], \quad T_k^k = 0. \tag{2}$$

Хорошо известно, что соответствующий поток $\{\bar{x}_{ij}^k\}$ является решением следующей задачи линейного программирования: при ограничении (1) и условиях $x_{ij}^k \geqslant 0$ требуется найти $\min\limits_x \sum\limits_{(i,\,j)} x_{ij}\tau_{ij}$, где $x_{ij} = \sum\limits_{k \neq i} x_{ij}^k$.

Величина функционала $\sum\limits_{(i,\,j)} x_{ij}\tau_{ij}$ есть по сути дела общие затраты времени за единицу времени работы сети. Именно расчету кратчайших маршрутов и посвящена работа [1].

Естественным обобщением этой модели является модель, в которой время проезда по ребру (i, j) вследствие ограниченной емкости транспортных единиц зависит от потока $X = \{x_{rs}^k\}$; в простейшем случае это время зависит лишь от интенсивности x_{ij}, т. е. $\tau_{ij} = \tau_{ij}(x_{ij})$; в более общем случае, возникающем при учете маршрутности, затраты времени на искусственно вводимых ребрах (см. выше) могут зависеть и от нагрузки на соседние ребра, т. е., вообще говоря,

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}(X). \tag{3}$$

В отличие от предыдущей модели здесь на поведение каждого пассажира влияет поведение остальной массы пассажиров, ибо оно и определяет затраты времени на проезд по ребрам. Если, как и ранее, предположить, что при заданном потоке X каждый пассажир, ориентируясь на временные характеристики $\tau_{ij}(X)$, выбирает кратчайший маршрут, то придем к естественному обобщению системы (2)

$$T_i^k(X) = \min_{j \in \Gamma_i} [\tau_{ij}(X) + T_j^k(X)], \quad T_k^k(X) \equiv 0. \tag{4}$$

(Еще раз подчеркнем, что при фиксированном потоке X поведение одного отдельно взятого пассажира не может повлиять на величины τ_{ij}.)

Сказанное приводит к естественному определению равновесного (в игровом смысле), стационарного потока $\bar{X}$.

Определение 1. Поток $\{\bar{x}_{ij}^k\}$ называется равновесным при выполнении следующего условия: если при некоторых индексах i, j, k $\bar{x}_{ij}^k > 0$, то $T_i^k(\bar{X}) = \tau_{ij}(\bar{X}) + T_j^k(\bar{X})$ («условие дополняющей нежесткости»).

Условие, фигурирующее в этом определении, означает, по существу, что если некоторое ребро (i, j) нагружено потоком k-го типа, то для каждого отдельного пассажира того же типа это ребро является оптимальным направлением из вершины i.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функции* $\tau_{ij}(X) > 0$ *и непрерывны по* X. *Тогда существует равновесный в смысле определения 1 поток* $\{\bar{x}_{ij}{}^k\}$. (Доказательство этой и следующих теорем приводятся в Приложении.)

Нетрудно убедиться, что в простейшем случае, когда $\tau_{ij} = \tau_{ij}(x_{ij})$, равновесный поток минимизирует функционал

$$F = \sum_{(i,\,j)} \int\limits_0^{x_{ij}} \tau_{ij}(s)\,ds, \qquad x_{ij} = \sum_{k\neq i} x_{ij}{}^k.$$

В общем же случае можно утверждать, лишь, что поток $\{\bar{x}_{ij}{}^k\}$ обладает следующим экстремальным свойством:

$$\min_{\{x_{ij}{}^k\}} \sum_{(i,\,j)} \tau_{ij}(\bar{X})\,x_{ij} = \sum_{(i,\,j)} \tau_{ij}(\bar{X})\,\bar{x}_{ij}$$

(см. Приложение). Отметим трудность, связанную с введенным понятием равновесного потока. Пусть для некоторых индексов i, k, j_1, j_2 имеет место условие $\bar{x}_{ij_1}^k > 0$, $\bar{x}_{ij_2}^k > 0$. Тогда, с одной стороны, для пассажиров k-го типа ребра (i, j_1), (i, j_2) отвечают оптимальным, следовательно, равноценным направлениям, а с другой стороны, $\bar{x}^k_{ij_1} \neq \bar{x}_i{}^k$ Это противоречие, лежащее вне рассматриваемой математической модели, не может быть устранено, как нам кажется, без перехода к вероятностным моделям.

Теперь изложим простейшую модель подобного рода, в которой естественно возникает рандомизированное поведение пассажиров. Модель примыкает к сетевым моделям массового обслуживания [2].

Именно предположим, что интервалы между последовательными прибытиями транспортных единиц, обслуживающих ребро (i, j), не детерминированы, а случайны, точнее независимы между собою, и распределены экспоненциально с параметром λ_{ij} (допущение, типичное в теории массового обслуживания). Ограничиваясь для простоты записи рассмотрением пассажиров некоторого определенного типа i_0, зададим их поведение набором p чисел p_{ij}, $i \neq i_0$, $j \in \Gamma_i$; p_{ij} — вероятность того, что пассажир, попав в вершину i, выберет для продолжения поездки ребро (i, j). Очевидно

$$p \in P = \Big\{p/p_{ij} \geqslant 0,\ \sum_{j\in\Gamma_i} p_{ij} = 1,\ i \neq i_0\Big\}. \tag{5}$$

Легко понять, что смысл имеют лишь распределения p, обладающие следующим свойством: для любой вершины $i \neq i_0$ найдется последовательность вершин $i_1, \ldots, i_k$ такая, что $i_1 \in \Gamma_i$, $i_2 \in \Gamma_{i_1}, \ldots, i_0 \in \Gamma_{i_k}$ и

$$p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_{k-1} i_k} p_{i_k i_0} > 0 \tag{6}$$

(эквивалентное условие — не существует подмножества I вершин графа, $i_0 \notin I$, такого, что $p_{ij} = 0$ при $i \in I$, $j \notin I$).

Обозначим через $F_i(t)$ функцию распределения времени поездки (с учетом затрат на ожидание транспорта) на работу i_0 из вершины i. Используя свойства пуассоновских потоков, можно показать (см. Приложение), что $F_i(t)$ являются решением системы

$$F_i(t) = \sum_{j\in\Gamma_i} p_{ij} \int\limits_0^t F_{ij}(t-s)\,dF_j(s) \qquad \text{при} \qquad i \neq i_0. \tag{7}$$

Здесь

$$F_{ij}(t) = \begin{cases} 0, \; t \leqslant \tau_{ij} & F_{i_0}(t) = \begin{cases} 0, \; t < 0, \\ 1, \; t \geqslant 0, \end{cases} \\ \\ 1 - e^{-\lambda_{ij}(t-\tau_{ij})} & \text{при } t \geqslant \tau_{ij} - (\tau_{ij} \text{ время проезда по } (i, j)). \end{cases}$$

(Очевидно, что тем самым $F_i(t)$ зависят от p.)

Из какого же условия можно определить распределение p, которое естественно было бы считать прогнозом поведения пассажиров?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим сначала более простую ситуацию: пусть два пункта A и B соединены k маршрутами, а времена проезда $T_1, \ldots, T_k$ по ним случайные, вообще говоря, зависимые величины с совместной функцией распределения $F(t_1, \ldots, t_k)$. Предположим, что пассажир, который начинает совершать ежедневные поездки, не знает ничего о маршрутах, а имеет лишь некоторые предварительные оценки $T_1(0), \ldots, T_k(0)$ затрат времени на этих маршрутах. Естественно считать, что он выберет при первой поездке маршрут $i(1)$ такой, что $T_{i(1)}(0) = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant k} T_i(0)$ (если таких индексов будет несколько, пассажир выберет равновероятно один из них). Пусть, совершив эту поездку, пассажир заменит оценку $T_{i(1)}(0)$ случайной реализацией времени проезда $T_{i(1)}$, а все прочие оценки оставит без изменения. В следующую свою поездку пассажир выберет маршрут, пользуясь теперь уже измененной шкалой оценок, и т. д. Спрашивается, каково предельное при неограниченно возрастающем числе поездок значение p_i вероятности того, что пассажир при очередной поездке воспользуется i-м маршрутом? Эту задачу легко сформулировать чисто математически.

Ответ такой: обозначим через $F_i(t)$ функцию распределения величины T_i; ясно, что $F_i(t) = F(+\infty, \ldots, \overset{\leftarrow i \rightarrow}{t}, \ldots, +\infty)$. Введем функцию $\bar{F}(t_1, \ldots, t_k) = \prod\limits_{i=1}^{k} F_i(t_i)$ (ее естественно интерпретировать как совместную функцию распределения независимых случайных величин $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_k$ с функциями распределения $F_1(t), \ldots, F_k(t)$). В простых неограничительных предположениях относительно $F(t_1, \ldots, t_k)$ имеет место следующее:

$$p_i = \text{Вер}\,[\bar{t}_i = \min_{1\leqslant s\leqslant k} \bar{t}_s] = \int\limits_0^{+\infty} dF_i(t) \prod_{s\neq i} (1 - F_s(t-0)). \tag{8}$$

(Пассажир использует i-й маршрут с вероятностью, равной вероятности того, что этот маршрут кратчайший, но вынужденный при каждой поездке выбирать ровно один маршрут, он не может понять, что затраты времени на разных маршрутах не являются независимыми.)

Вернемся снова к нашей сетевой модели. Обозначим через $\bar{t}_{ij}$ случайное время поездки на работу i_0 из вершины i, если маршрут сначала идет детерминированно по ребру (i, j), а после попадания в вершину j каждое его следующее ребро выбирается случайно в соответствии с распределением p. Функция распределения $G_{ij}(t)$ величины $\bar{t}_{ij}$ — это свертка распределений $F_{ij}(t)$ и $F_j(t)$, т. е.

$$G_{ij}(t) = \int\limits_0^t F_{ij}(t-s)\, dF_j(s).$$

При этом случайные величины $\bar{t}_{ij}$, $j \in \Gamma_i$ являются, вообще говоря, зависимыми. Учитывая изложенную выше простую схему адаптации пассажира, определим функции $f_{ij}(p)$, (функции G непрерывны)

$$f_{ij}(p) = \int_0^\infty dG_{ij}(t) \prod_{s \in \Gamma_i \setminus j} (1 - G_{is}(t)) \tag{9}$$

($f_{ij}(p) = \text{Вер}[\bar{t}_{ij} = \min_{s \in \Gamma_i} \bar{t}_{is}]$, где $\bar{t}_{ij}$ — случайные величины, независимые для разных индексов j, с функциями распределения $G_{ij}(t)$).

Определение 2. Допустимое распределение $p^0 = \{p_{ij}^0\}$ называется равновесным, если $p_{ij}^0 = f_{ij}(p^0)$ для всех индексов i, $j \in \Gamma_i$, $i \neq i_0$. (Несколько неточно: распределение равновесно, если для любой вершины вероятность использования любого возможного направления (i, j) равна вероятности того, что это направление является наилучшим.)

Теорема 2. *Равновесное распределение p^0 существует (при этом $p_{ij}^0 > 0$ для всех i, j).*

Предложенная модель допускает обобщение на случай ограниченной емкости транспортных единиц. В этом случае введенные выше числа λ_{ij} естественно рассматривать как интенсивности пуассоновских потоков посадочных мест. Если λ и x — интенсивности потоков посадочных мест и пассажиров, то при $\lambda > x$ в установившемся режиме (см. Приложение) функция распределения времени ожидания есть $1 - e^{-(\lambda - x)t}$; отъезжающие пассажиры образуют пуассоновский поток с интенсивностью x, т. е. все происходит так, как будто имеет место рассмотренный выше случай неограниченной емкости транспортных единиц, но поступающих теперь уже с интенсивностью $\lambda - x$. Это позволяет сформулировать модель следующим образом.

Пусть в вершины графа поступают извне пуассоновские потоки пассажиров (поток пассажиров k-го типа в вершину i с интенсивностью μ_i^k). Предположим для простоты формулировки, что $\mu_i^k > 0$ при всех i и k, $i \neq k$. В установившемся режиме интенсивности x_{ij}^k (x_{ij}^k — параметр пуассоновского потока пассажиров k-го типа, использующих ребро (i, j)) будут удовлетворять системе уравнений

$$\sum_{\substack{j \in \Gamma_i^{-1} \\ j \neq k}} x_{ji}^k + \mu_i^k = \sum_{j \in \Gamma_i} x_{ij}^k, \quad 0 \leqslant x_{ij} < \lambda_{ij} \text{ при } i \neq k. \tag{10}$$

Определим числа $p_{ij}^k = p_{ij}^k(X) = x_{ij}^k \Big/ \sum_{s \in \Gamma_i} x_{is}^k$, $j \in \Gamma_i$, $i \neq k$. Тогда функции распределения $F_i^k(t)$ (k — тип потока) будут решением системы, аналогичной системе (7), с заменой p_{ij} на $p_{ij}^k(X)$, где $F_{ij}(t) = 0$ при $t \leqslant \tau_{ij}$ и $F_{ij}(t) = 1 - e^{-(\lambda_{ij} - x_{ij})(t - \tau_{ij})}$ при $t \geqslant \tau_{ij}$, $x_{ij} = \sum_{k \neq i} x_{ij}^k$.

Легко сформулировать и соответствующее определение равновесного пассажиропотока. Таким образом, как и в определении 1, мы учитываем, что при выборе частоты использования того или иного направления, каждый пассажир ориентируется на временные (в данном случае вероятностные) характеристики ребер, определяемые поведением всей остальной массы пассажиров. Используя доказательство теоремы 2, нетрудно сформулировать условие на исходные данные, достаточное для существования этого потока. Но оно, по-видимому, слишком ограничительно. Нам кажется, что для существования равновесного потока достаточно только одного: чтобы множество допустимых потоков, т. е. потоков, удовлетворяющих ограничениям (10), было непусто. К сожалению, мы не располагаем доказательством этого утверждения.

В описанных моделях общим является предположение о том, что единственным фактором, определяющим поведение пассажиров, являются затраты времени. Это предположение, по-видимому, наиболее естественно тогда, когда речь идет о трудовых поездках. Но и в этом случае помимо затрат времени на выбор маршрута влияют такие факторы, как удобства проезда, число пересадок и т. д. Частично эти факторы могут быть учтены в наших моделях: время ожидания может зависеть от нагрузки, пересадкам могут быть сопоставлены дополнительные ребра. Но все-таки стремиться свести все многообразие действующих факторов к одному — общим затратам времени — было бы, как нам кажется, с одной стороны, неестественным, а с другой — потребовало бы слишком много исходной информации, не вознаградив нас за это возросшей точностью.

В предлагаемой ниже модели мы используем идею Г. В. Шелейховского, примененную им в задаче определения естественного расселения в городе (см., например, [3, 4]) *. Именно, предположим, что основным фактором, влияющим на выбор маршрута, являются затраты времени, а все прочие факторы составляют, так сказать, «шумовой фон». Точнее, будем считать, что в среднем (в широком смысле слова) при возможности выбрать маршрут с любой длительностью поездки распределение пассажиров по дальности маршрута t описывается некоторой заданной функцией $\varphi(t) > 0$, $\int\limits_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 1$. Конечно, для определения такой функции, необходимой для прогноза пассажиропотока в проектируемой сети, требуются статистические обследования пассажирских потоков в существующей городской сети **. Что касается остальных исходных данных, то будем считать заданными временны́е длины ребер и нагрузки на сеть μ_i^k.

Пренебрегая зависимостью затрат времени от нагрузки, можно в этой модели рассматривать потоки разных типов изолированно ***.

Итак, рассмотрим поток пассажиров некоторого фиксированного типа (типа i_0). Как и в описанной выше вероятностной модели, поведение пассажиров будем задавать вероятностями p_{ij}; при этом в духе законов больших чисел будем отождествлять числа p_{ij} с пропорциями, в которых общий поток пассажиров, прибывающих в i-ю вершину, делится по направлениям (ребрам), выходящим из нее. Обозначим через T_i среднее время проезда из i-й вершины в конечную i_0-ю вершину. Числа T_i являются решением системы

$$T_i = \sum_{j \in \Gamma_i} p_{ij}(\tau_{ij} + T_j), \qquad T_{i_0} = 0, \qquad i \neq i_0 \tag{11}$$

и, следовательно, зависят от p. (Чтобы эта система имела решение, необходимо и достаточно выполнения условия (6). Естественно предположить, что пассажир, выбирающий в вершине i продолжение поездки, маршруту, состоящему из ребра (i, j), $j \in \Gamma_i$, и из ребер, выбираемых после попадания в вершину j в соответствии с заданным распределением p, припишет временну́ю оценку $\bar{t}_{ij}(p) = \tau_{ij} + T_j$. Используя введенную ранее плотность распределения по дальности $\varphi(t)$ и исходя из самого определения

* Модель, близкую по подходу к описываемой модели, параллельно с нами разрабатывала также И. П. Воронцова.

** Подобные обследования проводятся в Ленинграде объединением Ленэлектронмаш.

*** Это допущение представляется естественным, поскольку в данном случае речь идет о расчете пассажиропотока в *проектируемой* сети, который и определяет необходимый объем транспортных средств. Модель допускает учет этой зависимости.

чисел p_{ij}, мы должны иметь, с другой стороны, что

$$p_{ij}=\varphi(\bar{t}_{ij})\Big/\sum_{s\in\Gamma_i}\varphi(\bar{t}_{is}). \tag{12}$$

Приходим, таким образом, к следующему определению.

Определение 3. Распределение $p^0=\{p_{ij}{}^0\}$, $T_i{}^0$ ($T_i{}^0$ — решение системы (11) при $p_{ij}=p_{ij}{}^0$) называется равновесным, если оно удовлетворяет условию (12).

Теорема 3. *Пусть* $\varphi(t)$ *непрерывная, монотонно убывающая функция* t. *Тогда существует равновесное в смысле определения 3 распределение* p^0.

Несколько усложнив эту модель, можно частично учесть, что на выбор дальнейшего маршрута влияет уже затраченное время. Обозначим через Π_i интенсивность полного потока пассажиров, прибывающих в вершину i. Ясно, что числа Π_i являются решением системы, лишь обозначениями отличающейся от системы (1)

$$\Pi_i=\mu_i+\sum_{j\in\Gamma_i^{-1}\, j\neq i_0}\Pi_j\, p_{ji},\qquad i\neq i_0,\qquad \mu_i=\mu_i{}^{i_0}. \tag{13}$$

Пусть $I(p)$ — множество вершин графа, в которых $\Pi_i>0$. Рассмотрим величины T_i, $i\in I(p)$, являющиеся решением системы

$$\tilde{T}_i=\sum_{j\in\Gamma_i^{-1}\cap I(p)}\frac{\Pi_j p_{ji}}{\Pi_i}[\tilde{T}_j+\tau_{ji}],\qquad i\in I(p). \tag{14}$$

Легко понять, что $\tilde{T}_i$ — средние затраты времени, необходимые для попадания в промежуточную i-ю вершину. В таком случае направлению (i,j), $i\in I(p)$ можно сопоставить временну́ю оценку

$$\bar{t}_{ij}=\tilde{T}_i+\tau_{ij}+T_j. \tag{15}$$

Определение 3′. Распределение $p^0=\{p_{ij}{}^0\}$ называется равновесным, если при $i\in I(p^0)$

$$p_{ij}{}^0=\varphi(\bar{t}_{ij})\Big/\sum_{s\in\Gamma_i}\varphi(\bar{t}_{is}),\qquad \bar{t}_{ij}=\tilde{T}_i{}^0+\tau_{ij}+T_j{}^0,$$

где $\tilde{T}_i{}^0$, $T_j{}^0$ — решение уравнений (11), (13), (14) при $p=p^0$.

Теорема 3′. *При выполнении условий теоремы 3 существует равновесное в смысле определения 3′ распределение* p^0, $T_i{}^0$, $\tilde{T}_i{}^0$, $\Pi_i{}^0$.

При известном равновесном распределении интерес представляет также и то, какая нагрузка ложится на различные виды транспорта. Предложенный способ описания пассажиропотоков в сети позволяет решить следующую задачу: пусть выделено некоторое подмножество A ребер графа, тогда можно определить λ_A — интенсивность потока пассажиров, решивших впервые за поездку воспользоваться ребром из множества A. Действительно, пусть $\tilde{\Pi}_i$ — интенсивность потока пассажиров, прибывающих в i-ю вершину, ни разу не воспользовавшихся ребром из множества A до попадания в нее. Ясно, что

$$\tilde{\Pi}_i=\mu_i+\sum_{j\in\Gamma_i^{-1}\setminus i_0}\tilde{\Pi}_j p_{ji},\qquad (j,i)\notin A. \tag{16}$$

В таком случае

$$\lambda_A=\sum_{\substack{i\neq i_0,\ j\in\Gamma_i\\ (i,j)\in A}}\tilde{\Pi}_i p_{ij},\qquad (i,j)\in A. \tag{17}$$

Эта модель была использована нами для расчета двух вариантов проекта развития транспортной сети Ленинграда, разработанных в архитектурно-планировочной мастерской № 1 института Ленпроект (для тех же нужд два более ранних варианта сети были обсчитаны И. П. Воронцовой). Сеть представляла собой симметричный граф, содержащий свыше 1800 ориентированных ребер и около 400 вершин, для 60 из них была задана матрица 60×60 интенсивностей μ_i^k. Заданы также временные длины ребер τ_{ij}. Кроме того, все множество ребер было разбито на четыре подмножества по видам транспорта.

В качестве $\varphi(t)$ взято положительное нормальное распределение $\varphi(t) = Ae^{-\alpha t^2}$, где параметр α определен из условия, предложенного проектантами, требующего, чтобы при разности в длинах двух маршрутов, не меньшей 10 мин., более коротким маршрутом пользовалось бы не менее 90% пассажиров (максимальная дальность трудовых поездок по проекту около 60 мин.).

Вычисление равновесного потока велось по итеративной схеме, отдельно для каждого места работы. Пусть фиксировано место работы i_0. В качестве начального приближения выбирались потоки, соответствующие кратчайшим маршрутам, которые строились при помощи алгоритма Форда. Итеративный шаг состоит в следующем: пусть нам известно r-е приближение $p_{ij}{}^r$ и соответствующее ему решение системы (11), (13), (14) — $T_i{}^r$, $\Pi_i{}^r$ и $\tilde{T}_i{}^r$; новые значения p_{ij}^{r+1} вычисляются так:

$$p_{ij}^{r+1} = (1-\nu_r)\, p_{ij}{}^r + \nu_r \hat{p}_{ij}^{r+1},$$

где

$$\hat{p}_{ij}^{r+1} = \varphi(t_{ij}{}^r) \Big/ \sum_{s\in\Gamma_i} \varphi(t_{is}{}^r) \quad \text{и} \quad 0 < \nu_r \leqslant 1, \quad t_{ij}{}^r = \tilde{T}_i{}^r + \tau_{ij} + T_j{}^r;$$

по найденным p_{ij}^{r+1} находим опять решение системы (11), (13), (14) и т. д. Счет продолжается до тех пор, пока с требуемой степенью точности $\hat{p}_{ij}^{r+1}$ не совпадет с $p_{ij}{}^r$. Интересно отметить, что удовлетворительную скорость сходимости этого процесса обеспечивает последовательность монотонно возрастающих ν_r, например, $\nu_1 = 2^{-5}, \ldots, \nu_5 = 2^{-1}$, $\nu_6 = \nu_7 = \ldots$ $\ldots = 1$. Такая динамика ν_r дает возможность плавно перейти от потоков по кратчайшим маршрутам к равновесному потоку. Остановимся подробнее на решении системы (11), (13), (14) при заданных p_{ij}. Структура уравнений и их высокий порядок делают естественным применение релаксационной схемы. Хорошо известно, что эффективность этого метода существенно зависит от порядка нумерации переменных, в нашей терминологии от порядка нумерации вершин. Поскольку промежуточные значения $p_{ij}{}^r$ достаточно близки к p_{ij}, отвечающим кратчайшим маршрутам, физический смысл переменных T, $\tilde{T}$ и Π подсказывает, что при определении T наиболее естественно занумеровать вершины так, что если какая-нибудь вершина i_1 является промежуточной для кратчайшего маршрута из некоторой вершины i_2 в i_0, то ее номер меньше, чем номер вершины i_2, а при определении $\tilde{T}$ и Π целесообразна обратная нумерация. Построение такой нумерации достигается незначительным усложнением алгоритма Форда поиска кратчайших маршрутов. Использование такой нумерации позволило примерно в три раза сократить время решения этих систем по сравнению с исходной нумерацией, выданной проектантами. (Разумеется, описанная выше целесообразная нумерация существенно зависит от того, какая вершина объявлена местом работы.) После нахождения равновесного распределения $p_{ij}{}^0$ для определения нагрузок на различные виды транспорта решались системы вида (16). Время полного просчета для одного места работы на машине «Минск-2» составляло приблизительно 10—12 мин.

В заключение выражаем благодарность М. А. Пииру, А. Г. Дынкину, Н. С. Пальчикову и И. П. Воронцовой.

Приложение

Доказательство теоремы 1. (Это доказательство близко по своей идее к доказательству общей теоремы Вальда о равновесии экономической системы [5].)

Приведем без доказательства следующее простое утверждение, которое потребуется нам ниже.

Лемма 1. Пусть поток $\{x_{ij^k}\}$ обладает следующим свойством: для любого индекса k не найдется последовательности вершин i_s, $1 \leqslant s \leqslant r$, $i_{s+1} \in \Gamma_{i_s}$, $i_{r+1} = i_1$ такой, что $x^k_{i_1 i_2} > 0, \ldots, x^k_{i_{r-1} i_r} > 0, x^k_{i_r i_1} > 0$. Тогда

$$x_{ij}{}^k \leqslant M = \max_n \sum_{m \neq n} \mu_m{}^n. \tag{18}$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Обозначим через K выпуклый многогранник в пространстве переменных $X = \{x_{ij}{}^k\}$, удовлетворяющих условиям сохранения (18) и неотрицательных, а через K_0 — множество, определяемое так:

$$K_0 = \{X \,/\, X \in K \text{ и } x_{ij}{}^k \leqslant M\}.$$

Ясно, что K_0 — *ограниченный*, замкнутый, выпуклый многогранник. (Непустота K и K_0 вытекает из связности графа.) Определим точечно-множественное отображение f многогранника K_0 в себя

$$Y \in f(X),\ X \in K_0, \text{ если } Y \in K \text{ и } \sum_{(i,j)} \tau_{ij}(X)\, y_{ij} = \min_{Z \in K} \sum_{(i,j)} \tau_{ij}(X)\, z_{ij}, \text{ где } y_{ij} = \sum_{k \neq i} y_{ij}{}^k,\ z_{ij} = \sum_{k \neq i} z_{ij}{}^k.$$

Очевидно, прежде всего, что $f(X)$ выпуклое, замкнутое подмножество K. Далее, любой поток Y из $f(X)$ удовлетворяет условию леммы 1 (если бы в противном случае нашелся индекс k_0 и замкнутый контур $i_1, \ldots, i_r, i_1$, такой, что $y^{k_0}_{i_{s-1} i_s} > 0$, то условия $\bar{y}_{ij}{}^k = y_{ij}{}^k$ при $(i,\ j,\ k) \neq (i_{s-1},\ i_s,\ k_0)$, $\bar{y}_{ij}{}^k = y_{ij}{}^k - \varepsilon$, $\varepsilon = \min_s y^k_{i_s s-1}$ при $(i,\ j,\ k) = (i_{s-1},\ i_s,\ k_0)$ определили бы допустимый поток, причем

$$\sum_{(i,j)} \tau_{ij}(X)\, \bar{y}_{ij} < \sum_{(i,j)} \tau_{ij}(X)\, y_{ij},$$

поскольку $\tau_{ij}(X) > 0$, что невозможно). Но тогда согласно этой лемме $y_{ij}{}^k \leqslant M$ при всех индексах i, j, k, т. е. $f(X) \subset K_0$. Используя непрерывность функций $\tau_{ij}(X)$, нетрудно доказать также, что это отображение полунепрерывно сверху. Применяя теорему Какутани о неподвижной точке (ее доказательство см., например, в [6]), получим, что существует допустимый поток $X^0 \in K_0 \subset K$, такой, что

$$\min_{X \in K} \sum_{(i,j)} \tau_{ij}(X^0)\, x_{ij} = \sum_{(i,j)} \tau_{ij}(X^0)\, x_{ij}{}^0.$$

Требуемое в определении 1 условие равновесности потока оказывается теперь не чем иным, как условием дополняющей нежесткости, поскольку $T_i^k(X^0)$ могут быть истолкованы как оптимальное решение задачи «максимизировать $\sum_{i \neq k} \mu_i^k T_i^k <$ при ограничениях $T_i^k \leqslant T_j^k + \tau_{ij}(X^0)$, $i \neq k$, $j \in \Gamma_i$, $T_k^k = 0$», двойственной задаче «минимизировать $\sum_{(i,j)} \tau_{ij}(X^0) x_{ij}$ по $X \in K$».

Перейдем теперь к вероятностной модели.

Вывод уравнений (7). Уточняя вероятностную схему, укажем сразу, что мы предполагаем наличие некоторого фиксированного момента времени t_0, с которого начинается «генерирование» потоков посадочных мест на каждом из ребер. Пусть $t_1 \geqslant t_0$ — момент начала поездки пассажира из i-й вершины ($i \neq i_0$), а $F_i^{t_1}(t)$ — функция распределения времени всей поездки (вероятность того, что время поездки будет меньше или равно t). Введем обозначения: символ K_i означает некоторый фиксированный маршрут (i, j_1, $j_2, \ldots, j_\nu$, i_0) из вершины i в вершину i_0 (*среди вершин* i, j_s, $1 \leqslant s$, $s \leqslant \nu$ *могут быть одинаковые*); очевидно, что p_K — вероятность выбора этого маршрута вычисляется так:

$$p_{K_i} = p_{ij_1} y_{j_1 j_2} \cdots p_{j_\nu i_0} \tag{19}$$

(при выполнении условия (6) $\sum_{K_i} p_{K_i} = 1$); $F_{K_i}^{t_1}(t)$ — функция распределения временно́й длины этого маршрута. Будем иметь тогда

$$F_i^{t_1}(t) = \sum_{K_i} p_{K_i} F_{K_i}^{t_1}(t).$$

Свойством, выделяющим пуассоновский поток событий (в данном случае событие — это появление на остановке транспортной единицы) из прочих потоков с неэкспоненциальным распределением интервала между событиями, является независимость события «появление посадочного места в фиксированном интервале $[a, b]$» от событий, связанных с течением процесса до момента времени a. Используя это свойство, а также взаимную независимость потоков, обслуживающих разные ребра, нетрудно показать, что $F_{K_i}^{t_1}(t)$ является сверткой распределений $F_{ij_1}(t)$, $F_{j_1 j_2}(t), \ldots, F_{j_\nu i_0}(t)$, ($F_{ij}(t)$ определены в (7)). Поэтому, в частности, $F_{K_i}^{t_1}(t)$, а следовательно, и $F_i^{t_1}(t)$ не зависят от t_1 (ниже индекс t_1 опускается). Пусть

$$f_i(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} dF_i(t), \qquad f_{ij}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} dF_{ij}(t) -$$

действительное преобразование Лапласа ($z \geqslant 0$) распределений $F_i(t)$, $F_{ij}(t)$; тогда, поскольку $F_{K_i}(t)$ — свертка $F_{ij_1}(t), \ldots, F_{j_\nu i_0}(t)$, получим

$$f_i(z) = \sum_{K_i} p_{K_i} (f_{ij_1}(z) f_{j_1 j_2}(z) \ldots f_{j_\nu i_0}(z)). \tag{20}$$

Используя (19), (20), легко увидеть, что функции $f_i(z)$ являются решением системы

$$f_i(z) = \sum_{j \in \Gamma_i} p_{ij} [f_{ij}(z) f_j(z)], \qquad f_{i_0}(z) \equiv 1 \quad \text{при } i \neq i_0. \tag{21}$$

Но это в силу свойств преобразования Лапласа и означает, что функции $F_i(t)$ являются решением системы (7).

О соотношении (8). Ограничимся для простоты случаем $k = 2$. Пусть функция $F(t_1, t_2)$ такова, что функции $F_1(t) = F(t, +\infty)$, $F_2(t) = F(+\infty, t)$ — непрерывны и $F_i(t) < 1$ при всех t (какое бы t ни взять, существует ненулевая вероятность того, что время проезда на i-м маршруте превзойдет t, $i = 1, 2$). Описанной схеме обучения адекватна следующая простая математическая модель: задана последовательность случайных величин $(\tilde{T}_1(1), \tilde{T}_2(1)), \ldots, (\tilde{T}_1(n), \tilde{T}_2(n)), \ldots,$ независимых для разных индексов n, причем $\tilde{T}_1(n)$, $\tilde{T}_2(n)$ имеют совместную функцию распределения $F(t_1, t_2)$. Заданы числа $T_1(0), T_2(0)$. Динамика изменения временны́х оценок $T_i(n)$, $n = 1, \ldots, i = 1, 2$, такова: при $n = 1, 2, \ldots$, $T_1(n) = \tilde{T}_1(n)$, если $T_1(n-1) < T_2(n-1)$ или $T_1(n-1) = T_2(n-1)$, но случайный выбор пал на первый маршрут; $T_1(n) = T_1(n-1)$, если $T_1(n-1) > T_2(n-1)$ или $T_1(n-1) = T_2(n-1)$, но случайный выбор пал на второй маршрут; аналогичные формулы имеют место и для $T_2(n)$. Очевидно, что величины $\tilde{T}_1(n)$, $\tilde{T}_2(n)$ не зависят от $(T_1(k), T_2(k)), k = 0, 1, \ldots, n-1$. Пусть $F^n(t_1, t_2)$, $F_1{}^n(t), F_2{}^n(t)$ — функции распределения $(T_1(n), T_2(n))$, $T_1(n)$, $T_2(n)$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} F^{n+1}(t_1, t_2) &= \text{Вер}[T_1(n+1) \leqslant t_1, T_2(n+1) \leqslant t_2] = \\ &= p_1{}^n \,\text{Вер}[\tilde{T}_1(n+1) \leqslant t_1, T_2(n) \leqslant t_2] + p_2{}^n \,\text{Вер}\,[T_1(n) \leqslant t_1, \\ &\tilde{T}_2(n+1) \leqslant t_2] = p_1{}^n F_1(t_1) F_2{}^n(t_2) + p_2{}^n F_1{}^n(t_1) F_2(t_2). \end{aligned}$$

Здесь

$$p_1{}^n = \text{Вер}\,[T_1(n) < T_2(n)] + {}^1\!/_2 \text{Вер}\,[T_1(n) = T_2(n)], \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad p_2{}^n = 1 - p_1{}^n \tag{22}$$

и

$$F_i{}^0(t) = \begin{cases} 0, & t < T_i(0), \\ 1, & t \geqslant T_i(0). \end{cases}$$

Используя непрерывность $F_1(t)$, $F_2(t)$, нетрудно убедиться, что при $n \geqslant 1$ $\text{Вер}\,[T_1(n) = T_2(n)] = 0$, так что при $n \geqslant 1$ $\text{Вер}\,[T_i(n) = \min\limits_{j=1,\ 2} T_j(n)] = p_i{}^n$. Согласно (22)

$$F_i^{n+1}(t) = p_i{}^n F_i(t) + (1 - p_i{}^n) F_i{}^n(t)$$

или

$$F_i^{n+1}(t) - F_i(t) = (1 - p_i{}^n)(F_i{}^n(t) - F_i(t)), \quad i = 1, 2, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

т. е. существует

$$\lim_{n\to\infty} F_i{}^n(t) = F_i(t) + \rho_i(F_i{}^0(t) - F_i(t)),$$

$$\rho_i = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n-1} (1 - p_i{}^k). \tag{23}$$

Очевидно, что по крайней мере одно из чисел ρ_1, ρ_2 должно быть нулем. В сочетании с условием $F_i(t) < 1$ при всех t и формулой (22) отсюда следует, что на самом деле $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Согласно (22), получим окончательно

$$\lim_{n\to\infty} p_i^n = \iint\limits_{t_i=\min(t_1,t_2)} dF_1(t_1)\,dF_2(t_2),$$

что и требовалось.

Доказательство теоремы 2. Пусть распределение $p = \{p_{ij}\}$ — допустимо, т. е. удовлетворяет условию (6) (множество допустимых распределений p будем обозначать символом Q_0); тогда определены величины $p_{ij}' = f_{ij}(p)$ (см. (9)), причем ясно, что $p_{ij}' \geqslant 0$ и $\sum\limits_{j\in\Gamma_i} p_{ij}' = 1$, т. е. $p' \in P$. Однако на пути применения принципа неподвижной точки лежит весьма существенная трудность, состоящая в том, что Q_0, вообще говоря, собственное подмножество P, так что наше отображение не определено на всем P. Но мы покажем сейчас, что тем не менее из многогранника P можно выделить его подмножество P_0, являющееся выпуклым, замкнутым многогранником, таким, что $P_0 \subset Q_0$, который остается инвариантным при этом отображении.

Прежде всего, пусть $p = \{p_{ij}\} \in Q_0$. Поскольку

$$G_{ij}(t) = \int\limits_0^t F_{ij}(t-s)\,dF_j(s), \quad \text{то}$$

$$1 - G_{ij}(t) \geqslant 1 - F_{ij}(t) \geqslant e^{-\lambda_{ij}t} \geqslant e^{-\lambda t}, \qquad \lambda = \max_{i,j} \lambda_{ij}.$$

Отсюда

$$p_{ij}' = f_{ij}(p) = \int\limits_0^{+\infty} dG_{ij}(t) \prod_{s\in\Gamma_i\setminus j} (1 - G_{is}(t)) \geqslant \int\limits_0^{+\infty} dG_{ij}(t)\,e^{-z_0t} > 0, \quad (24)$$

где $z_0 = m\lambda$, m — число ребер в графе, или ($G_{ij}(t)$ — свертка $F_{ij}(t)$, $F_j(t)$!);

$$p_{ij}' \geqslant f_{ij}(z_0) f_j(p, z_0), \quad f_{i_0}(p, z_0) \equiv 1, \qquad (25)$$

где $f_{ij}(z_0)$, $f_j(p, z_0)$ — преобразования Лапласа функций $F_{ij}(t), F_j(t)$ при $z = z_0$ (указывая в числе аргументов функции f_j распределение p, подчеркиваем, что как $F_j(t)$, так и ее преобразование Лапласа зависят от p; наоборот, поскольку далее преобразования Лапласа рассматриваются только при $z = z_0$, то ниже для простоты записи не будем указывать его как аргумент). Из формулы (24) следует, что $p' \in Q_0$.

Разобьем вершины графа на непересекающиеся подмножества $I_1, \ldots, I_k$, определив их так: если вершина $i \in I_s$, $1 \leqslant s \leqslant k$, то из нее существует маршрут на работу i_0 из s ребер и не существует маршрута с меньшим числом ребер. Нетрудно видеть, что если $i \in I_s$, $s \geqslant 2$, то $\Gamma_i \cap \cap I_{s-1} \neq \Lambda$.

Итак, пусть $p \in Q_0$; согласно (25) при $i \in I_1$ $p_{ii_0}' \geqslant \delta, \delta = \min\limits_{i,j} f_{ij}$.

В таком случае множество

$$Q_1 = \{p \,/\, p \in Q_0,\ p_{ii_0} \geqslant \delta \text{ при } i \in I_1\},$$

принадлежащее Q_0, инвариантно при нашем отображении (более коротко $f(Q_1) \subset Q_1$). Помимо этого, используя уравнения (21) при $z = z_0$, будем иметь, что если $p \in Q_1$, то при $i \in I_1$

$$f_i(p) \geqslant p_{ii_0} f_{ii_0} \geqslant \delta^2 \tag{26}$$

(преобразование Лапласа от функции распределения положительно). Пусть уже построены множества $Q_1, \ldots, Q_r$, $1 \leqslant r < k$, такие, что $Q_0 \supset \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_r$, причем $f(Q_s) \in Q_s$ и

$$Q_s = \{p \,/\, p \in Q_{s-1},\ p_{ij} \geqslant \delta^{\nu_s} \text{ при } i \in I_s, j \in I_{s-1}\},$$

и при $p \in Q_s$, $i \in I_s$, $f_i(p) \geqslant \delta^{2\nu_s}$, $s = 1, \ldots, r$ $(\nu_1 = 1)$. Тогда, если $p \in Q_r$, $i \in I_{r+1}$, $j \in I_r$, то, согласно (25) и определению Q_r, $p_{ij}' \geqslant \delta\delta^{2\nu_r} = \delta^{2\nu_r+1}$. Определим число ν_{r+1} по формуле $\nu_{r+1} = 2\nu_r + 1$ и введем множество

$$Q_{r+1} = \{p \,/\, p \in Q_r,\ p_{ij} \geqslant \delta v_{r+1} \text{ при } i \in I_{r+1}, j \in I_r\}.$$

Тогда в силу указанной оценки снизу для p_{ij}' $(i \in I_{r+1}, j \in I_r)$ и инвариантности Q_r, Q_{r+1} также инвариантно. При этом аналогично оценке (26) получим $(\Gamma_i \cap I_r \neq \Lambda$ при $i \in I_{r+1})$ для $i \in I_{r+1}$ $f_i(p) \geqslant \delta\delta v_{r+1}\delta^{2\nu_r} = \delta^2 v_{r+1}$

На k-м шаге этого построения (k — общее число подмножеств I_s) придем к множеству Q_k, такому, что $f(Q_k) \in Q_k$. Согласно определению Q_k $Q_k = Q_0 \cap P_0$, $P_0 = \{p \,/\, p \in P, p_{ij} \geqslant \delta^{\nu_s}$ при $i \in I_s, j \in I_{s-1}, s = 1, \ldots, k\}$.

Легко понять теперь, что поскольку каждая вершина графа входит в одно из множеств $I_1, \ldots, I_k$, то P_0 содержит только допустимые распределения p, т. е. $P_0 \subset Q_0$ и $Q_k = P_0$. Непрерывность отображения f на множестве P_0 следует из стандартных соображений. Для завершения доказательства теоремы остается сослаться на теорему Брауэра о неподвижной точке.

О функции распределения времени ожидания при ограниченной емкости транспортных единиц. Пусть функция распределения длины интервала между поступлениями посадочных мест есть $B(t)$, а функция распределения длины интервала между поступлениями пассажиров есть $A(t)$. Нетрудно убедиться, что если $B(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, то задача об образовании очереди пассажиров эквивалентна простейшей задаче теории массового обслуживания с соответствующим потоком требований и экспоненциальным законом обслуживания (если пассажира, стоящего в очереди первым, интерпретировать как требование, находящееся в обслуживании). Отсюда следует, в частности, что если $A(t) = 1 - e^{-xt}$, $x < \lambda$, то в стационарном режиме поток отъезжающих пассажиров также является пуассоновским с параметром x, а $F(t)$ — функция распределения времени ожидания пассажиром посадочного места — имеет вид $F(t) = 1 - e^{-(\lambda - x)t}$. (Отметим, что в работах [7, 8] исследуется случай, когда поток требований пуассоновский, а моменты мгновенного обслуживания (в нашей терминологии моменты прибытия посадочных мест) образуют произвольный рекуррентный поток.)

Доказательство теоремы 3. По своей основной идее доказательство этой теоремы близко к доказательству теоремы 2. Пусть p — допустимое распределение. Тогда определены числа

$$p_{ij}' = \varphi(\bar{t}_{ij}(p)) \Big/ \sum_{s \in \Gamma_i} \varphi(\bar{t}_{is}(p)); \tag{27}$$

причем $p_{ij}' \geqslant 0, \sum\limits_{j \in \Gamma_i} p_{ij}' = 1$, т. е. $p' \in P$. Будем для краткости вместо формулы (27) писать $p' = \varphi(p)$. Любой вершине $i \neq i_0$ можно сопоставить вершину из множества Γ_i (ее номер обозначим через $j(i, p)$), такую, что

$$T_{j(i,p)}(p)+\tau_{ij(i,p)}=\min_{j\in\Gamma_i}[T_j(p)+\tau_{ij}].$$

Из уравнений (11) следует, что

$$T_i(p)\geqslant T_{j(i,p)}(p)+\tau_{ij(i,p)}=\bar{t}_{ij(i,p)}(p). \tag{28}$$

Рассуждение, обычное для метода потенциалов в транспортной задаче линейного программирования, показывает, что не существует замкнутого контура $i_1,\ldots,i_n$, $i_1=i_n$, $i_s\neq i_0$, в котором $i_2=j(i_1,p),\ldots,i_n=$ $=j(i_{n-1},p)$. Это значит, что для каждой вершины графа $i\neq i_0$ можно указать последовательность вершин $i_1,\ldots,i_r$, такую, что $i_1=j(i,p),\ldots$ $\ldots,i_r=j(i_{r-1},p)$, $i_0=j(i_r,p)$. Кроме того, в силу монотонности $\varphi(t)$ и формул пересчета (27)

$$p'_{ij(i,p)}\geqslant\frac{1}{\gamma},\qquad \gamma=\max_i|\Gamma_i|. \tag{29}$$

Назовем множество A ребер графа допустимым, если для любой вершины $i\neq i_0$, можно указать маршрут $(i,i_1,\ldots,i_r,i_0)$, для которого $(i,i_1)\subset A,\ldots,(i_r,i_0)\subset A$. Ясно, что различных допустимых множеств конечное число, обозначим его буквой k. Введем подмножества $P_1,\ldots,P_k$ многогранника P

$$P_s=\left\{p/p\in P,p_{ij}\geqslant\frac{1}{\gamma}\quad\text{при}\quad(i,j)\in A_s\right\},\qquad 1\leqslant s\leqslant k,$$

очевидно, что каждое множество P_s — непустой, выпуклый замкнутый многогранник, все точки которого являются допустимыми распределениями. Обозначим через P_0 многогранник, являющийся выпуклой оболочкой многогранников $P_1,\ldots,P_k$. Нетрудно убедиться, что все точки замкнутого многогранника допустимы; вследствие этого отображение φ непрерывно на P_0. При этом, согласно установленным выше свойствам отображения φ

$$\varphi(P_0)\in\bigcup_{s=1}^{k}P_s\subset P_0.$$

Существование равновесия, как и в теореме 2, следует теперь из теоремы Брауэра о неподвижной точке.

На доказательстве теоремы 3′ мы позволим себе не останавливаться, поскольку оно за исключением некоторых технических моментов то же самое.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Л. Амбарян. Выбор оптимальных трасс движения пассажиров при заданной транспортной сети города. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, № 6.
2. А. Кофман, Р. Крюон. Массовое обслуживание. Теория и приложения. М., «Мир», 1965.
3. А. Г. Дынкин, Э. Г. Мовчан. Методология расчета перспективных пассажиропотоков. В сб. Градостроительство. Применение математических методов и электронно-вычислительной техники в градостроительстве. Киев. «Будівельник», 1966.
4. Б. Г. Питтель. Одна простейшая вероятностная модель коллективного поведения. Проблемы передачи информации, 1967, т. 3, вып. 3.
5. С. Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир», 1964.
6. E. Burger, Introduction to the Theory of Games. Englewood Cliffs, 1963.
7. N. T. I. Bailey. On queuing process with bulk service. J. Roy. Statist. Soc. B, 1954, 16.
8. F. Downton. Waiting time in bulk service queues. J. Roy. Statist. Soc. B, 1955, 17.

Поступила в редакцию
21 III 1968