

БЛОЧНЫЕ МЕТОДЫ ВОГНУТОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ИХ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

В. М. ПОЛТЕРОВИЧ

(Москва)

Блочные алгоритмы математического программирования играют в настоящее время двойную роль. С одной стороны, как вычислительные алгоритмы, они позволяют свести решение задачи с большим числом переменных и ограничений к решению последовательности задач меньшей размерности. С другой стороны, они рассматриваются рядом авторов [1—5] в качестве моделей процессов планирования.

I. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМОВ

Рассмотрим задачу математического программирования

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_m) \rightarrow \max, \quad x \in G \cap Q, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_m) \in R^{\Sigma t_k}$, $x_k \in R^{t_k}$; $k = 1, 2, \dots, m$; $G = \{x \in R^{\Sigma t_k}, A(x) \geq d\}$, $Q = Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_m$, $Q_k \subset R^{t_k}$, R^i — i -мерное евклидово пространство; $\varphi(x)$ — вогнутая (выпуклая вверх) функция, определенная на $R^{\Sigma t_k}$; $A(x)$ — вогнутая вектор-функция, отображающая $R^{\Sigma t_k}$ в R^r ; d — r -мерный вектор; Q_k — замкнутые выпуклые множества.

Обозначим через $x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*, \dots, x_m^*)$ решение задачи (1) и положим

$$\varphi^* = \varphi(x^*) = \max_{x \in G \cap Q} \varphi(x).$$

При описании алгоритмов выделим на произвольном s -м шаге задачи «центра» и задачи «блоков». Каждый шаг алгоритма начинается с решения задачи «центра».

1°. Как известно, впервые метод блочного программирования был разработан Данцигом и Вулфом для линейного случая. Ими же предложено обобщение этого метода для выпуклых задач [1]. Однако обобщенный метод позволяет использовать специфику задачи (1) лишь при условии

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(x_k). \quad (2)$$

Близкий по идее метод для задач более специального вида, нежели (1), не предполагающий выполнимость условия (2), разработан Маленко [4]. Предлагаемый ниже алгоритм представляет собой некоторое развитие идей, изложенных в [1] и [4].

Вычисления на s -м шаге алгоритма производятся в следующей последовательности.

А. Задачи «центра».

$$\varphi(x) \rightarrow \max, \quad x \in G \cap Q^s, \quad Q^s = \langle x^0, x^1, \dots, x^{s-1} \rangle^*.$$

Пусть $\bar{x}^s$ — решение этой задачи. Определяем $p^s \in R^{\Sigma t_k}$, $p^s = (p_1^s, \dots, p_k^s, \dots, p_m^s)$ из условий

$$(p^s, x - \bar{x}^s) \geq 0 \quad \text{для всех } x \in L^s, \quad (3)$$

$$(p^s, x - \bar{x}^s) \leq 0 \quad \text{для всех } x \in Q^s, \quad (4)$$

$$\|p^s\| = 1, \quad \|\bar{p}^s\| = 1, \quad (5)$$

где $L^s = G \cap \{x: \varphi(x) \geq \varphi(\bar{x}^s)\}$, $\bar{p}^s$ — проекция p^s на $R^s - x^0$; R^s — линейное многообразие минимальной размерности, содержащее Q^s .

В. Задачи «блоков».

$$(p_k^s, x_k) \rightarrow \max, \quad x_k \in Q_k.$$

Пусть x_k^s — решение задачи k -го блока на s -м шаге и $x^s = (x_1^s, \dots, x_k^s, \dots, x_m^s)$.

Сформулируем теорему о сходимости алгоритма.

Теорема 1. Пусть $x^0 \in G \cap Q$, $\varphi(x)$ — вогнутая функция, Q, G — замкнутые выпуклые множества, Q ограничено, $G^0 \cap Q \neq \emptyset$ (G^0 — внутренность G). Тогда в методе $A - B\varphi(\bar{x}^s) \rightarrow \varphi^*$ при $s \rightarrow \infty$.

Доказательство этой теоремы приведено в приложении.

Условия (3) и (4) означают, что вектор p^s является опорным ко множеству L^s , а вектор $-p^s$ — опорным ко множеству Q^s . В частности, из (3) следует, что вектор p^s имеет вид

$$p^s = A'(\bar{x}^s)q^s + \varphi'(\bar{x}^s)\alpha^s, \quad (6)$$

где q^s — неотрицательный τ -мерный вектор, $(A(\bar{x}^s) - d, q^s) = 0$; α^s — неотрицательное число; $\alpha^s + \|q^s\| \neq 0$; $\varphi'(\bar{x}^s)$ — опорный вектор к функции $\varphi(x)$ в точке $\bar{x}^s$; $A'(\bar{x}^s)$ — матрица, столбцы которой являются опорными векторами к соответствующим компонентам вектор-функции $A(x)$ в точке $\bar{x}^s$ (опорная матрица).

Очевидно, что если $\alpha^s = 1$ и q^s — вектор множителей Лагранжа в задаче A , то равенство (6) задает вектор p^s , удовлетворяющий условиям (3) и (4).

Если векторы x_k имеют одинаковую размерность и $\varphi(x)$, $A(x)$ зависят лишь от $\sum_{k=1}^m x_k$, то, как следует из (6), $p_k^s = p_r^s$, $k, r = 1, \dots, m$; $s =$

$= 1, 2, \dots$. К этому случаю сводится задача, рассматривавшаяся в [4].

2°. Метод 1° основан на аппроксимации множеств Q_k «изнутри». Нижеследующий метод использует аппроксимацию множеств Q_k «снаружи»; в этом смысле он близок методу секущих плоскостей Келли [6], но в отличие от него применим при любом способе задания множеств Q_k .

А. Задача «центра».

$$\varphi(x) \rightarrow \max, \quad (7)$$

$x \in G \cap Q^s$, $Q^s = \{x \in R^{\Sigma t_k}, (x - x^i, \bar{x}^i - x^i) \leq 0\}$, $i = 1, 2, \dots, s - 1$; $\bar{x}^s = (\bar{x}_1^s, \dots, \bar{x}_k^s, \dots, \bar{x}_m^s)$ — решение этой задачи.

* Можно также полагать $Q^s = Q_1^s \times \dots \times Q_k^s \times \dots \times Q_m^s$, где $Q_k^s = \langle x_k^0, x_k^1, \dots, x_k^{s-1} \rangle$.

В. Задачи «блоков».

$$-\|x_k - \bar{x}_k^s\|^2 \rightarrow \max, \quad x_k \in Q_k. \quad (8)$$

x_k^s — решение k -й задачи; $x^s = (x_1^s, \dots, x_k^s, \dots, x_m^s)$.

Теорема 2. Пусть функция φ непрерывна, множества G и Q замкнуты, множество Q выпукло, множество $S = \{x: x \in G, \varphi(x) \geq \varphi^*\}$ ограничено. Тогда любая предельная точка последовательности $\bar{x}^s$ принадлежит Q и $\varphi(\bar{x}^s) \rightarrow \varphi^*$ при $s \rightarrow \infty$. Доказательство теоремы 2 приведено в приложении.

3°. В дальнейшем предполагается, что

$$A(x) = \sum_{k=1}^m A_k(x_k), \quad (9)$$

где A_k — вогнутые вектор-функции.

Представим исходную задачу (1) в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_m) \rightarrow \max, \\ x \in V(h), \quad \sum_{k=1}^m h_k = d, \end{aligned}$$

$$h = (h_1, \dots, h_k, \dots, h_m) \in H, \text{ где } (h - \tau m) - \text{ мерный вектор; } \quad (10)$$

$$V(h) = V_1(h_1) \times \dots \times V_k(h_k) \times \dots \times V_m(h_m);$$

$$V_k(h_k) = \{x_k \in R^{t_k}, A_k(x_k) \geq h_k, \quad x_k \in Q_k\};$$

$$H = H_1 \times \dots \times H_k \times \dots \times H_m; \quad H_k = \{h_k \in R^r, V_k(h_k) \neq \Phi\}.$$

Следует выделить две идеи построения блочных методов, основанных на представлении исходной задачи в виде (10). Первая из них, неоднократно предлагавшаяся для решения блочных задач линейного программирования, состоит в использовании множителей Лагранжа для организации процесса градиентного спуска [7, 8]. Вторая идея состоит в сведении задачи к некоторой выпуклой игре и использовании алгоритмов решения игр [3, 9].

Предположим, что $\varphi(x) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(x_k)$. Ниже для этого случая приводится один из вариантов градиентного метода блочного программирования.

А. Задача «центра».

$$-\|h^{s-1} + \gamma_{s-1} \lambda^{s-1} - h\|^2 \rightarrow \max, \quad \sum h_k = d, \quad h \in H.$$

Обозначим через $\bar{h}^s$ решение этой задачи, а через h^s — любой вектор, удовлетворяющий условиям

$$h^s \in \left\{ h: \sum h_k = d \right\} \cap H^0, \quad s = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\|h^s - \bar{h}^s\| \leq \varepsilon_s, \quad s = 1, 2, \dots,$$

где H^0 — внутренность H , $\varepsilon_s > 0$,

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_s < \infty, \quad \|\lambda^s\| \gamma_s \rightarrow 0, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s \|\lambda^s\| = \infty.$$

В. Задачи «блоков».

$$\varphi_k(x_k) \rightarrow \max, \quad x_k \in V_k(h_k^s).$$

Через (x_k^s, λ_k^s) обозначим седловую точку функции Лагранжа

$$F_k^s(x_k, \lambda_k) = \varphi_k(x_k) - (\lambda_k, A_k(x_k) - h_k^s)$$

при $\lambda_k \leq 0$, $x_k \in Q_k$, $\lambda^s = (\lambda_1^s, \dots, \lambda_k^s, \dots, \lambda_m^s)$.

Так как $h_k^s \in H_k^0$, то множество множителей Лагранжа λ_k^s совпадает со множеством опорных функционалов к функции $f_k(h_k) = \max_{x_k \in V_k(h_k)} \varphi_k(x_k)$ в точке $h_k = h_k^s$ (см. приложение). Поэтому изло-

женный алгоритм лишь незначительно отличается от результата непосредственного применения метода, разработанного в [10—12] к следующей задаче, эквивалентной (10)

$$\sum_{k=1}^m f_k(h_k) \rightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^m h_k = d, \quad h_k \in H_k, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Если функции $\varphi_k(x_k)$, $A_k(x_k)$ вогнуты, множества Q и $\left\{ h: \sum_{k=1}^m h_k = d, \quad h \in H \right\}$ замкнуты, выпуклы, ограничены, множество

$\left\{ h: \sum_{k=1}^m h_k = d \right\} \cap H^0 \neq \emptyset$, то в методе $A - B$ (п. 3°) $\varphi(\bar{x}^s) \rightarrow \varphi^*$ при $s \rightarrow \infty$. Это утверждение можно доказать, слегка изменив рассуждения, приведенные в [11].

Отметим, что проекция $\tilde{h}^s$ вектора $h^{s-1} + \gamma_{s-1} \lambda^{s-1}$ на множество $\{h: \sum h_k = d\}$ имеет вид

$$\tilde{h}^s = (\tilde{h}_1^s, \dots, \tilde{h}_k^s, \dots, \tilde{h}_m^s), \quad \tilde{h}_k^s = h_k^{s-1} + \gamma_{s-1} \left(\lambda_k^{s-1} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \lambda_k^{s-1} \right).$$

Если $\tilde{h}^s \in H^0$, то можно полагать $h^s = \tilde{h}^s$. В указанном выше методе мы «избегали» граничных точек множества H , поскольку в них могут и не существовать множители Лагранжа. Если исходная задача (1) является задачей линейного программирования, то эти предосторожности оказываются излишними и можно полагать $h^s = \tilde{h}^s$. Важный частный случай возникает при $H = \{h: h_k \leq 0, k = 1, 2, \dots, m\}$ (задача распределения ресурсов). В этом случае как легко проверить,

$$\bar{h}_{kj}^s = \min \left\{ 0, \bar{h}_{kj}^{s-1} + \gamma_{s-1} \left(\lambda_k^{s-1} - \frac{1}{|U_j^s|} \sum_{l \in U_j^s} \lambda_l^{s-1} \right) + \frac{1}{|U_j^s|} \left(d_j - \sum_{l \in U_j^s} \bar{h}_{lj}^{s-1} \right) \right\}, \quad (11)$$

где $\bar{h}_k^s = (\bar{h}_{k1}^s, \dots, \bar{h}_{kj}^s, \dots, \bar{h}_{k\tau}^s)$; $|U_j^s|$ — мощность множества $U_j^s \subset \{1, 2, \dots, m\}$; $\bar{h}_{kj}^s \leq 0$ при $k \in U_j^s$, $\bar{h}_{kj}^s \geq 0$ при $k \notin U_j^s$. Отсюда следует, что $\bar{h}_{lj}^{s-1} + \gamma_{s-1} \lambda_l^{s-1} \leq \bar{h}_{rj}^{s-1} + \gamma_{s-1} \lambda_r^{s-1}$ при $l \in U_j^s$, $r \notin U_j^s$.

4°. Основываясь на результатах [9], можно предложить блочный метод, не требующий предположения, что $\varphi(x) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(x_k)$.

А. Задача «центра».

$$(\lambda^s, h) = \sum_{k=1}^m (\lambda_k^s, h_k) \rightarrow \max, \quad h \in H, \quad \sum_{k=1}^m h_k = d, \quad s = 1, 2, \dots$$

Пусть $\bar{h}^s = (\bar{h}_1^s, \dots, \bar{h}_k^s, \dots, \bar{h}_m^s)$ — решение задачи центра; $\bar{p}^s = (\bar{p}_1^s, \dots, \bar{p}_k^s, \dots, \bar{p}_m^s)$ — опорный вектор к функции $\varphi(x)$ в точке x^{s-1} ; $h^s = h^{s-1} + a_s(\bar{h}^s - h^{s-1})$, $p^s = p^{s-1} + a_s(\bar{p}^s - p^{s-1})$, $s = 1, 2, \dots$, где p^0 — произвольный вектор, $h^0 = (h_1^0, \dots, h_k^0, \dots, h_m^0)$ — произвольный

вектор, удовлетворяющий условиям $\sum_{k=1}^m h_k^0 = d$, $h^0 \in H^0$; H^0 — внутренность H ; $0 \leq a_s < 1$,

$$a_s \rightarrow 0, \quad \sum_{s=1}^{\infty} a_s = \infty.$$

В. Задачи «блоков».

$(p_k^s, x_k) \rightarrow \max, \quad x_k \in V_k(h_k^s), \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad s = 0, 1, 2, \dots$

Через $(\bar{x}^s, \bar{\lambda}^s)$, $s = 0, 1, 2, \dots$, обозначим седловую точку функции Лагранжа:

$$F^s(x, \lambda) = \sum_{k=1}^m [(p_k^s, x_k) - (\lambda_k, A_k(x_k) - h_k^s)] \quad \text{при } \lambda \leq 0, x_k \in Q_k, \\ k = 1, 2, \dots, m.$$

Наконец, полагаем $x^s = x^{s-1} + a_s(\bar{x}^s - x^{s-1})$, $x^0 = \bar{x}^0$; $\lambda^s = \lambda^{s-1} + a_s(\bar{\lambda}^s - \lambda^{s-1})$, $\lambda^0 = \bar{\lambda}^0$.

Если множества Q_k и $\{h: h \in H, \sum h_k = d\}$ ограничены и начальный вектор h^0 существует, то алгоритм $A - B$ имеет смысл.

Аналогично тому, как это делается в [9], можно свести исходную задачу (10) к некоторой выпуклой игре так, что этот алгоритм оказывается применением к игре процесса A из [9]. Поэтому при дополнительном предположении о единственности решений задач $A - B$ на каждом шаге сходимость описанного процесса является непосредственным следствием теоремы (1') из [9].

II. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ БЛОЧНЫХ АЛГОРИТМОВ КАК ПРОЦЕССОВ ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим систему, состоящую из $m + 1$ -го участника. Нулевого участника назовем центром (центральный управляющим органом), остальных m участников — блоками. Каждый k -й блок характеризуется допустимым множеством Q_k векторов затрат-выпуска x_k (множеством производственных возможностей). Значения отрицательных компонент векторов x_k определяют количества ингредиентов, входящих в блок из других блоков или из вне всей системы, а положительных — выходящих из него в другие блоки или из системы. Возможность выбора векторов x_k в пределах множества Q_k соответствует реальной возможности варьировать собственные управляемые параметры блока (формально не отраженные в исходной задаче). Такие параметры выбираются самим блоком и могут, например, задавать распределение ингредиентов между его подблоками.

Связи между блоками и ограничения, налагаемые на систему внешней средой, характеризуются множеством общих ограничений $G = \{x: A(x) \geq d\}$. Связям могут соответствовать, например, балансовые ограничения по поставкам (количество ингредиента, выпускаемого k -м блоком, не меньше суммарного количества этого ингредиента, получаемого остальными

ми блоками от k -го). Общие ограничения отражают также ограниченность ресурсов, поступающих в систему извне, а также задания по выпуску ингредиентов, выходящих из системы.

Задача центра состоит в том, чтобы получить максимальное значение глобального критерия оптимальности $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_m)$, обеспечив при этом выполнение общих ограничений; разумеется, локальные ограничения тоже должны выполняться, т. е. векторы x_k должны соответствовать производственным возможностям блоков.

Предположим теперь, что в системе отсутствует математическое описание множества Q_k производственных возможностей: оно неизвестно не только центру, но и самим блокам. Центр знает глобальный критерий оптимальности и вид общих ограничений. Блоки же могут только отыскивать допустимые векторы x_k затрат-выпуска, удовлетворяющие тем или иным условиям. Осуществляется это, например, методом экспертных оценок или путем экспериментирования на реальных объектах. Таким образом, в принципе они могли бы описать каждое свое множество Q_k , но на это требуется слишком много времени и средств. Может ли центр так организовать обмен информацией в системе, чтобы решить стоящую перед ним задачу в ускоренном темпе и с экономией средств? Возможный путь решения этой проблемы состоит в том, чтобы совместить процесс математического описания производственных возможностей блоков и процесс принятия решения, надеясь не только на экономию времени, но и на то, что при этом не потребуются знания всего множества производственных возможностей. Предположим далее, что центру удалось получить правильные ответы от блоков. При этих предположениях блочные алгоритмы математического программирования указывают возможные пути решения сформулированной проблемы. Каждый из них дает схему обмена информацией, использование которой позволяет в принципе приближаться к оптимуму глобального критерия, совмещая процесс оптимизации с процессом изучения системы и не исследуя, вообще говоря, всего множества производственных возможностей каждого блока.

Рассмотрим, каким образом реализуется этот процесс, на примере описанных выше алгоритмов.

В алгоритме $A - B$ (п. 1°) центр на каждом шаге назначает вектор «цен» p^s на входные и выходные ингредиенты x_k каждого блока и предлагает максимизировать вычисленную по этим «ценам» прибыль, принимая во внимание только множество своих производственных возможностей и не заботясь об общих ограничениях. Блок сообщает центру найденный им оптимальный план. (Если для этого необходимо проведение эксперимента, то блокам, очевидно, потребуются дополнительные ресурсы на эксперимент; это обстоятельство здесь не учтено). Центр использует полученную информацию для более точной аппроксимации локальных ограничений. После этого он получает возможность вычислить лучший план, удовлетворяющий и локальным и глобальным ограничениям, и новые цены. Если на двух последовательных итерациях решения задач блоков совпадут, то, как легко показать, последний план, вычисленный центром, оптимален. Однако в общем случае такой момент может и не наступить; метод гарантирует лишь монотонное стремление глобального критерия к максимальному значению.

При естественных предположениях о виде критерия и глобальных ограничений вектор «цен» p^s неотрицателен. Вследствие этого решения x_k^s локальных задач являются эффективными* векторами множеств Q_k . Таким образом, в процессе $A - B$ (п. 1°) происходит аппроксимация не всего мно-

* Вектор $x \in Q$ называется эффективным, если не существует другого вектора, принадлежащего Q , все координаты которого были бы не меньше соответствующих координат вектора x .

жества Q_k , а только его подмножества, состоящего из эффективных точек. При этом вектор p^s выбирается так, чтобы на множестве Q^s он достигал максимума на векторе $\bar{x}^s$, являющемся решением задачи центра на s -м шаге. Благодаря этому и в силу неравенства (3) гарантируется, что если $\bar{x}^s$ не оптимален в исходной задаче, то по крайней мере один из блоков сообщит центру новый, не известный ранее допустимый вектор.

Согласно алгоритму $A - B$ (п. 1°) множества производственных возможностей аппроксимируются «изнутри». В алгоритме $A - B$ (п. 2°), напротив, аппроксимирующее множество содержит аппроксимируемое. Поэтому решения центра $\bar{x}^s$ на каждом шаге могут не соответствовать производственным возможностям блоков. Задачи блоков состоят в отыскании таких векторов, которые удовлетворяли бы локальным ограничениям и по возможности меньше отличались бы от решений центра. В этом случае обмен информацией осуществляется по схеме «план — план».

Как и в первом алгоритме, решения блоков, вообще говоря, не удовлетворяют глобальным ограничениям, однако, в отличие от схемы $A - B$ (п. 1°) здесь планы блоков и центра, стремясь к оптимальному множеству, одновременно сближаются между собой*.

Выше рассмотрена интерпретация двух блочных методов как алгоритмов планирования в условиях неопределенности. Указано, что для осуществления этого процесса блоки могут быть вынуждены прибегнуть к экспериментированию. При этом остается не ясным, каким образом процесс планирования (и экспериментирования) связан с процессом функционирования системы. Задачи блоков в алгоритмах $A - B$ (п. 1°) и $A - B$ (п. 2°) не соответствуют их задачам, возникающим в процессе функционирования. Ведь для осуществления последнего блокам должны быть переданы ресурсы, находящиеся в распоряжении центра.

В отличие от первых двух третей и четвертый алгоритмы можно интерпретировать не только как процессы планирования, но и как процессы управления функционирующей экономической системой или, быть может, более точно — как методы уточнения плана в процессе нормального функционирования.

Мы по-прежнему будем предполагать, что математическое описание множеств производственных возможностей Q_k неизвестно не только центру, но и самим блокам.

Пусть на период T центр располагает вектором D ресурсов и задача планирования на этот период ставится как статическая задача**. Согласно приближенному плану, k -му блоку на период T должен быть выделен

$$\text{вектор } r_k^0 \text{ ресурсов } \sum_{k=1}^m r_k^0 = D.$$

Если составление более детального плана заранее нецелесообразно в силу плохого знания системы (а может быть, и невозможно: это потребовало бы слишком много времени), естественно предполагать равномерный расход ресурсов и выпуск продукции в течение периода T . Разобьем плановый период на N равных частей $\theta_s = [sT/N, (s+1)T/N]$, $s = 0, 1, \dots, N-1$. Пусть задача (10) соответствует периоду длительностью T/N (x — вектор затрат-выпуска за такой период), а значение глобального критерия за период T равно сумме значений функции $\varphi(x)$ по всем периодам

* В первом алгоритме можно утверждать лишь, что планы центра приближаются к оптимальным планам блоков, но не наоборот: среди оптимальных (предельных) планов блоков могут быть такие, которые не удовлетворяют общим ограничениям.

** Она может возникнуть, в частности, как фрагмент динамической задачи на более длительный период.

$\Theta_s: \sum_{s=0}^{N-1} \varphi(x^s)$. В начальный момент k -й блок получает вектор $h_k^0 = r_k^0 / N$ ресурсов; кроме того, центр задает каждому блоку локальный критерий. Будем считать, что в процессе функционирования блоки стремятся найти оптимальные (при заданном локальном критерии и векторе ресурсов) векторы затрат-выпуска. Центр, наблюдая за их деятельностью, извлекает необходимую информацию, чтобы более рационально распределить ресурсы между блоками.

Алгоритм $A - B$ (п. 3°) применим для того случая, когда эффекты деятельности блоков разделены: $\varphi(x) = \sum_{h=1}^m \varphi_h(x_h)$. В качестве критерия

k -му блоку задается функция $\varphi_k(x_k)$. При этом с точки зрения центра функция $f_k(h_k) = \max_{x_k \in V_k(h_k)} \varphi_k(x_k)$, где $V_k(h_k) = \{x_k: A_k(x_k) \geq h_k, x_k \in Q_k\}$, полностью описывает k -й блок, представляя информацию о нем в «сжатом» виде (см. также [13]).

Теперь в качестве входов блока выступают идущие извне ресурсы h_k , а единственным выходом является значение $f_k(h_k)$ вклада данного блока в глобальный критерий. Задача центра состоит в отыскании таких значений входов h_k , удовлетворяющих ограничениям $\sum h_k = d$, $h_k \in H_k$, $k = 1, 2, \dots, m$, чтобы сумма значений выходов была максимальна. Хотя центр и не знает вида функций $f_k(h_k)$, для него существует много способов, наблюдая за деятельностью блоков, определить градиенты этих функций [14]. Векторы градиентов как раз и есть множители Лагранжа λ_k (в случае, если они единственны). Их значения покажут направление целесообразного перераспределения ресурсов на следующем шаге (см. (11) при $d = D / N$).

Алгоритм $A - B$ (п. 4°) имеет смысл и без предположения о специальном виде глобального критерия $\varphi(x)$. Однако здесь схема обмена информацией сложнее, поскольку управление ведется не только путем изменения векторов ресурсов h_k , но и воздействием на параметры p_k целевых функций блоков.

На $s - 1$ -м шаге центр задает блокам векторы цен p_k^{s-1} и ресурсов h_k^{s-1} . Затем, наблюдая за деятельностью блоков, получает информацию о найденных блоками планах $\bar{x}_k^{s-1}$ и градиентах $\bar{\lambda}_k^{s-1}$ функций $f_k(h_k, p_k^{s-1}) = \max_{x_k \in V_k(h_k)} (p_k^{s-1}, x_k)$ в точках h_k^{s-1} . После этого производится ус-

реднение векторов планов и градиентов по всем предыдущим итерациям (здесь, таким образом, в отличие от предыдущего метода (11) играют роль средние оценки по «времени», а не по множеству блоков). В результате усреднения определяются векторы $\bar{x}^{s-1}$ и $\bar{\lambda}^{s-1}$. Далее центр определяет градиент $\bar{p}^{s-1}$ глобальной целевой функции в точке $\bar{x}^{s-1}$ и распределение ресурсов $\bar{h}^{s-1}$, максимизирующее ценность ресурсов, вычисленную по оценкам $\bar{\lambda}^{s-1}$. Наконец, путем усреднения векторов $\bar{h}^i$ и $\bar{p}^i$ по всем предыдущим итерациям находятся новые параметры локальных целевых функций и распределение ресурсов. Усреднение необходимо здесь для того, чтобы предотвратить возникновение колебательных режимов. Алгоритмы $A - B$ (п. 3°) и $A - B$ (п. 4°), по-видимому, могут быть применены и для задач стохастической аппроксимации [15, 16].

Описанные выше процессы планирования и управления аналогичны методам экстремального регулирования; они не обеспечивают движения системы по оптимальной траектории, но гарантируют ее приближение к статическому оптимуму. Во всех подобных случаях в том или ином виде

используется универсальный метод управления в условиях неопределенности — метод «проб и ошибок». Этот метод фактически применяется, конечно, и в экономической практике. Необходимо сознавать, что «ошибки», неточности в планировании и управлении — неизбежные условия функционирования экономики. Задача состоит не в том, чтобы устранить их раз и навсегда, при неполной информации это невозможно, а в том, чтобы локализовать их последствия и, самое главное, эффективно использовать их как экспериментальный материал для оптимизации системы. «Ошибки» в управлении экономическими системами должны стать элементом самого алгоритма управления. Рассмотренные выше схемы функционирования — лишь формальная иллюстрация этих общих положений, но не исключена возможность, что сознательное использование одной из подобных схем позволит улучшить управление экономическими процессами.

Рассмотренные выше алгоритмы различаются как по схеме обмена информацией, так и по виду используемых локальных критериев. В первом и четвертом алгоритмах локальные критерии являются линейными функциями векторов затрат-выпуска; это дает основание интерпретировать соответствующий вектор коэффициентов как вектор цен. В третьем и четвертом алгоритмах участвуют, кроме того, оценки ресурсов (и плановых заданий) блоков. Наконец, во втором алгоритме «цены» вообще не используются, локальные критерии нелинейны. Рассмотрение блочных алгоритмов не дает, на наш взгляд, оснований для категорических выводов о преимуществах какой-либо одной схемы (как схемы планирования и управления) или о необходимости использовать локальные критерии какого-либо определенного вида. В каждом из алгоритмов отражены те или иные черты реальных экономических процессов; однако сравнение эффективности различных схем — это проблема, которую еще предстоит решить.

В заключение необходимо подчеркнуть, что блочные алгоритмы математического программирования — очень грубые модели процессов планирования и управления в экономических системах. Более совершенные модели должны учесть наличие и быстроедействие вычислительных средств, влияние помех, запаздывание при обмене информацией и целый ряд других факторов.

Автор пользуется случаем поблагодарить А. И. Каценелинбойгена, по инициативе и при постоянном внимании которого была написана эта работа.

ПРИЛОЖЕНИЕ

I. Доказательство теоремы 1. Покажем прежде всего, что если $\varphi(\bar{x}^s) < \varphi^*$, то существует вектор p^s , удовлетворяющий условиям (3) — (5).

Действительно, рассмотрим множество

$$L_0^s = G \cap \{x: \varphi(x) > \varphi(\bar{x}^s)\}.$$

Если $\varphi(\bar{x}^s) < \varphi^*$, то $L_0^s \neq \Phi$. Так как $\bar{x}^s$ — решение задачи A (п. 1°), то $L_0^s \cap Q^s = \Phi$. Следовательно, существует вектор p^s , $\|p^s\| = 1$, коллинеарный минимальному линейному многообразию, содержащему Q^s , и разделяющий множества L_0^s и Q^s :

$$(p^s, x) \geq \alpha, \quad x \in L_0^s, \quad (12)$$

$$(p^s, x) \leq \alpha, \quad x \in Q^s. \quad (13)$$

Так как $\bar{x}^s \in Q^s \cap L^s$, то очевидно, что $(p^s, \bar{x}^s) = \alpha$. Отсюда и из неравенств (12), (13) следует, что вектор p^s искомый. Очевидно, что последовательность $f(\bar{x}^s)$ монотонно не убывает.

Предположим, что $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(\bar{x}^s) = \bar{\varphi} < \varphi^* = \varphi(x^*)$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\varphi(\bar{x}^s) \leq \varphi(x^*) - \varepsilon \quad (14)$$

для всех s .

Рассмотрим множество $L = G \cap Q \cap F$, где

$$F = \{x: \varphi(x) > \varphi(x^*) - \varepsilon\}. \quad (15)$$

Так как $x^* \in L$, то $L \neq \emptyset$. Обозначаем через Q^0 множество относительно внутренних точек Q . Поскольку $G^0 \cap Q \neq \emptyset$, то и $G^0 \cap Q^0 \neq \emptyset$, а следовательно, $G^0 \cap Q^0 \cap F \neq \emptyset$.

Пусть $x^0 \in G^0 \cap Q^0 \cap F$. Тогда для достаточно малого $\alpha > 0$ вектор $x^0 - \alpha \bar{p}^s \in L$. Из определения L^s и соотношений (14) и (15) следует, что $L \subset L^s$ для всех $s = 1, 2, \dots$. Поэтому из (3) получим $(p^s, x^0 - \alpha \bar{p}^s - \bar{x}^s) \geq 0$ или с учетом (5)

$$(p^s, x^0) \geq (p^s, \bar{x}^s) + \alpha(p^s, \bar{p}^s) = (p^s, \bar{x}^s) + \alpha. \quad (16)$$

Так как x^s является решением задачи B (п. 1°), то

$$(p^s, x^s) \geq (p^s, x^0) \geq (p^s, \bar{x}^s) + \alpha \geq (p^s, x^{s-i}) + \alpha \quad (17)$$

для всех $i, s \geq i \geq 1$.

Здесь последовательно использованы неравенства (16) и (4).

Из (17) и (5) следуют неравенства

$$0 < \alpha \leq (p^s, x^s - x^{s-i}) \leq \|x^{s-i} - x^s\| \quad (18)$$

для всех $s \geq i \geq 1$.

Векторы $x^s \in Q$ и, следовательно, последовательность x^s ограничена. Пусть $x^{s_k} \rightarrow x^0$ — сходящаяся подпоследовательность x^s . Из (18) при $s = s_k$, $i = s_k - s_{k-1}$, получим $\|x^{s_{k-1}} - x^{s_k}\| \geq \alpha > 0$, что невозможно. Теорема доказана.

Замечание. Вместо условий (5) достаточно потребовать выполнения условий $\|p^s\| \leq \gamma_1$, $\|\bar{p}^s\| \geq \gamma_2$, где γ_1, γ_2 — некоторые положительные числа. При этом доказательство не меняется, оно остается в силе также и для случая, когда $\varphi(x)$ — непрерывная квазивогнутая функция.

II. Доказательство теоремы 2. Как известно (см., например, [19], лемма 1), решение x^s задачи «блоков» удовлетворяет условию $(x - x^s, \bar{x}^s - x^s) \leq 0$ для всех $x \in Q$. Отсюда следует, что $Q \subset Q^s$ для любого s и, следовательно,

$$\varphi(\bar{x}^s) \geq \varphi^* = \max_{x \in G \cap Q} \varphi(x). \quad (19)$$

Далее, так как $Q^s \subset Q^{s-1}$, то последовательность $\varphi(\bar{x}^s)$ монотонно не возрастает. В силу (19) и условия теоремы из последовательности $\bar{x}^s$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\bar{x}^{s_j} \rightarrow \bar{x}^0$ при $j \rightarrow \infty$. Но поскольку $\|x^r - x^l\| \leq \|\bar{x}^r - \bar{x}^l\|$ для любых r и l (см. [19], лемма 2), то и последовательность x^{s_j} сходится: $x^{s_j} \rightarrow x^0$. Из определения Q^s и $\bar{x}^s$ имеем $(\bar{x}^{s_j+1} - x^{s_j}, \bar{x}^{s_j} - x^{s_j}) \leq 0$, $j = 1, 2, \dots$. Поэтому $(\bar{x}^0 - x^0, \bar{x}^0 - x^0) \leq 0$, т. е. $\bar{x}^0 = x^0$.

В силу замкнутости G и Q $\bar{x}^0 \in G \cap Q$, поэтому $\varphi(\bar{x}^s) \leq \varphi^*$. Отсюда и из (19) следует, что $\varphi(\bar{x}^0) = \varphi^*$. Но вместо $\bar{x}^0$ могла бы быть рассмотрена любая предельная точка последовательности $\bar{x}^s$. Теорема доказана.

III. К обоснованию алгоритма $A-B$ (п. 3°). Рассмотрим функцию $f(h) = \max_{x \in V(h)} \varphi(x)$,

$$V(h) = \{x: x \in Q, A(x) \geq h\}, \quad (20)$$

где $\varphi(x)$ — вогнутая функция, $A(x)$ — вогнутая вектор-функция, Q выпукло, замкнуто, ограничено. Функция $f(h)$ определена на множестве $H = \{h: V(h) \neq \emptyset\}$, вогнута, непрерывна и монотонно не возрастает на этом множестве.

Будем предполагать, что $H \neq \emptyset$; тогда, как легко видеть, и внутренность H^0 множества H не пуста. Пусть $h^0 \in H^0$, $f(h^0) = \varphi(x^0)$, $x^0 \in V(h^0)$. По теореме Куна-Таккера, существует вектор $\lambda^0 \leq 0$, такой, что для всех $\lambda \leq 0$ и $x \in Q$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \varphi(x^0) - (\lambda, A(x^0) - h^0) &\geq \varphi(x^0) - (\lambda^0, A(x^0) - h^0) \geq \\ &\geq \varphi(x) - (\lambda^0, A(x) - h^0), \end{aligned} \quad (21)$$

$$(\lambda^0, A(x^0) - h^0) = 0. \quad (22)$$

Множество векторов λ^0 , удовлетворяющих этим условиям, обозначим через L^0 , а через M^0 — множество опорных функционалов * к функции $f(h)$ в точке h^0 .

Теорема 3. Если $h^0 \in H^0$, то $M^0 = L^0$.

Доказательство. Пусть $\lambda^0 \in L^0$, $f(h^1) = \varphi(x^1)$, $x^1 \in V(h^1)$. Из правого неравенства (21) и (22) получим

$$\begin{aligned} f(h^0) = \varphi(x^0) &\geq \varphi(x^1) - (\lambda^0, A(x^1) - h^0) \geq \varphi(x^1) - (\lambda^0, h^1 - h^0) = \\ &= f(h^1) - (\lambda^0, h^1 - h^0), \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности h^1 следует, что $\lambda^0 \in M^0$.

Обратно, пусть $\lambda^0 \in M^0$, т. е.

$$f(h^1) \leq f(h^0) + (\lambda^0, h^1 - h^0) \quad (23)$$

для всех $h^1 \in H$.

Отсюда следует, что $\lambda^0 \leq 0$. Действительно, если это не так, то найдется последовательность $h^n \in H$, такая, что $(\lambda^0, h^n - h^0) \rightarrow -\infty$, но тогда в силу ограниченности $f(h)$ на H неравенство (23) не может выполняться для всех $h^1 \in H$.

Покажем, теперь, что

$$(\lambda^0, h^0) = (A(x^0), \lambda^0). \quad (24)$$

Имеем $(\lambda^0, h^0) \geq (A(x^0), \lambda^0)$. Положим $h^1 = A(x^0)$, тогда, очевидно, $f(h^1) = f(h^0)$ и из (23) получим $(\lambda^0, A(x^0) - h^0) \geq 0$, откуда и следует (24).

Пусть теперь $x^1 \in Q$, положим в (23) $h^1 = A(x^1)$. С учетом (24) будем иметь

$$\begin{aligned} f(h^0) = \varphi(x^0) - (\lambda^0, A(x^0) - h^0) &\geq f(A(x^1)) - \\ - (\lambda^0, A(x^1) - h^0) &\geq \varphi(x^1) - (\lambda^0, A(x^1) - h^0). \end{aligned} \quad (25)$$

* Функционал p называется опорным в точке h^0 к вогнутой функции $f(h)$, определенной на H , если $f(h) \leq f(h^0) + (p, h - h^0)$ для всех $h \in H$.

С другой стороны, если $\lambda \leq 0$, то

$$\varphi(x^0) - (\lambda, A(x^0) - h^0) \geq \varphi(x^0) - (\lambda^0, A(x^0) - h^0). \quad (26)$$

Неравенства (25) и (26) показывают, что $\lambda^0 \in L^0$. Теорема доказана.

Доказанная теорема, несомненно, известна специалистам, но ранее, по-видимому, не была опубликована. Вторая часть доказательства является по существу элементарным выводом теоремы Куна-Таккера из теоремы о существовании опорного функционала у вогнутой функции. Заметим, что из доказанного утверждения и результатов [19] непосредственно следует формула для производной по лучу функции fh (теорема о маргинальных значениях).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Данциг. Линейное программирование, его применения и обобщения. М., «Прогресс», 1966.
2. А. И. Каценелинбойген, Ю. В. Овсиенко, Е. Ю. Фаерман. Методологические вопросы оптимального планирования социалистической экономики. М., ЦЭМИ АН СССР, 1966.
3. И. Корнаи, Т. Липтак. Планирование на двух уровнях. В сб. Применение математики в экономических исследованиях, т. 3. М., «Мысль», 1965.
4. E. Malinwaud. Procédures décentralisées pour la préparation des plans. Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques, 1963 (есть перевод ВИНТИ).
5. В. И. Данилов-Данильян. Задачи большой размерности и итеративные методы оптимального планирования. В сб. Модели и алгоритмы оптимального планирования. М., ЦЭМИ АН СССР, 1966.
6. Ф. Вулф. Новые методы нелинейного программирования. В сб. Применение математики в экономических исследованиях, т. 3. М., «Мысль», 1965.
7. В. А. Волконский. Модель текущего отраслевого планирования и аппроксимация производственных возможностей нефтеперерабатывающего завода. В сб. Математические методы в экономике и планировании, вып. III, М., ЦЭМИ АН СССР, 1965.
8. Т. Н. Первозванская, А. А. Первозванский. Алгоритм поиска оптимального распределения централизованных ресурсов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, № 3.
9. В. А. Волконский. Оптимальное планирование в условиях большой размерности (итеративные методы и принцип декомпозиции). Экономика и матем. методы, 1965, т. 1, вып. 2.
10. Н. З. Шор. О структуре алгоритмов численного решения задач оптимального планирования и проектирования. Дис., Ин-т математики, кибернетики и ГАО АН УССР, Киев, 1964.
11. Ю. М. Ермольев. Методы решения нелинейных экстремальных задач. Кибернетика, 1966, № 4.
12. Б. Т. Поляк. Один общий метод решения экстремальных задач. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 1.
13. Р. Куликовский. Агрегация, оптимизация и управление организационной структурой больших систем. Экономика и матем. методы, 1968, т. 4, вып. 1.
14. Д. Дж. Уайлд. Методы поиска экстремума. М., «Наука», 1967.
15. I. A. Blum. Multidimensional stochastic approximation methods. Ann. Math. Statistics, 1954, v. 25, № 4.
16. В. А. Волконский. Проблемы оптимального планирования. Автореф. докт. дис. Новосибирск, 1967.
17. А. А. Фельдбаум. Вычислительные устройства в автоматических системах. М., Физматгиз, 1959.
18. Л. Г. Гурин, Б. Т. Поляк, Э. В. Райк. Методы проекций для отыскания общей точки выпуклых множеств. Ж. вычисл. математики и матем. физики, 1967, т. 7, № 6.
19. Б. Н. Пшеничный. Выпуклое программирование в нормированном пространстве. Кибернетика, 1965, № 5.

Поступила в редакцию
19 IV 1968