

НОВЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПРОБЛЕМЫ ЛОКАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ

В. Ф. ПУГАЧЕВ

(Москва)

В предлагаемой статье предпринимается попытка провести более полное, чем в [1—4], математическое исследование проблемы локального критерия и проанализировать вытекающие отсюда выводы.

1. МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЭКОНОМИКИ

Проблемы локального критерия целесообразно изучать применительно к *оптимальному режиму функционирования экономики* — режиму, при котором все звенья хозяйства действуют в строгом соответствии с общим критерием оптимальности. Такой режим может изучаться с помощью математических моделей, представляющих собой единую условно-экстремальную задачу большой размерности. В [2] за основу анализа была взята следующая достаточно общая модель.

Полагаем, что народное хозяйство состоит из конечного (но весьма большого) числа локальных хозяйственных объектов. В рассмотрение вводятся все реально мыслимые объекты — не только существующие, но и проектируемые. Имеется некоторая единая номенклатура всех ресурсов в натуральном выражении — продукции, сырья, оборудования, зданий, природных и трудовых ресурсов и т. д. Каждый объект (или любая совокупность объектов) в этой номенклатуре может быть охарактеризован вектором, составляющими которого являются объемы производимых и потребляемых видов ресурсов в единицу времени. Создаваемая продукция и услуги («выход») при этом можно записывать со знаком плюс, все виды затрат («вход») — со знаком минус. В понятие затрат нужно включать не только текущие затраты, но и использование всех видов основных производственных фондов, природных и трудовых ресурсов.

Обозначим через x^k вектор, составляющими которого служат объемы производства продукции и затрат ресурсов в единицу времени (скорости производства и потребления) для k -го объекта. Характер функционирования каждого объекта (технологический режим) пусть определяется вектором его «внутренних» переменных ξ^k . Эти переменные для каждого элемента могут быть определены по-разному: в частности, под ними могут пониматься интенсивности использования технологических способов производства. Переменные ξ^k будем считать неотрицательными, а при нулевых значениях всех составляющих вектора ξ^k для некоторого элемента k полагать, что этот элемент фактически в системе отсутствует (или еще не появился, или уже ликвидирован).

Векторы x^k и ξ^k необходимо рассматривать в качестве функций времени t . Между этими векторными функциями существует зависимость $x^k(t) = F_k[\xi^k(t)]$, где F_k — оператор, переводящий $\xi^k(t)$ в $x^k(t)$.

Области изменения переменных ξ^k можно полагать ограниченными и замкнутыми множествами, задаваемыми для каждого момента t с помощью ограничений вида $\varphi^k[\xi^k(t), t] \geq 0$, где φ^k — вектор ограничивающих функций для k -го объекта.

Продукцию и затраты народного хозяйства необходимо изучать на множестве функций $x(t)$, получающихся путем суммирования функций $x^k(t)$

для всех локальных объектов $x(t) = \sum_k x^k(t)$. При этом векторная

функция $x(t)$ по ряду позиций единой номенклатуры ресурсов должна удовлетворять заданным ограничениям сверху (природные и трудовые ресурсы), а по остальным позициям содержать неотрицательные составляющие (промежуточные и конечные продукты).

Введем ограничивающую векторную функцию $b(t)$ в единой номенклатуре ресурсов. Для природных и трудовых ресурсов ограничения сверху будем считать записанными в виде отрицательных величин; все остальные составляющие вектора b будем полагать равными нулю. Тогда ограничения для $x(t)$ представляются в виде $x(t) \geq b(t)$.

Народнохозяйственный критерий оптимальности U при этом является функционалом, определенным на множестве функций $x(t)$, т. е.

$$U = U[x(t)].$$

С учетом всех введенных обозначений можно составить условно-экстремальную задачу для изучения оптимального режима функционирования народного хозяйства

$$\sum_k F_k[\xi^k(t)] \geq b(t), \varphi^k[\xi^k(t), t] \geq 0, \quad (1)$$

$$U\left\{\sum_k F_k[\xi^k(t)]\right\} \rightarrow \max.$$

Неизвестными в этой задаче являются векторные функции $\xi^k(t)$, через которые могут быть выражены все другие величины $x^k(t)$, $x(t)$ и т. д.

Модель (1) принадлежит к мало изученному классу условно-экстремальных задач — задач с непрерывным аргументом, меняющимся на бесконечном интервале. Проводить полностью обоснованные исследования этой модели в настоящее время не представляется возможным.

Достаточно хорошо изученным является лишь дискретный аналог модели (1) — модель, построенная для конечного числа дискретных значений t . Однако для анализа более удобен непрерывный случай. В связи с этим дальнейшее изложение целесообразно строить применительно к непрерывной модели, но все понятия вводить по аналогии с дискретным случаем.

Такой способ рассуждений не может быть вполне строгим, но он имеет две положительные стороны. Во-первых, все сказанное будет полностью применимо к дискретному аналогу модели (1), причем для любого весьма большого интервала времени и любого весьма дробного разбиения этого интервала на дискретные отрезки. Во-вторых, сохраняется возможность для более строгого изучения непрерывного случая в будущем.

Для дальнейшего изложения необходимо принять ряд допущений в отношении модели (1). Будем полагать прежде всего, что существует единственное решение этой модели, характеризующееся некоторым максимально возможным значением критерия оптимальности и соответствующими ему векторными функциями $\xi^k(t)$, $x^k(t)$, $x(t)$, описывающими оптимальный режим функционирования экономики. Считаем также, что для

этого решения существует единственная система оптимальных цен (оценок) всех ресурсов.

Разумеется, последнее допущение имеет смысл лишь тогда, когда определено само понятие оптимальных цен применительно к непрерывной модели. Попытаемся построить это понятие по аналогии с дискретными моделями.

2. ОПТИМАЛЬНЫЕ ЦЕНЫ В НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ

По своему смыслу оптимальные цены должны представлять собой дифференциальные характеристики влияния каждого конкретного вида ресурса в тот или иной момент времени на народнохозяйственный критерий оптимальности.

Проще всего определить это понятие для тех ресурсов, которые явно входят в критерий оптимальности U модели (1), т. е. для конечных продуктов. Пусть в некоторый момент времени t_0 появилось непредвиденное дополнительное количество ε_i конечного продукта вида i сверх объема, имевшегося при ранее существовавшем оптимальном режиме функционирования народного хозяйства. Иначе говоря, скорость потребления ресурса

i вместо $\dot{x}_i(t)$ стала описываться величиной $\dot{x}_i^0(t) + \varepsilon_i \delta(t - t_0)$, где $\delta(t - t_0)$ — функция Дирака, обладающая свойствами

$$\delta(0) = +\infty; \quad \delta(t - t_0 \neq 0) = 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

Если такое увеличение конечного продукта вида i приводит к увеличению значения критерия оптимальности U на некоторую величину ΔU , то продукт i характеризуется положительной оптимальной ценой (оценкой) π_i . Эту цену можно определить как предел отношения *

$$\pi_i(t_0) = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\varepsilon_i} = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \frac{U[\dot{x}_i^0(t) + \varepsilon_i \delta(t - t_0)] - U[\dot{x}_i^0(t)]}{\varepsilon_i} \quad (2)$$

Формула (2) определяет оптимальные цены всех конечных продуктов в виде соответствующих функций времени. В целом эти цены можно характеризовать векторной функцией $\pi(t)$.

Определение оптимальных цен для ресурсов, не входящих явно в критерий U , можно провести на основе понятия оценок ограничений.

Как известно, при решении условно-экстремальных задач одновременно определяются и оценки ограничений. Эти оценки существуют лишь для определенного класса задач; кроме того, бывают случаи, когда оценки принимают не единственное значение. Однако в экономике с отсутствием или неединственностью оценок приходится сталкиваться редко, а задачи, в которых подобные ситуации возникают, обычно допустимо видоизменить так, чтобы избежать их. Поэтому при проведении ряда экономических исследований предпосылка о существовании и единственности оценок правомерна.

Применительно к первой группе ограничений модели (1) оценки можно определить следующим образом. Пусть в некоторый момент t_0 произошло увеличение одного из ресурсов на малую величину ε_i сверх ранее

* Здесь и в дальнейшем под знаком функции указываются не все ее аргументы, а лишь те, которые существенны для проводимого анализа.

имевшегося объема. Иначе говоря, правая часть соответствующего ограничения модели (1) приобрела вид $b_i(t) - \varepsilon_i \delta(t - t_0)$ *.

Если увеличение ресурса вида i в момент t_0 позволяет несколько улучшить ранее существовавший оптимальный режим функционирования и добиться увеличения критерия оптимальности U на некоторую величину ΔU , то ресурс i характеризуется положительной оценкой q_i . Эту оценку можно определить как предел отношения

$$q_i(t_0) = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\varepsilon_i} = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \frac{U[b_i(t) - \varepsilon_i \delta(t - t_0)] - U[b_i(t)]}{\varepsilon_i}. \quad (3)$$

Формула (3) определяет оценки ограничений первой группы для всех моментов времени; в целом эти оценки можно характеризовать векторной функцией $q(t)$. Они представляют собой оптимальные цены лимитированных ресурсов и промежуточных продуктов.

Аналогично можно было бы определить и оценки второй группы ограничений модели (1). Однако нелинейность ограничений затемняет их смысл как ограничений по конкретным видам ресурсов, а оценок ограничений — как оптимальных цен этих ресурсов. Поэтому целесообразно принять, что ограничения второй группы предварительно линеаризуются в окрестности оптимального режима функционирования и приводятся к размерности конкретных видов ресурсов (т. е. выражаются через станко-часы, человеко-часы, гектары и т. д.). После этого оценки второй группы ограничений определяются так же, как и оценки первой группы. Для каждого k -го локального объекта эти оценки можно характеризовать векторной функцией $q^k(t)$. Они представляют оптимальные цены ресурсов, закрепленных за соответствующими объектами.

Оценки ограничений модели (1) можно определить и по аналогии с дискретной моделью — с помощью обобщения теоремы Куна — Таккера на программирование в линейных топологических пространствах, как это было сделано в [2]. В целом векторная функция

$$P(t) = [\pi(t), q(t), q^k(t)] \quad (4)$$

может характеризовать совокупность оптимальных цен для всех видов ресурсов. Эти цены, непосредственно определяемые моделью (1), являются ценами, приведенными к одному моменту времени, и проявляют общую тенденцию к быстрому падению во времени. Чтобы получить из цен $P(t)$ тендерные цены $p(t)$, учитывающие требование стабильности денежной единицы, необходимо умножить $P(t)$ на возрастающий во времени коэффициент нормирования.

Линеаризация второй группы ограничений модели (1) позволяет провести и линеаризацию модели в целом. Для этого нужно лишь линеаризовать еще и критерий U в окрестности оптимального режима функционирования экономики; это легко сделать с помощью оптимальных цен конечных продуктов, определенных формулой (2). В результате изучение малой окрестности оптимального режима может проводиться не с помощью модели (1), а на основе эквивалентной ей линейной модели с теми же значениями оптимальных цен.

Такой подход позволяет весьма просто показать равенство прибыли нулю в условиях оптимального функционирования экономики. Как хорошо известно, в линейных условно-экстремальных задачах при соизмерении в оптимальных ценах производимая продукция и услуги всегда совпадают с

* Знак минус перед ε_i взят в соответствии со смыслом векторной функции $b(t)$ в модели (1).

полными затратами на их производство (продукция полностью «раскладывается» по использованным ресурсам). Это обстоятельство и обуславливает равенство прибыли нулю [2]. В то же время, само по себе оно не препятствует использованию прибыли в качестве локального критерия в тех случаях, когда это допустимо [4].

3. ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕЙ ФОРМЫ ЛОКАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Для конструктивного построения локального критерия на основе принципа народнохозяйственной оптимальности необходимо ввести дополнительные предпосылки относительно модели (1).

Попытаемся прежде всего отчетливо представить себе, откуда вообще возникает проблема локального критерия. Если условия развития экономики заранее полностью определены и имеется возможность абсолютно точно рассчитать оптимальный режим функционирования народного хозяйства, то проблемы локального критерия просто нет: зачем отдельно взятому хозяйственному объекту оптимизировать какой-то частный критерий, если есть возможность оптимизировать хозяйство в целом непосредственно с помощью общего критерия.

Но в том-то и дело, что подобная ситуация противоречит сущности экономики как постоянно совершенствующейся сложной системы. Основой экономического прогресса являются непрерывно возникающие новые возможности: совершенствование продукции и способов ее производства, все более экономное использование природных и трудовых ресурсов. Процесс совершенствования складывается из определенных прогрессивных сдвигов в деятельности хозяйственных объектов. Общественная польза этих изменений и должна оцениваться с помощью правильно построенного локального критерия оптимальности.

В рамках модели (1) проблема локального критерия может изучаться применительно к процессу изменения ее параметров, когда происходит перестройка с одного оптимального режима на другой. Изменяющимися параметрами модели при этом могут быть параметры векторной функции $b(t)$, операторов F_k , ограничивающих функций φ^k и критерия оптимальности U . Все эти параметры целесообразно рассматривать в виде некоторых функций времени.

Правоммерно полагать, что модель (1) в целом характеризуется конечным числом таких параметров. Будем описывать всю совокупность параметров модели* с помощью векторной функции $a(t)$, а параметры, относящиеся к локальным объектам, — с помощью векторных функций $a^k(t)$. Реализации $a(t)$, $a^k(t)$ этих векторных функций пусть относятся к исходному оптимальному режиму функционирования.

Совершенствование общественного производства можно рассматривать как процесс улучшения параметров $a_0(t)$ по сравнению с исходными значениями $a_0(t)$, а совершенствование элемента k — как процесс улучшения параметров a^k . Именно для оценки и регулирования такого типа процессов и нужен локальный критерий оптимальности.

Разумеется, изменение параметров a^k не может учесть эффект от применения передового опыта на других хозяйственных объектах. Обмен опытом должен изучаться как процесс производства определенного вида услуг, которые наряду со всей продукцией и услугами учитываются с помощью векторов x^k .

* Речь идет о параметрах, характеризующих исходные условия модели (1), в отличие от ранее введенных внутренних переменных ξ , являющихся неизвестными этой модели.

Будем считать, что решение модели (1) и соответствующие оптимальные цены существуют не только при первоначальных значениях параметров $\alpha(t)$, а и в некоторой области их изменения. Тогда значение критерия оптимальности U , получаемое в результате решения модели, может рассматриваться как функционал на множестве $\alpha(t)$

$$U = U[\alpha(t)]. \quad (5)$$

Данная запись показывает, что каждой реализации параметров модели однозначно соответствует вполне определенное значение критерия. Следовательно, если выполнен переход от исходной реализации $\alpha(t)$ к некоторой другой реализации $\bar{\alpha}(t)$, то соответствующее изменение критерия

$$\Delta U = U[\bar{\alpha}(t)] - U[\alpha(t)] \quad (6)$$

не зависит от способа перехода векторной функции $\alpha(t)$ в векторную функцию $\bar{\alpha}(t)$.

Примем, что при возможных изменениях параметров $\alpha(t)$ существуют оценки этих параметров, определенные аналогично понятию оптимальных цен ресурсов

$$\beta_i(t_0) = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\varepsilon_i} = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \frac{U[\alpha_i(t) + \varepsilon_i \delta(t - t_0)] - U[\alpha_i(t)]}{\varepsilon_i}. \quad (7)$$

Для каждой реализации $\alpha(t)$ эти оценки можно характеризовать векторной функцией $\beta(t)$. Следовательно,

$$\beta = \beta[t, \alpha(t)], \quad (8)$$

где символ β в правой части должен рассматриваться как символ оператора.

С помощью оценок β можно определять влияние малых изменений параметров α на народнохозяйственный критерий оптимальности U . Если некоторая реализация $\alpha(t)$ получила малую вариацию $\delta\alpha(t)$, то в силу определения β соответствующее приращение критерия равно

$$dU = \int_0^{\infty} \beta[t, \alpha(t)] \delta\alpha(t) dt. \quad (9)$$

Оценки β позволяют выразить и конечные приращения критерия (6). Пусть от реализации $\alpha(t)$ происходит переход к реализации $\bar{\alpha}(t)$. Введем однопараметрическое семейство реализаций, например, следующего вида

$$\alpha(t, a) = (1 - a)\alpha(t) + a\bar{\alpha}(t), \quad (10)$$

где $0 \leq a \leq 1$. Указанный переход теперь можно представить как непрерывный процесс трансформации $\alpha(t)$ в $\bar{\alpha}(t)$ через последовательность реализаций (10), проводимый путем непрерывного изменения параметра a от 0 до 1. Вариация $\delta\alpha(t)$, содержащаяся в (9), при этом будет равна

$$\delta\alpha(t) = \frac{\partial \alpha(t, a)}{\partial a} da = [\bar{\alpha}(t) - \alpha(t)] da,$$

а сама величина (9) переписывается в виде

$$dU = \int_0^{\infty} \beta(t, a) \frac{\partial \alpha(t, a)}{\partial a} da dt.$$

Чтобы получить конечное приращение критерия U при переходе от $\overset{0}{\alpha}(t)$ к $\bar{\alpha}(t)$, нужно проинтегрировать dU по параметру a . В результате получаем

$$\Delta U = \int_0^1 da \int_0^\infty \beta(t, a) \frac{\partial \alpha(t, a)}{\partial a} dt.$$

Данная формула является лишь другой записью (6). Следовательно, она должна приводить к одному и тому же результату независимо от способа перехода $\overset{0}{\alpha}(t)$ в $\bar{\alpha}(t)$, т. е. независимо от способа параметризации семейства $\alpha(t, a)$. Поэтому полученную формулу можно обобщить в виде

$$\Delta U = \int \int_{(t, a)} \beta(t, a) \frac{\partial \alpha(t, a)}{\partial a} dadt,$$

где (t, a) — двумерная область возможных изменений времени t и произвольного параметра a .

Вычисление ΔU с помощью записанной формулы должно состоять, очевидно, из следующих операций: 1) процесс перехода $\overset{0}{\alpha}(t)$ в $\bar{\alpha}(t)$ представляем с помощью одного параметра a любым из возможных способов; 2) выражаем β и $\frac{\partial \alpha}{\partial a}$ через t и a ; 3) вычисляем двойной интеграл по всей области возможных изменений t и a .

Рассмотрим теперь процесс совершенствования отдельно взятого локального объекта. Этот процесс должен выразиться, очевидно, в тех или иных улучшениях параметров объекта α^k . Для оценки общественной пользы этих улучшений нужно уметь определять те приращения критерия U , которые получаются в результате изменения параметров α^k при условии неизменности всех прочих параметров модели (1).

Пусть от реализации $\overset{0}{\alpha}^k(t)$ вектор-функция параметров k -го объекта перешла к реализации $\bar{\alpha}^k(t)$; все прочие составляющие векторной функции $\alpha(t)$ при этом остались прежними. Для вычисления соответствующего приращения критерия U можно, очевидно, воспользоваться полученной выше формулой, подставив в нее вместо $\alpha(t)$ вектор-функцию параметров k -го элемента $\alpha^k(t)$. Тогда получаем

$$\Delta_k U = \int \int_{(t, a)} \beta^k(t, a) \frac{\partial \alpha^k(t, a)}{\partial a} dadt, \quad (11)$$

где a — по-прежнему произвольный параметр, $\beta^k(t)$ — вектор-функция оценок параметров k -го объекта.

Записанный двойной интеграл дает полную оценку процесса совершенствования локального объекта с точки зрения общего народнохозяйственного критерия оптимальности. Не вызывает сомнений то обстоятельство, что локальный критерий тем более совершенен, чем более точно он воспроизводит величину $\Delta_k U$.

Теоретически нет никаких препятствий к тому, чтобы построить локальный критерий, полностью тождественный $\Delta_k U$

$$W = \int \int_{(t, a)} \beta^k(t, a) \frac{\partial \alpha^k(t, a)}{\partial a} dadt. \quad (12)$$

Ясно, что это наилучший локальный критерий, поскольку его изменения не отличаются от соответствующих изменений общего критерия. Локальный критерий (12) можно назвать *народнохозяйственной эффективностью* совершенствования объекта.

Критерий W определен с точностью до постоянного слагаемого, зависящего от выбора исходной реализации параметров $\alpha(t)$. Но это обстоятельство не может препятствовать использованию критерия W ; оно скорее создает некоторые удобства в его применении.

4. ПОСТРОЕНИЕ ЛОКАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ В ФУНКЦИИ ВНЕШНИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАБОТЫ ОБЪЕКТА

Формула (12) дает точное выражение для локального критерия народнохозяйственной эффективности. Но ею можно воспользоваться лишь при наличии весьма обширной информации: об изменении первичных параметров элемента, об оценках параметров, о зависимости оценок от значений самих параметров и т. д. Поэтому записанная формула представляет главным образом теоретический интерес.

Для практических целей нужны иные формы записи локального критерия W . Необходимо прежде всего уйти от рассмотрения первичных параметров хозяйственных объектов и выразить W через производимые и потребляемые ресурсы. Тем самым будет получена возможность оценивать общественную пользу совершенствования локальных объектов по изменениям *внешних показателей* его работы, характеризующих увеличение продукции и относительное сокращение затрат, а не на основе анализа внутренних процессов.

Применительно к объекту k можно провести построение величины $d_k U$, аналогичной (9), и одновременно выразить $d_k U$ через внешние изменения в функционировании элемента.

Пусть некоторая реализация параметров объекта $\alpha^k(t)$ получила малую вариацию $\delta\alpha^k(t)$, а все другие параметры модели (1) остались неизменными. Тогда соответствующее приращение критерия составит

$$d_k U = \int_0^{\infty} \beta^k[t, \alpha^k(t)] \delta\alpha^k(t) dt.$$

Вариация $\delta\alpha^k(t)$ вызовет, очевидно, некоторое изменение продукции и затрат хозяйственного объекта k , которое можно характеризовать вариацией $\delta x^k(t)$ векторной функции $x^k(t)$. Влияние вариации $\delta\alpha^k(t)$ на народнохозяйственный критерий оптимальности можно выразить с помощью оптимальных цен ресурсов $P(t)$. В силу определения $P(t)$, данного в предыдущем разделе, можно записать

$$d_k^* U = \int_0^{\infty} P[t, \alpha^k(t)] \delta x^k[t, \alpha^k(t), d\alpha^k(t)] dt,$$

где $P[t, \alpha^k(t)]$ — вектор-функция приведенных оптимальных цен ресурсов, соответствующая реализации $\alpha^k(t)$ параметров элемента k ; $\delta x^k[t, \alpha^k(t), d\alpha^k(t)]$ — вектор-функция вариации $x^k(t)$, соответствующая реализации $\alpha^k(t)$ и ее вариации $d\alpha^k(t)$.

По своему смыслу величины $d_k U$ и $d_k^* U$ равны друг другу, ибо представляют собой результат лишь разных способов учета влияния первичных изменений $\delta\alpha^k(t)$ на критерий U . Всякое изменение первичных параметров элемента k может повлиять на U лишь через соответствующее изменение вектор-функции $\alpha^k(t)$, так как никаких других связей между $\alpha^k(t)$ и U не существует.

Значит, все новое, что возникает внутри объекта и может быть учтено через изменение его первичных параметров, неизбежно должно проявиться во внешних показателях его деятельности и может быть учтено

через изменение вектора x^h . Наоборот, все те изменения первичных параметров, которые не улавливаются вектором x^h , не могут повлиять на народнохозяйственный критерий оптимальности и не представляют никакой пользы для общества в целом.

Следовательно, можно записать

$$\int_0^\infty \beta^h[t, \alpha^h(t)] \delta \alpha^h(t) dt = \int_0^\infty P[t, \alpha^h(t)] \delta x^h[t, \alpha^h(t), \delta \alpha^h(t)] dt. \quad (13)$$

Характерной особенностью этого равенства является его интегральный характер. Рассмотренные два различных способа учета влияния первичных процессов приводят к одному и тому же результату лишь в интегральном смысле. Однако между моментом проведения того или иного усовершенствования и моментом, когда проявится его влияние на вектор x^h , может пройти некоторое время. Значит, заменяя левую часть равенства (13) его правой частью, мы сразу встаем на ту точку зрения, что об общественной пользе улучшений можно судить лишь в той мере, в какой они реализуются во внешних показателях работы элемента.

Преимущества и недостатки такой точки зрения очевидны. Но отказаться от нее — значит отказаться от построения локального критерия на основе внешних показателей и ограничиться использованием лишь формулы (12).

Равенство (13) позволяет видоизменить формулу (11) для конечных приращений критерия U . Пусть от реализации $\alpha^h(t)$ происходит переход к реализации $\bar{\alpha}^h(t)$ и соответственно от реализации $\alpha^h(t)$ к реализации $\bar{x}^h(t)$. Любым возможным способом строим однопараметрическое семейство реализаций $\alpha^h(t, a)$ и соответствующее ему семейство $x^h(t, a)$. Выражаем через параметр a величины α^h , $\delta \alpha^h$ и затем P , δx^h . После этого левая и правая части равенства (13) будут функциями параметра a . Интегрирование левой части по параметру a вновь приведет к величине (11), интегрирование правой части — к равной ей величине

$$\Delta_h U = \int_{(t, a)} P(t, a) \frac{\partial x^h(t, a)}{\partial a} da dt. \quad (14)$$

Данная формула и является преобразованной формулой (11). Параметр a в этой формуле не обязательно вводить путем построения однопараметрического семейства $\alpha^h(t, a)$. Двойной интеграл (14), как и (11), не зависит от способа перехода $\alpha^h(t)$ в $\bar{\alpha}^h(t)$ и соответственно от способа перехода $x^h(t)$ в $\bar{x}^h(t)$. Таким образом, можно применять любой способ параметризации и проводить непосредственно параметризацию семейства $x^h(t, a)$, а не семейства $\alpha^h(t, a)$.

Вычисляя (14), можно забыть о том, что изменения x^h обусловлены улучшением первичных параметров α^h . Из предыдущего изложения важно сохранить лишь вывод о независимости интеграла (14) от способа перехода $\alpha^h(t)$ в $\bar{\alpha}^h(t)$, т. е. от пути интегрирования.

В соответствии с (14) локальный критерий народнохозяйственной эффективности W переписывается в виде

$$W = \int_{Q_n} \int_{(t, a)} P(t, a) \frac{\partial x^h(t, a)}{\partial a} da dt. \quad (15)$$

Вычисление (14) и (15) должно состоять, очевидно, из следующих операций: 1) процесс перехода $x^h(t)$ в $\bar{x}^h(t)$ представляем с помощью од-

ного параметра a любым из возможных способов; 2) выражаем P и $\partial x^k / \partial a$ через t и a ; 3) вычисляем двойной интеграл по всей области возможных изменений t и a .

Как и (12), величина (15) определена лишь с точностью до постоянного слагаемого, зависящего от выбора исходной реализации $\overset{0}{x}(t)$.

Формула (15) для локального критерия народнохозяйственной эффективности W значительно более удобна, чем (12). Возможность использования внешних показателей функционирования объекта и оптимальных цен ресурсов, а также свобода действий в отношении выбора пути интегрирования создают предпосылки для ряда приложений формулы (15).

Итак, тема данной статьи исчерпана, и общие формулы для локального критерия народнохозяйственной эффективности получены.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Пугачев. Проблемы оптимальности в народном хозяйстве. Коммунист, 1966, № 3.
2. В. Ф. Пугачев. Локальный критерий и стимулирование работников в оптимальной экономической системе. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, вып. 5.
3. В. Ф. Пугачев. Локальный критерий народнохозяйственной эффективности и решение частных задач оптимизации. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 5.
4. В. Ф. Пугачев. Оптимизация планирования (теоретические проблемы). М., «Экономика», 1968.

Поступила в редакцию
12 XII 1968