

О КАЧЕСТВЕННОМ АНАЛИЗЕ УСЛОВИЙ СРАВНИТЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ КАПИТАЛОВЛОЖЕНИЙ*

Д. А. АРЗАМАСЦЕВ

(Свердловск)

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Имеется большое число работ, посвященных задаче сравнительной эффективности капиталовложений. Обоснованная в них различными способами формула расчетных затрат

$$Z = C + E_{HK} \quad (1)$$

получила повсеместное распространение. Проведем ее дополнительный качественный анализ. Для этой цели примем за основу математическую модель, близкую к [1], но с некоторыми изменениями и дополнениями.

1. Образование и реализация капиталовложений представляется в виде многоэтапного процесса внутри некоторого отрезка времени T , который делится на $N\{1, 2, \dots, n, \dots, N\}$ этапов времени длительностью t_n каждый и считается, что: а) внутри каждого этапа n создаются фонды капиталовложений в размере K_n ; б) реализация K_n происходит дискретно и полностью на границе между этапами n и $n+1$, причем соответствующий им выпуск продукции начинается сразу после этой реализации и в полном размере; в) на этапе n число отраслей равно $A_n\{1, 2, \dots, i, \dots, A_n\}$, число вновь вводимых объектов каждой отрасли i равно $M_{ni}\{1, 2, \dots, j, \dots, M_{ni}\}$, а общее число всех вводимых объектов равно Q_n .

2. Полученные на этапе $n-1$ капиталовложения K_{n-1} делятся на Q_n частей, каждая из которых есть капиталовложения $K_{n-1,j}$ для создания объекта j . Считается, что всегда можно подобрать такие объекты, для которых удовлетворяется равенство

$$\sum_{j=1}^{Q_n} K_{n-1,j} - K_{n-1} = 0. \quad (2)$$

Для создания объектов Q_1 в начале первого этапа задана величина капиталовложений $K_0 > 0$. Расширение любого действующего объекта заменяется некоторым эквивалентным новым объектом.

3. Капиталовложения K_n составляют заданную часть γ_n народного дохода P_n , созданного на этапе n на всех действующих объектах

$$K_n = \gamma_n P_n; \quad (3)$$

$$P_n = t_n \left(\sum_{\tau=1}^n D_{\tau n} + D_{0n} \right), \quad \tau = 1, 2, \dots, n; \quad (4)$$

$$D_{\tau n} = \sum_{j=1}^{Q_{\tau}} D_{\tau j n}, \quad (5)$$

* В порядке постановки вопроса.

где τ — один из номеров этапов от начала срока T до данного этапа n включительно; $D_{\tau n}$ — доход на этапе n в единицу времени от объектов, созданных в начале этапа τ ; $D_{\tau j n}$ — то же, но лишь от одного объекта j ; D_{0n} — доход на этапе n в единицу времени от объектов, созданных до начала срока T . Условимся, что при совпадении номеров n и τ один из этих индексов будем опускать.

4. Между выпусками продукции в единицу времени W_n и W_{ni} соответственно всех объектов Q_n и объектов M_{ni} отрасли задается только пропорция * a_{ni}

$$W_{ni} = a_{ni} W_n, \quad i = 1, 2, \dots, A_n. \quad (6)$$

Заменив W_{ni} и W_n через W_{nj} — выпуски продукции в единицу времени на каждом объекте j из числа M_{ni} , получим для каждой отрасли в развернутом виде

$$\sum_{j=1}^{M_{ni}} W_{nj} - a_{ni} \sum_{j=1}^{Q_n} W_{nj} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, A_n. \quad (7)$$

Выбранные объекты Q_n обладают тем свойством, что значения W_n , W_{ni} , W_{nj} заранее не фиксируются и включаются в число оптимизируемых параметров. Иначе говоря, считается, что всегда можно подобрать такие объекты Q_n , выпуски продукции и капиталовложения которых удовлетворяют условиям оптимальности. Формула (7) записана в относительных единицах (при соответствующем выборе системы базисных единиц), что освобождает от необходимости учитывать различные размерности различных именованных величин. Это же относится и ко всем другим используемым величинам — капиталовложениям, доходам и т. д. во всех других формулах.

5. Доход D_n , созданный в единицу времени на объектах Q_n , обладает следующими свойствами: а) является гладкой неубывающей функцией K_{n-1} на всем требуемом диапазоне K_{n-1} при любом требуемом, но фиксированном выпуске продукции W_n на этих объектах

$$\partial D_n / \partial K_{n-1} \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

Считается, что для всех объектов функции $D_{nj}(K_{nj})$ являются гладкими, но для некоторых из них не обязательно неубывающими на всем диапазоне изменения K_{nj} . Однако принимается, что последнее не приводит к нарушению условия (8) для совокупности объектов Q_n ; б) доход D_n при совместно фиксированных K_{n-1} и W_n считается постоянным на каждом этапе, но при переходе от этапа к этапу может изменяться в одной и той же известной пропорции β . Обозначив D_n на этапе $r > n$ как D_{nr} , имеем

$$D_{nr} = \beta D_{n, r-1}, \quad \beta = \text{const}, \quad r = n + 1, \dots, N. \quad (9)$$

Считается, что условие (9) распространяется также на все составные части D_n , созданные на отдельных объектах j .

6. Для удобства качественного анализа принимается, что K_{nj} и W_{nj} непрерывны и все функции от них дифференцируемы. В дальнейшем рассматривается влияние дискретности капиталовложений на функцию оптимальности.

7. Принимается, что: а) создаваемые в народном хозяйстве фонды имеют всегда необходимый состав для их распределения между объекта-

* Выбор пропорций между выпусками продукции отраслей зависит от многих параметров развивающегося народного хозяйства. Этот вопрос не анализируется, что, вообще говоря, ограничивает возможности модели.

ми; б) капиталовложения в объекты удовлетворяют условию достаточной близости эффективности.

Первое условие трактуется как отсутствие каких-либо препятствий со стороны полученного состава фондов их реализации в любых требуемых по условиям оптимальности размерах на любом создаваемом объекте вне зависимости от принадлежности объекта к той или иной отрасли.

Второе условие означает, что подлежащую реализации величину K_{n-1} всегда можно так распределить между объектами Q_n , что эффективности E_j всех капиталовложений $K_{n-1, j}$ будут равны между собой и при этом удовлетворяются уравнения связи (2) и (7). В дальнейшем рассматривается влияние нарушения этих условий на оптимальное решение.

2. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Сформулируем задачу оптимизации как отыскание условий распределения капиталовложений и выпусков продукции внутри срока T , доставляющих максимум народному доходу D_Σ за этот же срок, где

$$D_\Sigma = \sum_{n=1}^N P_n. \quad (10)$$

Для решения задачи необходимо D_Σ и P_n представить в виде функций капиталовложений и выпусков продукции. Сделаем это применительно к их составным частям D_{nj} . С некоторым отлнчением от [2, 3] представим доход D_{nj} в виде функции $K_{n-1, j}$ и ресурсов труда T_{nj} , используемых на этапе n в объекте j

$$D_{nj} = R_{nj}(K_{n-1, j}, T_{nj}), \quad (11)$$

где R_{nj} базируется на совокупности фиксированных способов использования $K_{n-1, j}$ и T_{nj} , отвечающих конкретным условиям производства на данном объекте j при данных $K_{n-1, j}$ и T_{nj} . Иначе говоря, здесь не используется представление о том, что на каждом объекте имеет место оптимальный технологический способ, а лишь фиксируется тот способ, который свойствен данному объекту и будет на нем осуществлен. Эта фиксация позволяет считать, что каждому сочетанию $K_{n-1, j}$, T_{nj} соответствует единственное значение D_{nj} и единственное значение W_{nj} , что позволяет записать однозначно определенную функцию

$$W_{nj} = W_{nj}(K_{n-1, j}, T_{nj}). \quad (12)$$

Поступая формально, преобразуем формулу (12)

$$T_{nj} = T_{nj}(K_{n-1, j}, W_{nj}). \quad (13)$$

Подставив T_{nj} из (13) в (11), получим искомую функцию

$$D_{nj} = D_{nj}(K_{n-1, j}, W_{nj}). \quad (14)$$

Обращаясь к формуле (4), замечаем, что P_n зависит от всех $D_{\tau n}$, полученных на этапе n . Так как согласно (5) и (14) каждый $D_{\tau n}$ зависит от своих $K_{\tau-1}$ и W_τ и их распределения между объектами, то P_n оказывается зависящим от распределений и значений всех $K_{\tau-1}$, W_τ для всех предшествующих этапов $\tau = 1, 2, \dots, n$. Для устранения возникающих в связи с этим трудностей выполним следующие преобразования.

Величину $D_{\tau n}$ выразим через D_τ — доход на этапе τ от этих же пред-

приятный. Тогда из формул (9) и (4) получим

$$D_{\tau n} = \beta^{n-\tau} D_{\tau}, \quad (15)$$

$$P_n = t_n \sum_{\tau=1}^n \beta^{n-\tau} D_{\tau} + t_n \beta^{n-1} D_{01}, \quad (16)$$

где D_{01} — заданный и не оптимизируемый доход на первом этапе от объектов, созданных до начала срока T . Подставив (16) в (10), запишем

$$D_{\Sigma} = \sum_{n=1}^N t_n \sum_{\tau=1}^n \beta^{n-\tau} D_{\tau} = \sum_{n=1}^N t_n \beta^{n-1} (D_1 + D_{01}) + \sum_{n=2}^N t_n \beta^{n-2} D_2 + \dots + t_N D_N.$$

Обозначив

$$\sum_{n=\tau}^N t_n \beta^{n-\tau} = a_{\tau}, \quad (17)$$

где a_{τ} — известный и постоянный коэффициент, так как β и все t_n известны заранее, получим

$$D_{\Sigma} = \sum_{\tau=1}^N a_{\tau} D_{\tau} + a_1 D_{01}. \quad (18)$$

Переход от (10) к (18) означает замену суммирования по этапам n длительностью t_n суммированием по шагам τ длительностью a_{τ} , причем в начале каждого шага τ имеется только доход D_{τ} . На рис. 1 показана эта замена при $\beta = 1$.

Формула (18) удобнее формулы (10), так как каждый член правой части D_{τ} связан с прошлым развитием системы только через одну величину $K_{\tau-1}$ и не зависит от того, каким образом была получена величина $K_{\tau-1}$. Это обстоятельство наряду с аддитивностью D_{Σ} позволяет упростить задачу, используя метод динамического программирования [4, 5].

Обозначим совокупность условий распределения $K_{\tau-1}$ между объектами Q_{τ} в виде некоторой функции управления φ_{τ} на шаге τ . Тогда измененная формулировка задачи будет: определить такие функции оптимального управления φ_{τ}^0 на всех шагах τ , которые для совокупности всех вводимых объектов доставляют максимум доходу D_{Σ} за срок T

$$\max D_{\Sigma} = \left(\max \sum_{\tau=1}^N a_{\tau} D_{\tau} + a_1 D_{01} \right) \sim \varphi^0(\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_{\tau}^0, \dots, \varphi_N^0).$$

Принятое в п. 5 условие неубывания всех D_n наряду со свойством аддитивности D_{Σ} приводит к вырожденной задаче динамического программирования: максимум D_{Σ} равен сумме отдельных максимумов $a_{\tau} D_{\tau}$ (см. приложение) плюс неизменяемая величина $a_1 D_{01}$

$$\max D_{\Sigma} = \sum_{\tau=1}^N a_{\tau} \max D_{\tau} + a_1 D_{01}. \quad (19)$$

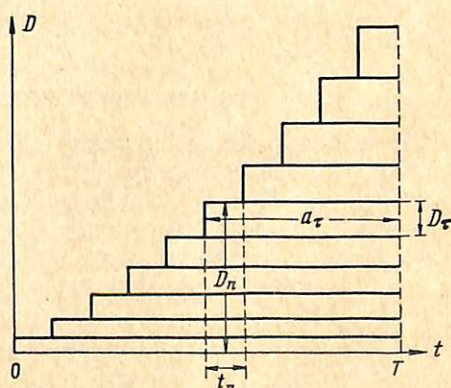


Рис. 1. Замена суммирования по этапам n на суммирование по шагам τ при $\beta = 1$

Кроме того, используя формулы (3) и (16), можно записать

$$\max K_n = \gamma_n \max P_n = \gamma_n t_n \sum_{\tau=1}^n \beta^{n-\tau} \max D_\tau + \gamma_n t_n \beta^{n-1} D_{01}.$$

Следовательно, условия отыскания $\max D_\Sigma$, $\max P_n$ и $\max K_n$ совпадают и сводятся к определению условий, доставляющих максимум D_τ или, что то же самое, максимум D_n на каждом этапе n в отдельности. Для этой цели с помощью формулы (5) образуем для какого-либо одного этапа функцию Лагранжа с учетом уравнений связи (2) и (7) и опустив, ради простоты, индексы номера этапа

$$H = \sum_{j=1}^Q D_j + \lambda \left(\sum_{j=1}^Q K_j - K \right) + \sum_{i=1}^A \mu_i \left(\sum_{j=1}^{M_i} W_j - a_i \sum_{j=1}^Q W_j \right), \quad (20)$$

где λ , μ_i — множители Лагранжа, $i = 1, 2, \dots, A$.

После взятия частных производных по всем независимым переменным K_j и W_j получим искомые условия оптимальности

$$(\partial D_j / \partial K_j) + \lambda = 0; \quad (21)$$

$$(\partial D_j / \partial W_j) + \mu_{ij} - \sum_{i=1}^A \mu_i a_i = 0, \quad (22)$$

где через μ_{ij} обозначен μ_i той отрасли i , в которую входит данный объект j .

3. АНАЛИЗ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Идеализированные условия (21) и (22) получены при отвлечении от многих реально существующих обстоятельств. Так, здесь не учитываются дискретности K_j и W_j , какие-либо ограничения величин K_j и W_j и ограниченность вариаций выпусками продукции объектами и т. д. Последнее прежде всего приводит к затруднениям по использованию условия (22). Это условие, вообще говоря, указывает, что не всякий предварительно выбранный набор W_j , удовлетворяющий уравнению связи (7), является оптимальным. Однако реализация этого тривиального положения по меньшей мере проблематична, так как требует совместной оценки всех объектов, что на современном уровне планирования ожидать сомнительно. Из этого, видимо, все же не вытекает, что условие (22) вообще не нужно иметь в виду. Во всяком случае оно указывает, что если имеется какая-либо возможность вариации выпусками продукции в пределах удовлетворения условия (21) и при обеспечении заданной пропорции a_i , то пренебрегать такой вариацией не следует. Ограничившись только этими общими соображениями, сосредоточим главное внимание на условии (21) при заданных W_j , как имеющем большой практический интерес. Разумеется, использование условия (21) в отрыве от условия (22) не может гарантировать действительно оптимального решения в полном смысле и поэтому речь идет лишь о субоптимальных решениях, хотя и удовлетворяющих уравнениям связи (2) и (7).

1. Коэффициент λ в (21) можно заменить коэффициентом эффективности капиталовложений по народному доходу ED

$$\partial D_j / \partial K_j = E_D. \quad (21a)$$

Существует мнение, что этот коэффициент значительно больше коэффициента эффективности капиталовложений по экономии на себестоимо-

сти E_H в формуле (1). Действительно, если подсчитывать E_D и E_H как отношение к приросту капиталовложений народного хозяйства соответственно всего прироста народного дохода и всей экономии на себестоимости, то E_D и E_H будут существенно различны [6]. Однако смысл коэффициента E_D в (21а) иной, так как при его определении должна учитываться лишь часть дохода, которая зависит от достаточно малого изменения капиталовложений при фиксации прочих условий [7]. Аналогичное понятие имеет и коэффициент E_H в формуле (1), который подчиняется условию оптимальности в расчетах по экономии на себестоимости C_j [1, 8].

$$-\partial C_j / \partial K_j = E_H. \quad (21б)$$

Рассмотрим соотношение между E_D и E_H , для чего D_j представим в виде $D_j = Z_j - C_j = s_i W_j - C_j$, где s_i — общественно необходимая стоимость единицы продукции. Так как s_i определяется деятельностью всей совокупности объектов народного хозяйства и поэтому крайне мало зависит от параметров одного объекта, то, пренебрегая величинами второго порядка малости, можно принять

$$\partial s_i / \partial K_j = 0. \quad (23)$$

Имея в виду, что W_j и K_j независимые переменные, получим

$$\partial D_j / \partial K_j = -\partial C_j / \partial K_j, \quad (23а)$$

откуда для оптимального решения $E_D = E_H$.

Таким образом, условия (21а) и (21б) тождественны и формула расчетных затрат (1) является следствием любого из них.

2. В настоящее время имеются два мнения относительно формулы (1): а) для разных отраслей i следует принимать разные E_{Hi} [6]; б) для всех отраслей следует принимать единый E_H [9]. Главным обоснованием по выбору различных E_{Hi} считается фактически наблюдаемое существенное расхождение между средними коэффициентами эффективностей отраслей, подсчитанными как отношение всей экономии на себестоимости к приросту капиталовложений. Поэтому считается, что введение единого E_H вызвало бы совершенно недопустимую перестройку состава фондов, ресурсов труда и т. д. [6].

Предварительно заметим, что задача поиска оптимальных вариантов капиталовложений K_j для выбранных выпусков продукции W_j означает, что в качестве таких вариантов могут рассматриваться как различные исполнения одного и того же объекта, так и совершенно разные объекты, лишь бы каждый из них обеспечивал выпуск продукции W_j (полагая, что все другие условия тождества эффекта [4] соблюдаются). Именно этот смысл вкладывается в понятие вариантов K_j объекта j .

Формулы (21), (21а) и (21б) предполагают выполнение обоих условий п. 7 модели о составе фондов и близости эффективностей. Приближение модели к оригиналу — народному хозяйству — требует, чтобы задача решалась при отказе от полного удовлетворения этих условий.

Первоначально примем, что первое условие удовлетворяется полностью, а второе — лишь частично. Без потери общности рассмотрим задачу распределения капиталовложений K_0 между тремя объектами ($j = 1, 2, 3$) с выпусками продукции W_j и характеристиками $E_j(K_j)$, причем K_j имеют ограничения, которые реально всегда существуют. На рис. 2 показаны характеристики $E_j(K_j)$ и характеристика совокупности объектов $E(K)$, состоящая из различных участков: а) на участке BC соблюдается условие близости для всех трех объектов; б) на участках BB' и CC' это условие соблюдается только для двух объектов (соответственно для объектов 2, 3 и 1, 2); в) на участках $B'A$ и $C'D$ условие близости отсутствует полностью.

Из представленных на рис. 2 характеристик ясно, что если $K' \leq K_0 \leq K''$, то применимо условие (21) и оптимальное распределение K_0 будет при равенстве E_j всех объектов. Формула (1) для отыскания оптимальных K_j каждого объекта будет иметь общий E_H для всех объектов.

Теперь рассмотрим случай распределения K_0 при $K_{\min} \leq K < K'$, где условие близости частично или полностью нарушено. На этом интервале оптимальное распределение подчиняется следующим требованиям:

а) на участке BB' (включая точку B')

$$K_1 = K_{1\min}; \quad E_1 = E_{1\max}; \quad K_2 + K_3 = K_0 - K_{1\min}; \quad E_2 = E_3 = E; \quad (24)$$

б) на участке $B'A$ (исключая точку B')

$$K_1 = K_{1\min}; \quad E_1 = E_{1\max}; \quad K_2 = K_{2\min}; \quad E_2 = E_{2\max};$$

$$K_3 = K_0 - (K_{1\min} + K_{2\min}); \quad E_3 = E > E_{2\max}. \quad (25)$$

Формула (1) при условиях (24) обеспечивает правильное решение при едином нормативном коэффициенте E_H для объектов 2 и 3 и другом нормативном коэффициенте $E_{H1} = E_{1\max}$ для объекта 1. Казалось бы, под-

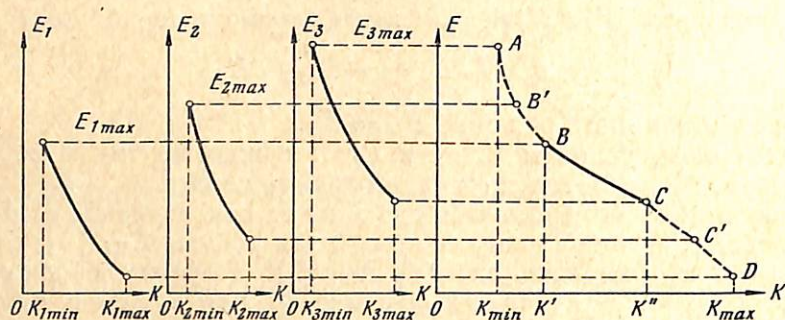


Рис. 2. Распределение капиталовложений между объектами при ограничениях по капиталовложениям объектов

тверждается тезис о различных нормативных коэффициентах. Однако это не единственная возможность. Значение $K_{1\min}$ будет обеспечено не только при $E_{H1} = E_{1\max}$, но и при $E_{H1} > E_{1\max}$. Следовательно, решение не пострадает, если E_{H1} увеличить и принять равным E_H для объектов 2 и 3, хотя фактический коэффициент эффективности принятого варианта объекта 1 будет меньше, чем у объектов 2 и 3. Подобные обстоятельства имеют место и при условии (25): здесь также можно в формуле (1) для всех объектов использовать единый нормативный коэффициент E_H , соответствующий эффективности капиталовложений принятого варианта объекта 3, когда $K_3 = K_0 - (K_{1\min} + K_{2\min})$.

Если теперь обратиться к случаю, когда $K'' < K_0 \leq K_{\max}$, то можно заметить, что идея распределения капиталовложений в этом случае принципиально повторяет рассмотренную выше, но с использованием максимальных капиталовложений и минимальных эффективностей.

Таким образом, изложенные соображения позволяют сделать два вывода: 1) нарушение условий близости и появление ограничений капиталовложений не приводит к обязательному выбору в формуле (1) различных E_H для разных объектов на всем отрезке $K_{\min} \leq K_0 \leq K_{\max}$, хотя фактические эффективности принятых вариантов могут быть различными; 2) оптимальное решение при помощи формулы (1) может быть обеспечено при едином для всех объектов нормативном коэффициенте E_H , отвечающем исходному значению K_0 по характеристике отрасли $E(K)$. Очевидно, что

эти выводы без оговорок обобщаются не только на любое число объектов отрасли, но и имеют полную силу для распределения капиталовложений между отраслями.

Выше было принято, что условие о необходимом составе фондов обеспечено. Но если считать, что оно при каких-то значениях нарушается, то этот факт легко может быть учтен ограничениями вида $K_{j \min} \leq K_j \leq K_{j \max}$.

Следовательно, в примере уже была предусмотрена возможность частичного нарушения условия о необходимом составе фондов.

Таким образом, во всех возможных случаях поиска оптимальных капиталовложений при помощи формулы расчетных затрат (1) допустимо и целесообразно использовать единый нормативный коэффициент E_N для всех объектов всех отраслей. При этом фактически получаемые эффективности принятых вариантов капиталовложений некоторых объектов в общем случае будут отличаться от E_N , если капиталовложения этих объектов оказываются предельными. Несовпадение фактических эффективностей с нормативной в реальных условиях при оптимальном распределении имеет место не только для предельных капиталовложений. Выше мы имели дело с непрерывными характеристиками. В действительности обычно варианты капиталовложений дискретны. Поэтому фактические эффективности принятых вариантов находятся ближе к нормативной по сравнению с эффективностями отвергнутых вариантов, но не обязательно ей равны. В этом случае E_N есть некоторая средняя величина, вокруг которой при помощи формулы расчетных затрат группируются эффективности принятых вариантов с отклонениями в обе стороны.

Подчеркнем еще раз, что здесь под эффективностью понимается предел отношения прироста дохода к приросту капиталовложений при стремлении последнего к нулю. Этот предел нельзя отождествлять, как справедливо отмечено, например, в [7], с так называемой средней эффективностью полных капиталовложений, которая равна отношению соответствующей части дохода к этим капиталовложениям. Поэтому нормативная и средняя эффективности — разные понятия. Попутно отметим, что когда рассматривается вопрос о целесообразных дополнительных дискретных вложениях [1], то эффективность таких вложений для принятого варианта также не обязательно равна нормативной, полученной для непрерывной модели: первая может оказаться равна, больше или меньше второй.

3. Объективный метод отыскания нормативного коэффициента для однопродуктовой модели, изложенный в [3], может быть использован и в рассматриваемой модели, предполагающей наличие нескольких отраслей и ограничений по капиталовложениям.

Считая, что $D_\tau(K_{\tau-1}, T_\tau)$ базируется на оптимальных решениях, согласно [3] имеем

$$\eta_0 = \partial D_\tau / \partial K_{\tau-1}, \quad (26)$$

где $K_{\tau-1}$ распределены оптимально. Рассмотрим общий случай при непрерывных характеристиках $E_j(K_j)$ и нарушении условий п. 7 модели. Из-за ограничений некоторые K_j имеют E_j , отличающиеся от E_N

$$\partial D_j / \partial K_j = E_N - \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, R; \quad \varepsilon_j \neq 0. \quad (27)$$

Для остальных объектов $\varepsilon_j = 0$ и поэтому

$$\partial D_j / \partial K_j = E_N, \quad j = R + 1, R + 2, \dots, Q_\tau. \quad (28)$$

Пусть капиталовложения $K_{\tau-1}$ получили «не слишком большой» [9] прирост $\Delta K_{\tau-1}$ и требуется найти, как будет при этом связана с E_N произ-

водная $\partial D_\tau / \partial K_{\tau-1}$ за счет этого прироста $\Delta K_{\tau-1}$. Требуя, чтобы $\Delta K_{\tau-1}$ был распределен между объектами оптимально, установим, что он дает приращение ΔK_j только на объектах $j = R + 1, R + 2, \dots, Q_\tau$ при $\varepsilon_j = 0$.

Действительно, реализация $\Delta K_{\tau-1}$ на объектах, у которых $\varepsilon_j < 0$, невозможна, так как эти объекты уже имеют максимально допустимые капиталовложения. Приращения ΔK_j на объектах, имеющих $\varepsilon_j > 0$, недопустимы из условия оптимальности, так как они имеют меньшую эффективность по сравнению с объектами, для которых $\varepsilon_j = 0$. При отрицательном $\Delta K_{\tau-1}$ будет иметь место аналогичная картина: $\Delta K_{\tau-1}$ не распределяется на объектах, где $\varepsilon_j \neq 0$. Тогда

$$\Delta K_{\tau-1} = \sum_{j=R+1}^{Q_\tau} \Delta K_j \text{ и поэтому } \Delta D_\tau = \sum_{j=R+1}^{Q_\tau} \Delta D_j.$$

Приняв $\lim \Delta K_{\tau-1} = 0$, после небольших преобразований получим

$$\eta_\alpha = \partial D_\tau / \partial K_{\tau-1} = \partial D_j / \partial K_j = E_H, \quad j = R + 1, R + 2, \dots, Q_\tau. \quad (29)$$

Формула (29) учитывает главные особенности не только отраслей, но и отдельных объектов, проявляющиеся в различных эффективностях объектов и ограничениях по капиталовложениям. Она не требует выполнения гипотезы о «мгновенной превращаемости фондов» [3], так как при получении этой формулы предусмотрена даже более широкая возможность нарушения условий п. 7 модели. Таким образом, определение нормативного коэффициента по глобальным показателям D_τ и $K_{\tau-1}$ методом [3] оказывается приемлемым в довольно общем случае, лишь бы $K_{\tau-1}$ были распределены оптимально.

Теперь рассмотрим общие соображения о влиянии дискретности капиталовложений вариантов, которая выше не была учтена. В этом случае появляются некоторые разницы $\delta_j \equiv 0$ между нормативным коэффициентом и фактическими коэффициентами эффективности принятых вариантов, и вместо (28) следует записать

$$\partial D_j / \partial K_j = E_H - \delta_j, \quad j = R + 1, R + 2, \dots, Q_\tau.$$

Несмотря на то что отдельные δ_j могут быть довольно большими, все же для всей совокупности объектов вполне можно предположить, что большинство вариантов имеют малые δ_j . Кроме того, дискретность капиталовложений каждого объекта по сравнению с общей величиной капиталовложений $K_{\tau-1}$ весьма мала, поскольку K_j каждого объекта во много раз меньше $K_{\tau-1}$. Поэтому пренебрежение дискретностью вариантов в задачах распределения $K_{\tau-1}$ и поиска нормативного коэффициента не выглядит очень грубым и, видимо, допустимо. Заметим лишь, что в дискретной модели доход D_τ не может быть больше, чем в непрерывной модели, так как появление δ_j обязательно означает отклонение от оптимального решения в смысле условия (21а). Следовательно, найденное значение η_α из (26) с использованием данных о D_τ из дискретной модели будет несколько меньше искомого нормативного коэффициента E_H .

В сторону снижения η_α по сравнению с E_H действует использование при определении η_α отчетных статистических данных, так как фактическое распределение капиталовложений всегда хуже оптимального. Это подтверждает высказанное в [3] соображение о том, что E_H должен быть больше, чем найденный η_α по отчетным данным.

4. Полученные выше выводы о связи между E_D и E_H о выборе единого E_H и возможности его определения по методу [3] при нарушениях условий о необходимом составе фондов и близости эффективностей опирались

на не высказанное, но подразумевавшееся весьма существенное предположение о том, что цены на продукцию строго соответствуют объективно обусловленным или оптимальным оценкам [2, 9]. Однако общепризнано, что в настоящее время действующие цены в ряде случаев отклоняются от оптимальных. Рассмотрим хотя бы приближенно, как это отражается на полученных выводах.

а) Так как формула (23а) справедлива вне зависимости от отклонений цен от оптимальных, то сохраняется и формула (23), т. е. остается в силе вывод о равенстве коэффициентов эффективности капиталовложений по доходу и по экономии на себестоимости.

б) Пусть при оптимальном решении получены значения C_j и K_j , взятые по оптимальным ценам, и им соответствуют C_j' и K_j' по неоптимальным ценам. Тогда для объекта j отрасли i запишем

$$C_j' = \sigma_i C_j; \quad K_j' = \pi_i K_j, \quad (30)$$

где σ_i и π_i — некоторые отраслевые коэффициенты, появление которых вызвано неоптимальными ценами. Выбор единых σ_i и π_i для разных объектов одной отрасли является приближенным и нужен лишь для выяснения принципиальной стороны вопроса.

Потребуем, чтобы несмотря на неоптимальные цены, решение было оптимальным. Тогда при использовании формул (30) вместо одного общего для всех j и i условия (21б) получим для каждой отрасли отдельное условие

$$-\partial C_j' / \partial K_j' = \theta_i E_{ni}, \quad \theta_i = \sigma_i / \pi_i, \quad i = 1, 2, \dots, A. \quad (31)$$

Следовательно, если $\theta_i \neq 1$, то для этой отрасли $E_{ni} \neq E$, т. е. неоптимальные цены могут привести к появлению различных нормативных коэффициентов отраслей. Это относится и к формуле (1), введение в которую различных E_{ni} исправляет в некоторой степени искажение результатов расчетов по этой формуле при неоптимальных ценах, если $\theta_i \neq 1$. Здесь необходимо предостеречь от одной ошибки возможной как следствие иного толкования понятия «отрасль» по сравнению с принятым выше. Отраслевые коэффициенты E_{ni} должны применяться для выбора вариантов объектов не по признакам ведомственного отнесения объекта к той или иной отрасли, а по признаку отношения σ_i и π_i . Например, два объекта с одинаковыми θ_i , но ведомственно отнесенные к разным отраслям, должны иметь один и тот же E_{ni} . Это позволит избежать очевидных ошибок, на которые указано в [9]. Сопоставление объектов с различной, но взаимозаменяемой продукцией должно выполняться сопоставлением расчетных затрат в одних случаях с разными, а в других — при одном E_{ni} , в зависимости от θ_i , присущих данным объектам.

в) Для определения E_{ni} применить без дополнений метод [3], по-видимому, уже не удастся. Предположим, что при оптимальном решении и оптимальных ценах соблюдается условие близости только между отраслями $L\{1, 2, \dots, i, \dots, L\}$, $L \leq A$. Тогда можно записать

$$\eta_0 = \partial D_\tau / \partial K_{\tau-1} = \partial D_i / \partial K_i, \quad i = 1, 2, \dots, L. \quad (32)$$

Пусть значениям D_τ , $K_{\tau-1}$, D_i и K_i соответствуют в неоптимальных ценах значения D_τ' , $K_{\tau-1}'$, D_i' и K_i' . Их использование дает

$$\eta_0' = \partial D_\tau' / \partial K_{\tau-1}' = \sum_{i=1}^L (\partial D_i' / \partial K_i') (\partial K_i' / \partial K_{\tau-1}'). \quad (33)$$

Приняв

$$\partial D_i' / \partial K_i' = d_i (\partial D_i / \partial K_i); \quad \partial K_i' / \partial K'_{\tau-1} = r_i$$

после соответствующих подстановок получим

$$\eta_a = (1/g) (\partial D' / \partial K'_{\tau-1}), \quad g = \sum_{i=1}^L d_i r_i. \quad (34)$$

Таким образом, определение η_a и через него всех E_{ni} при неоптимальных ценах встречает дополнительные трудности по отысканию коэффициентов d_i , r_i и θ_i .

Можно попытаться найти E_{ni} , минуя определение η_a . Тогда для отрасли i при оптимальном решении и неоптимальных ценах получим

$$E_{ni} = \partial D_i' / \partial K_i', \quad i = 1, 2, \dots, A. \quad (35)$$

Применение формулы (35) для всех отраслей могло бы дать значения E_{ni} как для отраслей, удовлетворяющих условию близости эффективности, так и для отраслей, оказавшихся на пределах капиталовложений по условиям (24) или (25) применительно к отраслям. Для последних отраслей E_{ni} соответствуют значениям $E_{i \max}$ или $E_{i \min}$ при оптимальных ценах.

Реализация формулы (35) связана прежде всего с трудностями определения всех необходимых отраслевых данных для использования метода [3] применительно к каждой отрасли отдельно. Дополнительно следует учесть, что метод [3] предполагает оптимальное распределение капиталовложений. В противном случае необходимы коррективы. Отклонение от оптимального решения прежде всего означает, что отрасли с пониженными эффективностями имеют завышенные, а отрасли с повышенными эффективностями — заниженные капиталовложения. Так как функции $E_i(K_i)$, как правило, являются убывающими (рис. 2), то фактические эффективности первой группы отраслей оказываются ниже, а второй — выше, чем при оптимальном решении. Следовательно, если для отыскания E_{ni} использовать отчетные данные при неоптимальном распределении капиталовложений, то вместо формулы (35) правильнее записать

$$E_{ni} = \rho_i (\partial D_i' / \partial K_i'), \quad (36)$$

где $\rho_i > 1$ для низкоэффективных и $\rho_i < 1$ для высокоэффективных отраслей. Учет коэффициентов ρ_i дополнительно осложняет решение.

ВЫВОДЫ

1. Коэффициенты эффективности капиталовложений каждого отдельно взятого объекта по доходу и по экономии на себестоимости во всех случаях равны друг другу.
2. При оптимальных ценах допустимо использование единого нормативного коэффициента для всех объектов, вне зависимости от их особенностей или особенностей отраслей.
3. Неоптимальные цены могут привести к искажению результатов, получаемых по формуле расчетных затрат. Их приближенное исправление достигается использованием различных нормативных коэффициентов отраслей.
4. Метод [3] применим в любых случаях, при любых особенностях отраслей и объектов, лишь бы цены были оптимальными. В противном случае этот метод нуждается в некоторых дополнениях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для доказательства справедливости формулы (19) поступим следующим образом. Опираясь на принцип оптимальности [4], можно для шагов $\tau, \tau + 1, \dots, N$ записать

$$R_{\tau, N}^b(K_{\tau-1}) = \max_{\varphi_{\tau}} \{a_{\tau} D_{\tau}(K_{\tau-1}, \varphi_{\tau}) + R_{\tau+1, N}^y(K_{\tau})\}, \quad (37)$$

где $R_{\tau, N}^y(K_{\tau-1})$ — условный максимум суммы доходов всех шагов, начиная с шага τ и кончая последним шагом N при некотором ранее полученном значении $K_{\tau-1}$; $R_{\tau+1, N}^b$ — то же, но для шагов от $\tau + 1$ до N включительно при капиталовложениях K_{τ} .

Выполним одну вспомогательную операцию, для чего найдем связь между $K_{\tau-1}$ и K_{τ} . Капиталовложения на этапах $n - 1$ и n при $n - 1 \geq 1$ могут быть записаны через значения D_{τ} предыдущих этапов при помощи формул (3) и (16)

$$K_{n-1} = \gamma_{n-1} t_{n-1} \left(\sum_{\tau=1}^{n-1} \beta^{(n-1)-\tau} D_{\tau} + \beta^{(n-1)-1} D_{01} \right); \quad (38)$$

$$K_n = \gamma_n t_n \left(\sum_{\tau=1}^n \beta^{n-\tau} D_{\tau} + \beta^{n-1} D_{01} \right). \quad (39)$$

Произведем в (39) замену

$$\sum_{\tau=1}^n \beta^{n-\tau} D_{\tau} = \beta \sum_{\tau=1}^{n-1} \beta^{(n-1)-\tau} D_{\tau} + D_{\tau=n}. \quad (40)$$

Решая совместно (38) и (39) с учетом (40), получим

$$K_n = \frac{\gamma_n t_n}{\gamma_{n-1} t_{n-1}} \beta K_{n-1} + \gamma_n t_n D_{\tau=n}.$$

Имея в виду, что здесь $n = \tau$, заменим индекс n на τ . Пусть

$$r_{\tau} = (\gamma_{\tau} t_{\tau} / \gamma_{\tau-1} t_{\tau-1}) \beta; \quad s_{\tau} = \gamma_{\tau} t_{\tau},$$

тогда

$$K_{\tau} = r_{\tau} K_{\tau-1} + s_{\tau} D_{\tau}, \quad (41)$$

где r_{τ} и s_{τ} — фиксированные коэффициенты. Так как по исходному условию (п. 5 модели) D_{τ} — неубывающая функция $K_{\tau-1}$, то увеличение $K_{\tau-1}$ приводит к увеличению K_{τ} . Здесь следует сделать одно замечание. Полученный вывод строго справедлив, если принять γ_{τ} независимым от D_{τ} или возрастающим при увеличении D_{τ} . Он также справедлив и при не очень большом уменьшении γ_{τ} , если D_{τ} увеличивается. Лишь при некоторых значительных уменьшениях γ_{τ} и возрастании D_{τ} теоретически можно получить уменьшение K_{τ} при увеличении $K_{\tau-1}$. Однако подобная ситуация вряд ли может иметь место на практике: трудно представить, чтобы в современной действительности увеличение народного дохода привело к уменьшению капиталовложений.

Теперь используем прием, рассмотренный в [5]. Предположим, что $R_{\tau+1, N}^y(K_{\tau})$ — неубывающая функция K_{τ} . Это означает, что при некотором фиксированном K_{τ}' и увеличении его на ΔK_{τ} имеем

$$R_{\tau+1, N}^y(K_{\tau}' + \Delta K_{\tau}) > R_{\tau+1, N}^y(K_{\tau}'). \quad (42)$$

Иначе говоря, чем больше K_τ , тем больше $R_{\tau+1, N}^y$. Используя полученный выше вывод, из (41) заключаем, что увеличение $K'_{\tau-1}$ до значения $K'_{\tau-1} + \Delta K_{\tau-1}$ приводит к увеличению D_τ и $R_{\tau+1, N}^y$. Зафиксируем какое-либо значение $K'_{\tau-1}$ и найдем для него $R_{\tau, N}^y(K'_{\tau-1})$. Если теперь увеличить $K'_{\tau-1}$ на $\Delta K_{\tau-1}$, то, реализуя $\Delta K_{\tau-1}$ на шаге τ , получим дополнительные величины ΔD_τ , ΔK_τ , $\Delta R_{\tau+1, N}^y$

$$R_{\tau, N}^y(K'_{\tau-1} + \Delta K_{\tau-1}) = \max_{\varphi_\tau} \{a_\tau D_\tau(K'_{\tau-1}, \varphi_\tau) +$$

$$+ a_\tau \Delta D_\tau(\Delta K_{\tau-1}, \varphi_\tau) + R_{\tau+1, N}^y(K'_\tau) + \Delta R_{\tau+1, N}^y(\Delta K_\tau)\}. \quad (43)$$

Отсюда найдем, что

$$R_{\tau, N}^y(K'_{\tau-1} + \Delta K_{\tau-1}) > R_{\tau, N}^y(K'_{\tau-1}). \quad (44)$$

Неравенство (44) указывает, что если $R_{\tau+1, N}^y(K_\tau)$ — неубывающая функция K_τ , то и $R_{\tau, N}^y(K_{\tau-1})$ является также неубывающей функцией $K_{\tau-1}$. Тогда по принципу полной индукции сразу устанавливаем, что и все R^y для всех предыдущих шагов также неубывающие функции.

Для последнего шага N

$$R_{N, N}(K_{N-1}, \varphi_N) = a_N D_N(K_{N-1}, \varphi_N). \quad (45)$$

Так как по исходному условию D_N — неубывающая функция K_{N-1} , то, осуществляя последовательный переход от шага к шагу, начиная с последнего N , получим, что все $R_{\tau, N}^y$, $\tau = 1, 2, \dots, N$ — неубывающие функции. Поэтому общий доход за весь срок $D_\Sigma = R_{1, N}$ есть также неубывающая функция от капиталовложений $K_{\tau-1}$, реализуемых на каждом шаге. Это означает, что оптимальное управление φ_τ^0 на каждом шаге τ должно обеспечивать получение $\max K_\tau$ или, что дает тот же результат (при фиксированном φ_τ) — $\max D_\tau$. Иначе говоря, оптимальное управление на всех шагах доставляет условие (19).

Таким образом, задача отыскания $\max D_\Sigma$ для всего срока T сводится к задаче отыскания φ_τ^0 , доставляющей $\max D_\tau$ на каждом шаге τ в отдельности при заданном каждый раз значении $K_{\tau-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Новожилов. Измерение затрат и их результатов в социалистическом хозяйстве. В сб. Применение математики в экономических исследованиях. М., Соцэкгиз, 1959.
2. Л. В. Канторович, В. Л. Макаров. Оптимальные модели перспективного планирования. В сб. Применение математики в экономических исследованиях, т. 3. М., «Мысль», 1965.
3. Л. В. Канторович, Альб. Л. Вайнштейн. Об исчислении нормы эффективности на основе однопродуктовой модели развития хозяйства. Экономика и математ. методы, 1967, т. III, вып. 5.
4. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
5. Е. С. Вентцель. Элементы динамического программирования. М., «Наука», 1964.
6. Т. С. Хачатуров. Экономическая эффективность капитальных вложений. М., «Экономика», 1964.
7. А. Л. Лурье. О математических методах решения задач на оптимум при планировании социалистического хозяйства. М., «Наука», 1964.
8. Л. А. Вааг, С. Н. Захаров. Методы экономической оценки в энергетике. М.—Л., Госэнергоиздат, 1962.
9. А. Л. Лурье. Оптимальные оценки и норма эффективности. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 2.

Поступила в редакцию
29 III 1966