держек между нечетными вершинами. Как и в [2], приведем эту матрицу сначала по строкам, а затем по столбцам, получим приведенную матрицу (рис. 4). В кружках выписана цена нулей. Сумма приводящих констант равна 52. Так как наибольшая цена нуля равна 8, первая вершина ветвления будет (5, 6) или $(\overline{6, 5})$ (рис. 5). Нижняя граница вершины ветвления (5, 6) равна $w\,(\overline{5, 6}) = 52 + 8 + 8 = 68$.

Так как вершина (5, 6) зафиксирована, из приведенной матрицы (рис. 4) вычеркиваются одновременно строки 5, 6 и столбцы 5, 6. В результате получим матрицу четвертого порядка (рис. 6). Данная матрица приведена, значит нижняя граница совокупности перемычек, включающих 5, 6, равна 52. Выбирая из рис. 6 нуль с наибольшей ценой, находим, что второй вершиной ветвления будет (2, 3) или (3, 2). Вычеркивая вторую, третью строку и второй, третий столбец матрицы (рис. 6), получаем единственно возможную третью вершину ветвления (1, 4). Итак, удвоенная нижняя граница ветвления равна 58. Суммарные издержки найденнных перемычек (5—6, 2—3, 1—4) равны $6 + 10 + 13 = 29$.

Упрощение вычислений. Процесс минимизации суммы для перемычек может быть сокращен за счет предварительного разбиения исходного графа на области, содержащие четное количество тяготеющих друг к другу нечетных вершин графа. При этом задача сводится к минимизации суммы длин перемычек внутри отдельных групп.

В ряде случаев расположение некоторых перемычек будет настолько очевидно, что их можно устанавливать сразу, исключая соединяемые ими вершины из общего рассмотрения. В остальных случаях можно рекомендовать методику, изложенную в [3].

Разбиение исходного графа на области упрощает ряд вычислений. При этом получается решение, достаточно близкое к оптимальному. Деление на подмножества приводит к сокращению порядка матриц. Это позволяет использовать для минимизации сложных графов ЭВМ со сравнительно небольшим объемом оперативной памяти и значительно сокращает время вычислений, которое быстро возрастает с ростом порядка матрицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Берж. Теория графов и ее применения. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. Дж. Литл, К. Мурти, Д. Суини, К. Кэрел. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, № 1.
3. R. L. Kard, G. L. Thompson. A heuristic approach to solving travelling galesman problems. Manag Sci., 1964, 10, N 2.

Поступила в редакцию
20 III 1967

МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Г. В. НЕСТЕРЕНКО

(Москва)

В [1] указывается на неразработанность и в то же время важность методов минимизации нелинейных функций без ограничений. Подчеркивается необходимость разработки специальных методов минимизации негладких функций.

В настоящей заметке выделяется класс негладких функций вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{m} A_{ij}x_j + B_i \right|. \tag{1}$$

Эта функция имеет следующие особенности: 1) выпукла вниз; 2) кусочно-линейна.

Минимизировать функцию (1) достаточно по одномерным многоообразиям, на которых она легко приводится к кусочно-линейной функции вида

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i |x - c_i|, \tag{2}$$

где $\varphi_i > 0$ и $c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_n$.

Минимум функции (2) элементарно находится, а именно, если

$$\sum_{i=1}^{k-1}\varphi_i-\sum_{k}^{n}\varphi_i<0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{k}\varphi_i-\sum_{k+1}^{n}\varphi_i\geqslant 0,$$

то минимум $\varphi(x)$ достигается при $x=c_k$.

Суть метода минимизации функции (1) заключается в следующем.

1) Выбирается произвольно некоторое одномерное многообразие.

2) Минимизируется функция по этому многообразию. Находим точку минимума.

3) Осуществляется минимизация функции (1) по всем одномерным многообразиям, проходящим через найденную выше точку, до тех пор, пока некоторое из них осуществит переход к другой точке.

4) Если по некоторому многообразию осуществился переход в другую точку, то работа с первой точкой прекращается и все сказанное в п. 3) выполняется для новой точки.

5) Если некоторая точка окажется устойчивой (ни одно из испытанных многообразий, проходящих через данную точку, не осуществляет переход к другой точке), то она будет искомым минимумом функции (1).

Поясним сказанное на примере. Пусть имеем функцию вида

$$F(x_1,\ x_2)=|x_1-1|+2|x_1-x_2|+|3x_1+x_2|.$$

Полагаем $x_1-1=0$. В гиперплоскости $x_1=1$ имеем одномерное многообразие

$$\varphi(x_2)=|x_2+3|+2|x_2-1|.$$

Минимум $\varphi(x_2)$ достигается при $x_2=2$; $F(1,\ 1)=4$. Следовательно, имеем точку (1,1). Необходимо проверить на минимум все одномерные многообразия, проходящие через точку (1,1).

Здесь имеется еще одно многообразие

$$x_1-x_2=0, \qquad \varphi(x_2)=4|x_2|+|x_2-1|.$$

$\varphi(x_2)$ достигает минимума при $x_2=0$. Поэтому вдоль этого многообразия $F(x_1,\ x_2)$ минимальна при $x_1=x_2=0$; $F(0,\ 0)=1$. Осуществился переход к точке (0, 0). Через эту точку проходит еще одно многообразие

$$3x_1+x_2=0, \quad \varphi(x_2)=\frac{1}{3}|x_2+3|+\frac{8}{3}|x_2|.$$

$\varphi(x_2)$ минимальна при $x_2=0$. Следовательно, и вдоль этого многообразия $F(x_1,\ x_2)$ минимальна при $x_1=x_2=0$ $F(0,\ 0)=1$. Точка (0, 0) устойчива. Поэтому абсолютный минимум $F(x_1,\ x_2)$ достигается при $x_1=x_2=0$ и равен 1.

В заключение можно сказать, что этот метод особенно естественен и эффективен для подкласса функций, встречающихся в задачах размещения объектов вида

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}A_{ij}|x_j-C_i|+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}B_{jk}|x_j-x_k|,$$

где $A_{ij}\geqslant 0$ и $B_{jk}\geqslant 0$, так как одномерные многообразия здесь легко просматриваются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Т. Поляк. Методы минимизации функции многих переменных. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 6.

Поступила в редакцию
17 VII 1967