тогда

$$K_e = 0{,}333 \times 0{,}2 \times 100 \times 2{,}58 = 17{,}2\%.$$

Теперь при неравномерно возрастающем финансировании при $a = 0{,}25$

$$K_{уд} = \frac{K \cdot 3}{t_1^3} = \frac{100 \cdot 3}{2{,}58^3} = 17{,}5\%.$$

Распределение капитальных вложений по годам

$$K_1 = \frac{K_{уд}}{3}(t_n^3 - t_{n-1}^3) = 5{,}8 \approx 6\%;$$

$$K_2 = \frac{17{,}5}{3}(2^3 - 1^3) = 40{,}5 \approx 41\%;$$

$$K_3 = \frac{17{,}5}{3}(2{,}58^3 - 2^3) = 53{,}5 \approx 54\%;$$

$$K_e = 0{,}25 \times 0{,}2 \times 100 \times 2{,}58 = 12{,}9\%.$$

Таким образом, видно, что потери прибыли при равномерно возрастающем финансировании, по сравнению с приведенными в СНиП, снижаются на 27,1%, а при неравномерно возрастающем — на 45,6%.

В заключение следует отметить, что приведенные формулы дают возможность освободиться от недостатков, присущих существующим формулам, и верно произвести распределение вложений по годам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методы определения экономической эффективности новой техники в строительстве. М., Госстройиздат, 1961.
2. Методика определения экономической эффективности внедрения новой техники, механизации и автоматизации производственных процессов в промышленности. М., Изд-во АН СССР, 1962.
3. Инструкция по определению годового экономического эффекта, полученного в результате внедрения новой техники в строительстве (СН 248-63). М., 1963, Госстрой СССР.

Поступила в редакцию
24 X 1967

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОБХОДЧИКЕ

А. Я. ЧЕРКАСОВА, З. Я. БЫКОВА, В. А. СМИРНОВА, С. В. ГЕРЧИКОВ

(Саратов)

Постановка задачи. Задача об обходчике представляет интерес для организаций, занимающихся эксплуатацией различных городских коммуникаций (трубопроводных и электрических сетей, транспортных линий), доставкой почты и другими видами обслуживания населения.

Коммуникации крупного города обычно делятся на отдельные зоны обслуживания со своими начальными пунктами, из которых ряд работников (или бригад) с определенной периодичностью обходят заданные маршруты. Выбор маршрутов базируется, как правило, на опыте и интуиции, что не обеспечивает оптимальный вариант и влечет за собой непроизводительные затраты времени обходчиков.

Задача об обходчике может быть сформулирована следующим образом: обходчик, выходя из начального пункта, должен пройти по всем заданным трассам и вернуться в исходный пункт с минимальными издержками времени. Издержки по всем трассам считаются заданными.

На языке теории графов это можно сформулировать так: дан граф, содержащий четные и нечетные вершины, известны издержки по его ребрам, нужно обойти все ребра графа из заданной вершины и вернуться в нее с минимальной суммой издержек. Очевидно, при наличии нечетных вершин для обхода всех ребер графа необходимо совершить ряд дополнительных или повторных переходов. Поскольку суммарные издержки по ребрам заданы и не могут быть сокращены, задача сводится к определению этих дополнительных или повторных переходов или (как мы еще в дальнейшем будем их называть) перемычек.

Для графа, имеющего n нечетных вершин, задача может быть сведена к определению $n/2$ перемычек (дополнительных переходов) между этими вершинами, обеспечивающих превращение его в граф с четными вершинами, который всегда можно обойти по замкнутому циклу [1]. Теоретически оптимальное решение можно найти путем полного перебора всех возможных вариантов множества перемычек. Однако на практике это оказывается неосуществимым, ибо число вариантов равно $2n = 1)!!$, т. е. весьма быстро возрастает с увеличением числа нечетных вершин. Для отыскания оптимального варианта может быть использован метод ветвей и границ, предложенный для решения задачи о коммивояжере [2].

Несмотря на принципиальное различие задач о коммивояжере и об обходчике (в первой минимизируется маршрут, обеспечивающий обход всех вершин графа, а во второй — всех ребер), процесс минимизации суммы длин перемычек имеет некоторую общность с задачей о коммивояжере, ибо он сводится к определению минимальных расстояний между нечетными вершинами графа. Следует также отметить, что в отличие от задачи о коммивояжере при отыскании минимальной суммарной длины перемычек определяется не кратчайший маршрут, последовательно соединяющий все пункты между собой, а только наилучшая комбинация попарных соединений вершин.

При использовании метода ветвей и границ составляется исходная матрица, строки и столбцы которой нумеруются в соответствии с нечетными вершинами графа $r = 1, 2, \ldots, n$.

Элемент матрицы, находящийся на пересечении строки i и столбца j,— это издержки для перехода из пункта i в пункт j. Характерной особенностью задачи о коммивояжере является то, что в маршрут коммивояжера входит обязательно один элемент из каждой строки и каждого столбца исходной матрицы, что соответствует одному входу и одному выходу коммивояжера из любого пункта сети.

В рассматриваемой нами задаче перемычку между двумя нечетными вершинами i и j графа можно рассматривать как выход из пункта i и приход в пункт j. В этом случае отсутствует приход в пункт i и выход из пункта j и соответствующие строка j и столбец i матрицы не будут содержать элементов, входящих в искомое множество перемычек.

Для возможности преобразования матрицы издержек по методу «ветвей и границ» введем искусственную замену перемычек подциклами, т. е. будем рассматривать перемычку между пунктами i и j как переход из i в j и обратно. В этом случае полученная в результате расчета суммарная длина перемычек соответствует фактической удвоенной длине, и, следовательно, нижние границы, определяемые по методу ветвей и границ, будут вдвое больше фактических нижних границ.

Другая особенность задачи заключается в том, что после выбора очередной пары соединяющихся между собой пунктов производится вычеркивание двух строк и двух столбцов, на пересечении которых лежат выбранные участки пути. Это сокращает фактический порядок матрицы и позволяет решить задачу об обходчике значительно быстрее, чем решается задача о коммивояжере.

Алгоритм. Множество всех возможных парных соединений (перемычек) нечетных вершин графа разбивается на все меньшие и меньшие подмножества, для каждого из которых вычисляются их нижние границы. В соответствии с вычисленными минимальными значениями границ проводится последовательное разбиение подмножеств и находится минимальная длина перемычек. Минимальные расстояния между нечетными вершинами образуют исходную матрицу издержек.

Благодаря искусственному выделению подциклов в множестве перемычек всегда содержится один элемент из каждой строки и каждого столбца матрицы. Так как количество нечетных вершин графа всегда четное, матрица имеет четное количество строк и столбцов. Матрица с неотрицательными элементами и по крайней мере одним нулем в каждой строке и в каждом столбце называется приведенной [2]. Процесс вычитания наименьшего элемента строки (столбца) из всех ее элементов называется приведением строки (столбца). Приведенную матрицу можно получить, например, путем последовательного приведения по строкам и столбцам. Сумма всех констант приведения матрицы является нижней границей удвоенной суммарной длины перемычек.

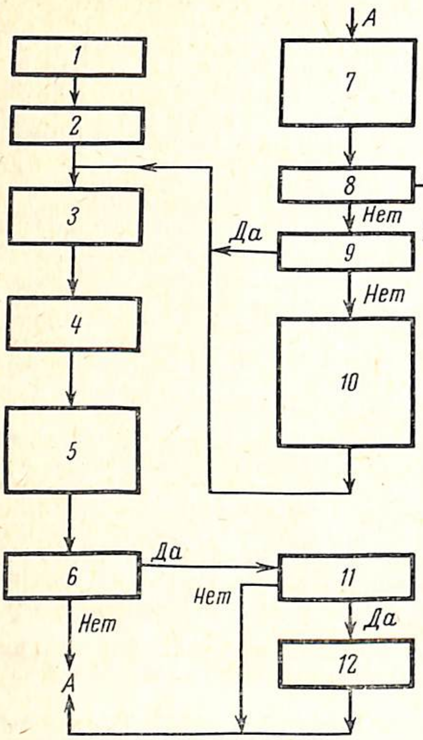

Рис. 1. Блок-схема алгоритма: *1* — c — исходная матрица издержек, z_0 — оптимальные суммарные издержки; *2* — привести c. Пометить X при помощи $w(X)$, равной сумме приводящих констант; *3* — выбрать вершину (k, l) для ближайшего разветвления дерева, т. е. найти нуль с максимальной ценой; *4* — произвести ветвление от вершины X к $\overline{Y}$ при помощи $w(\overline{Y}) = w(X) + \theta(k, l) + \theta(l, k)$; *5* — произвести ветвление от вершины X и Y. Вычеркнуть строки и столбцы (k, l), соответствующие вершине Y. Привести c. Найти нижнюю границу Y. $w(Y) = w(X) +$ сумма приводящих констант; *6* — является ли c матрицей 2×2; *7* — выбрать вершину X, из которой будут производиться следующие ветвления, как вершину с наименьшей величиной $w(X)$ среди концевых вершин; *8* — выполняется ли неравенство $z_0 \leqslant {}^1/_2 w(X)$; *9* — выполняется ли равенство $X = Y$; *10* — построить c для X: 1) исходная матрица издержек, 2) найти сумму $g = \Sigma[c(y) + c(ji)]$ по всем фиксированным парам, 3) для каждой пары (ij) вычеркнуть по две строки (ij) и два столбца (ij) 4) запретить невозможную пару, 5) привести c, 6) пометить X при помощи $w(X) = g +$ сумма приводящих констант; *11* — выполняется ли неравенство ${}^1/_2 w(Y) < z_0$; *12* — $z_0 \to {}^1/_2 w(Y)$. Запомнить цикл

Разбиение множества всех перемычек на непересекающиеся подмножества будет изображаться путем разветвления дерева. Первая вершина * ветвления содержит все множество возможных вариантов распределения перемычек. Вершина ветвления, содержащая (i, j), изображает все множество вариантов, включающих в себя пару пунктов (i, j). Вершина ветвления, содержащая $\overline{(i, j)}$, изображает множество вариантов, не включающих пару пунктов (i, j).

От вершины ветвления (i, j) имеется другое разветвление. Следующая вершина ветвления, содержащая $\overline{(k, l)}$, изображает совокупность перемычек, включающих (i, j), но не включающих $\overline{(k, l)}$, в то время как (k, l) изображает совокупность перемычек, включающих как (i, j), так и (k, l). Вообще, если от некоторой вершины ветвления X пройти дерево по направлению к его началу, то можно узнать, какие вершины ветвления обязательно входят в множество перемычек, принадлежащих X, и какие вершины не могут входить в это множество.

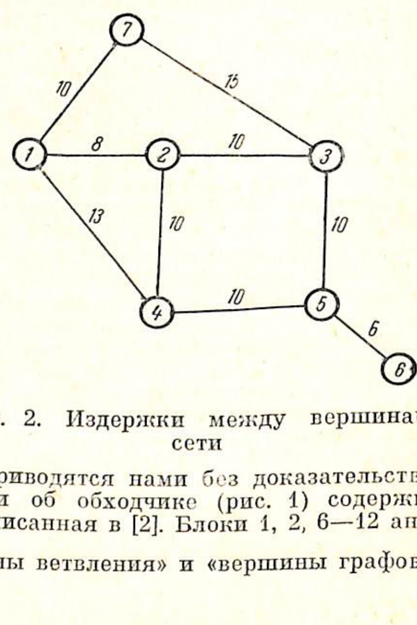

Рис. 2. Издержки между вершинами сети

Заметим, что на любом этапе процесса объединение множеств, изображаемых концевыми вершинами дерева,— это множество всех возможных вариантов распределения перемычек графа. Когда в X происходит разветвление, вершина ветвления с только что введенной парой пунктов обозначается через Y и вершина ветвления с только что запрещенной парой пунктов — через $\overline{Y}$. Все зависимости, использованные при изложении последовательности расчета, заимствованы из [2] и поэтому приводятся нами без доказательства.

Блок-схема алгоритма для решения задачи об обходчике (рис. 1) содержит столько же блоков, что и блок-схема, подробно описанная в [2]. Блоки 1, 2, 6—12 ана-

* Не следует отождествлять понятия «вершины ветвления» и «вершины графов».

	1	2	3	4	5	6
1	∞	8	18	13	23	29
2	8	∞	10	10	20	26
3	18	10	∞	20	10	16
4	13	10	20	∞	10	16
5	23	20	10	10	∞	6
6	29	26	16	16	6	∞

Рис. 3. Исходная матрица

	1	2	3	4	5	6
1	∞	0^{3}	8	3	15	21
2	0^{3}	∞	0^{2}	0^{2}	12	18
3	8	0^{0}	∞	8	0^{0}	6
4	3	0^{0}	8	∞	0^{0}	6
5	17	14	2	2	∞	0^{8}
6	23	20	8	8	0^{8}	∞

Рис. 4. Приведенная матрица

логичны соответствующим блокам, приведенным в [2], и поэтому нами не описываются. Ограничимся описанием блоков 3—5.

Блок 3 отбирает пару пунктов (k, l), на которой основывается ближайшее разветвление с целью разбиения множества возможных перемычек, принадлежащих X, на подмножество Y, которое с наибольшей вероятностью содержит наименьшую суммарную длину перемычек, и подмножество $\bar{Y}$, которое с наибольшей вероятностью не содержит ее.

Минимальная протяженность перемычек подмножества Y, содержащего (i, j), наиболее вероятна для элементов матрицы $c(i, j) = 0$. В подмножестве Y подбирают нуль из матрицы, цена которого будет наибольшей. Ценой нуля $\theta(i, j)$ матрицы называем сумму минимальных значений элементов в i-й строке и в j-м столбце. В нашем случае при отыскании нижней границы подмножества прибавляется сумма цен двух симметричных нулей i-й строки j-го столбца и j-й строки i-го столбца.

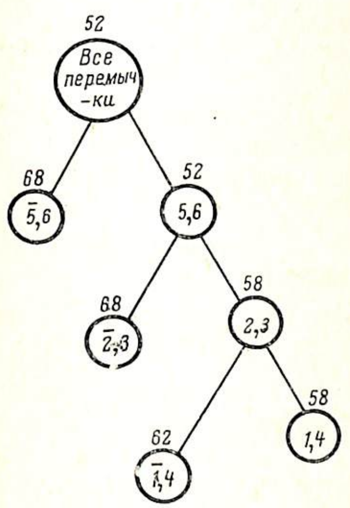

Рис. 5. Границы вершин ветвления

Блок 4 расширяет дерево от вершины X к вершине $\bar{Y}$. Нижняя граница $w(\bar{Y})$ равна $w(\bar{Y}) = w(X) + \theta(i, j) + \theta(j, i)$, где $w(X)$ — нижняя граница для вершины ветвления X.

Блок 5 расширяет дерево от вершины X к вершине Y. Так как пара (k, l) фиксирована для всего множества параметров, то строки k, l и столбцы k, l вычеркиваются из матрицы.

	1	2	3	4
1	∞	0^{3}	8	3
2	0^{3}	∞	0^{8}	0^{3}
3	8	0^{8}	∞	8
4	3	0^{3}	8	∞

Рис. 6. Матрица четвертого порядка

Действительно, если в графе две какие-то вершины k и l соединить перемычкой, все возможные перемычки с вершинами k или l исключаются из дальнейшего рассмотрения. После вычеркивания двух строк и двух столбцов матрица может быть приведена. Пусть h — сумма новых приводящих констант. Нижняя граница для Y равна $w(Y) = w(X) + h$.

В качестве примера, поясняющего ход вычислений и некоторые отличия нашей задачи от задачи коммивояжера, рассмотрим сеть (рис. 2), состоящую из девяти трасс, шести нечетных вершин. Издержки между вершинами приведены на рис. 2. Исходная матрица (рис. 3) шестого порядка составлена по правилу наименьших издержек между нечетными вершинами. Как и в [2], приведем эту матрицу сначала по строкам, а затем по столбцам, получим приведенную матрицу (рис. 4). В кружках выписана цена нулей. Сумма приводящих констант равна 52. Так как наибольшая цена нуля равна 8, первая вершина ветвления будет $(5, 6)$ или $(\overline{6, 5})$ (рис. 5). Нижняя граница вершины ветвления $(5, 6)$ равна $w\,(5, 6) = 52 + 8 + 8 = 68$.

Так как вершина (5, 6) зафиксирована, из приведенной матрицы (рис. 4) вычеркиваются одновременно строки 5, 6 и столбцы 5, 6. В результате получим матрицу четвертого порядка (рис. 6). Данная матрица приведена, значит нижняя граница совокупности перемычек, включающих 5, 6, равна 52. Выбирая из рис. 6 нуль с наибольшей ценой, находим, что второй вершиной ветвления будет (2, 3) или (3, 2). Вычеркивая вторую, третью строку и второй, третий столбец матрицы (рис. 6), получаем единственно возможную третью вершину ветвления (1, 4). Итак, удвоенная нижняя граница ветвления равна 58. Суммарные издержки найденнных перемычек (5—6, 2—3, 1—4) равны $6 + 10 + 13 = 29$.

Упрощение вычислений. Процесс минимизации суммы для перемычек может быть сокращен за счет предварительного разбиения исходного графа на области, содержащие четное количество тяготеющих друг к другу нечетных вершин графа. При этом задача сводится к минимизации суммы длин перемычек внутри отдельных групп.

В ряде случаев расположение некоторых перемычек будет настолько очевидно, что их можно устанавливать сразу, исключая соединяемые ими вершины из общего рассмотрения. В остальных случаях можно рекомендовать методику, изложенную в [3].

Разбиение исходного графа на области упрощает ряд вычислений. При этом получается решение, достаточно близкое к оптимальному. Деление на подмножества приводит к сокращению порядка матриц. Это позволяет использовать для минимизации сложных графов ЭВМ со сравнительно небольшим объемом оперативной памяти и значительно сокращает время вычислений, которое быстро возрастает с ростом порядка матрицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Берж. Теория графов и ее применения. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. Дж. Литл, К. Мурти, Д. Суини, К. Кэрел. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, № 1.
3. R. L. Kard, G. L. Thompson. A heuristic approach to solving travelling salesman problems. Manag Sci., 1964, 10, N 2.

Поступила в редакцию
20 III 1967

МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Г. В. НЕСТЕРЕНКО

(Москва)

В [1] указывается на неразработанность и в то же время важность методов минимизации нелинейных функций без ограничений. Подчеркивается необходимость разработки специальных методов минимизации негладких функций.

В настоящей заметке выделяется класс негладких функций вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{m} A_{ij}x_j + B_i \right|. \tag{1}$$

Эта функция имеет следующие особенности: 1) выпукла вниз; 2) кусочно-линейна.

Минимизировать функцию (1) достаточно по одномерным многообразиям, на которых она легко приводится к кусочно-линейной функции вида

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i |x - c_i|, \tag{2}$$

где $\varphi_i > 0$ и $c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_n$.