

ТЕОРЕМЫ О МАГИСТРАЛИ В МОДЕЛЯХ НЕЙМАНА-ГЕЙЛА (слабая форма)

С. М. МОВШОВИЧ

(Москва)

При изучении поведения оптимальных траекторий в замкнутых динамических моделях экономики основным является понятие неймановского равновесия сбалансированного роста. В [1] было доказано, что в модели Неймана, когда технологическое множество — многогранный конус, неймановское равновесие всегда существует. В случае произвольной модели Неймана — Гейла это утверждение не имеет места. Одна из целей выделения различных классов моделей Неймана — Гейла в работах [2—5], посвященных теоремам о магистрали, заключается в обеспечении существования неймановского равновесия.

В этих работах рассматривается случай, когда существует единственный равновесный темп роста и соответственно единственная магистраль (луч или грань). В [6] описывается общий случай, когда магистраль не единственна, в предположении существования равновесия.

В настоящей работе приводится обобщение понятия неймановского равновесия и доказывается, что в любой модели Неймана — Гейла существует обобщенное равновесие. На основе этого понятия исследуются магистральные свойства траекторий. Это позволяет доказать теоремы о магистрали в различной форме для более широкого класса моделей.

1°. Модель Неймана-Гейла функционирует в дискретном времени $t = 0, 1, 2, \dots, T, \dots$. Состояние модели в момент времени t задается неотрицательным n -мерным вектором $y_t = (y_t^1, \dots, y_t^n)$, i -я компонента которого показывает наличие i -го «продукта» в момент t . Переход от состояния y_t к состоянию y_{t+1} осуществляется с помощью технологического процесса (y_t, y_{t+1}) , в котором y_t можно рассматривать как затраты в начале цикла $(t, t+1)$, а y_{t+1} как выпуск в конце цикла. Относительно множества K технологических процессов принимаются следующие предположения.

I. K — выпуклый замкнутый конус, принадлежащий положительному ортанту $2n$ -мерного евклидова пространства R^{2n} .

II. Если $(0, y) \in K$, то $y = 0$.

III. Существует процесс $(x, y) \in K$ такой, что $y > 0$.

Помимо условий I—III, будем иногда в дальнейшем (всякий раз оговаривая это) принимать следующее предположение.

IV. Если $(x, y) \in K$ и $y' \leq y$, то $(x, y') \in K$. Экономическую трактовку условий I—IV можно найти, например, в [7].

Если y_0 — начальное состояние модели, то последовательность $Y = (y_0, y_1, \dots, y_t, y_{t+1}, \dots)$ называется траекторией развития модели, если $(y_t, y_{t+1}) \in K$ для всех $t = 0, 1, \dots$.

Неймановским равновесием сбалансированного роста называют тройку объектов: положительное число α — темп сбалансированного роста, вектор цен p_0 и процесс $(x_0, y_0) \in K$, удовлетворяющие условиям

$$\alpha x_0 \leq y_0, \quad (1)$$

$$ap_0x \geq p_0y \quad \text{для всех } (x, y) \in K. \quad (2)$$

$$p_0y_0 > 0. \quad (3)$$

Здесь вектор цен $p_0 = (p_0^1, \dots, p_0^n) \geq 0$, $\sum_{i=1}^n p_0^i = 1$, pz — скалярное

произведение векторов p и z .

Как отмечалось, в [1] показано, что в случае, когда K — многогранный конус, равновесие (1)–(3) всегда существует, причем равновесий с различными α не более, чем $\min(m, n)$, где m — число ребер конуса K . Отсюда почти непосредственно следует, что и в случае произвольной модели Неймана — Гейла равновесий с различными α не более n . Оценка возможного количества равновесных α установлена в [8]. Однако, как следует из приведенного примера, существование равновесия не гарантируется.

Пример 1. Пусть множество технологических процессов

$$K_1 = \left\{ (x, y) : x = \lambda_\infty x_\infty + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s x_s, \quad 0 \leq y \leq y' = \lambda_\infty y_\infty + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s y_s, \right. \\ \left. \lambda_s \geq 0, \lambda_\infty \geq 0, \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s < \infty \right\},$$

где

$$x_s = \left(1, \frac{1}{\sqrt{s}}, 1 \right), \quad y_s = \left(2, \frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{1}{s}, 1 + \frac{1}{\sqrt{s}} \right), \\ x_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} x_s = (1, 0, 1), \quad y_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} y_s = (2, 0, 1).$$

Нетрудно показать, что множество K_1 удовлетворяет условиям I–IV.

Докажем, что в модели с конусом K_1 равновесия не существует. Найдем сначала наибольшее α , удовлетворяющее (1).

Из (1) следует, что $\alpha \leq \max_{K_1} \min_{1 \leq i \leq 3} [y^i / x^i]$, т. е.

$$\alpha \leq \max_{\lambda_s \geq 0, \lambda_\infty \geq 0} \min \left[2, \frac{\sum \lambda_s ((1/\sqrt{s}) - (1/s))}{\sum (\lambda_s / \sqrt{s})}, \frac{\sum \lambda_s (1 + (1/\sqrt{s})) + \lambda_\infty}{(\lambda_\infty + \sum \lambda_s)} \right]. \quad (4)$$

Максимум, равный единице, достигается при $\lambda_s = 0$, $s = 1, \dots$, $\lambda_\infty > 0$ и $y = y'$. Таким образом, при равновесии необходимо, чтобы $\alpha \leq 1$.

Случай $\alpha = 1$. Так как значение $\alpha = 1$ достигается, когда все $\lambda_s = 0$, то (1) выполняется только для процесса (x_∞, y_∞) , т. е. равновесный процесс (x_0, y_0) определяется единственным образом.

Определим вектор цен p_0 , удовлетворяющий (2). Из (2) для процессов (x_s, y_s) следует, что

$$p_0^1 + p_0^2 \frac{1}{\sqrt{s}} + p_0^3 \geq 2p_0^1 + \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{1}{s} \right) p_0^2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{s}} \right) p_0^3, \quad (5)$$

$$\text{т. е. } p_0^1 \leq \frac{1}{s} p_0^2 - \frac{1}{\sqrt{s}} p_0^3, \quad s = 1, \dots,$$

и, следовательно, $p_0^1 = p_0^3 = 0$, $p_0^2 = 1$. Условие (3) для p_0 и $y_0 = y_\infty$ не выполняется, т. е. при $\alpha = 1$ равновесие невозможно.

Случай $\alpha < 1$. Из условия (2) для процесса (x_∞, y_∞) следует, что $\alpha(p_0^1 + p_0^3) \geq 2p_0^1 + p_0^3$, т. е. снова $p_0^1 = p_0^3 = 0$, $p_0^2 = 1$. Из этого же условия для процессов (x_s, y_s) при $p_0 = (0, 1, 0)$ получим $\alpha \geq 1 - (1/\sqrt{s})$ для всех s .

Следовательно, равновесие при $\alpha < 1$ также невозможно.

2°. Для каждого индекса $k = 1, \dots, n$, т. е. для каждого вида продуктов, сформулируем задачу математического программирования (назовем ее задачей M_k)

$$\alpha \rightarrow \sup, \quad (6)$$

$$y \geq \alpha x, \quad (7)$$

$$(x, y) \in K, \quad (8)$$

$$y^k = 1. \quad (9)$$

Верхнюю грань значений α , удовлетворяющих условиям (7) — (9) в задаче M_k , обозначим через α_k и назовем максимальным *теплым сбалансированного роста* k -го продукта. Из замкнутости K и предположений II и III очевидно, что $0 < \alpha_k < \infty$, причем верхняя грань, вообще говоря, не достигается.

Решением задачи M_k называют либо процесс (x_k, y_k) такой, что условия (7) — (9) выполняются при $\alpha = \alpha_k$; либо, если такого процесса не существует, последовательность процессов (x_{ks}, y_{ks}) , $s = 1, \dots$, такую, что для s -го процесса условия (7) — (9) выполняются при $\alpha = \alpha_k - \varepsilon_s$, $\varepsilon_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Пример 2. Пусть множество технологических процессов

$$K_2 = \left\{ (x, y) : x = \lambda_\infty x_\infty + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s x_s, y = \lambda_\infty y_\infty + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s y_s; \lambda_\infty \lambda_s \geq 0, \right. \\ \left. \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s < \infty \right\},$$

где

$$x_s = \left(\frac{1}{s}, 1 \right), y_s = \left(\frac{1}{s+1}, 1 \right), x_\infty = (0, 1), y_\infty = (0, 1).$$

Рассмотрим задачу M_1 .

Из условия (9) следует

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_s}{s+1} = 1. \quad (10)$$

Наибольшее значение α , достижимое на процессе (x, y) , удовлетворяющем (10), меньше единицы. Действительно, из первого неравенства (7) следует

$$\alpha \leq \sum \frac{\lambda_s}{s+1} / \sum \frac{\lambda_s}{s} < 1,$$

так как $\lambda_s > 0$ хотя бы для одного s . Вместе с тем $\sup \alpha = 1$, что следует из рассмотрения последовательности процессов $((s+1)x_s, (s+1)y_s)$, $s = 1, \dots$, удовлетворяющих (7) — (9) при $\alpha = s/(s+1)$. Значение $\alpha = 1$ достигается лишь на процессе (x_∞, y_∞) , не удовлетворяющем (9).

Введем в рассмотрение множества индексов $A^k = \{i : \alpha_i \leq \alpha_k\}$, т. е. множество A^k состоит из индексов тех продуктов, у которых максимальный

темп сбалансированного роста не превосходит α_k . Обозначим n_k — число элементов множества A^k .

Наряду с пространством продуктов R^n и пространством технологических процессов R^{2n} рассмотрим n_k -мерное пространство продуктов $R^{(k)} \equiv R^{n_k}$ принадлежащих A^k , и $2n_k$ -мерное пространство процессов $R_2^{(k)} \equiv R^{2n_k}$.

Если $\bar{x}$ — проекция x на пространство $R^{(k)}$, то

$$\bar{x}^i = \begin{cases} x^i, & \text{если } i \in A^k, \\ 0, & \text{если } i \notin A^k. \end{cases}$$

Пусть K^l — проекция конуса K на пространство $R_2^{(l)}$. Каждой задаче M_l , $l = 1, \dots, n$, сопоставим следующую задачу $\bar{M}_l$

$$\alpha \rightarrow \max, \quad (11)$$

$$y \geq \alpha \bar{x}, \quad (12)$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in K^l, \quad \bar{x} + \bar{y} \neq 0. \quad (13)$$

Лемма 1. Задача $\bar{M}^l$ разрешима. Наибольшее значение α при условиях (12), (13) равно α_l .

Доказательство. Покажем сначала, что при условиях (12), (13) $\sup \alpha = \alpha_l$. Очевидно, $\sup \alpha \geq \alpha_l$. Предположим теперь, что $\sup \alpha = \alpha' > \alpha_l$. Отсюда для некоторого индекса s найдутся число $\varepsilon > 0$ и процесс $(x_s, y_s) \in K$, для которого

$$y_s \geq (\alpha_s + \varepsilon)x_s, \quad y_s^s = 1, \quad (14)$$

что противоречит определению α_s .

Действительно, для $0 < \varepsilon' < \alpha' - \alpha_l$ найдется процесс $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in K^l$, удовлетворяющий (12) при $\alpha = \alpha' - \varepsilon'$. Найдется, очевидно, индекс $s \in A^l$ такой, что $\bar{y}_0^s > 0$. Так как $\alpha_s \leq \alpha_l$, то при $0 \leq \varepsilon_1 < \alpha' - \varepsilon' - \alpha_s$

$$\bar{y}_0 \geq (\alpha_s + \varepsilon_1)\bar{x}_0, \quad \bar{y}_0^s > 0. \quad (15)$$

Поскольку α_s — верхняя грань значений α в задаче M_s , то для произвольного прообраза $(x_0, y_0) \in K$ процесса $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ и некоторого множества R индексов $r \notin A^l$ выполняются неравенства

$$y_0^r < (\alpha_s + \varepsilon_1)x_0^{r,+} \in R. \quad (16)$$

Вместе с тем существуют такие положительные ε и ε_2 , $\varepsilon < \varepsilon_1$, $\varepsilon_2 < \alpha_r - \alpha_s - \varepsilon$, что для каждого $r \in R$ найдется процесс $(x_r, y_r) \in K$, для которого

$$y_r \geq (\alpha_r - \varepsilon_2)x_r, \quad y_r^r > 0. \quad (17)$$

Покажем, что при достаточно больших $\lambda_r \geq 0$ и подходящей нормировке процесс

$$(x_s, y_s) = \left(x_0 + \sum_{r \in R} \lambda_r x_r, y_0 + \sum_{r \in R} \lambda_r y_r \right)$$

удовлетворяет условиям (14).

Если $i \notin R$, то из (15), (17), определения множества R и чисел ε и ε_2 следует, что $y_s^i \geq (\alpha_s + \varepsilon)x_s^i$ при любых $\lambda_l \geq 0$.

Если $i \in R$ и $x_r^i = 0$ для всех $r \in R$, то i -е неравенство (14) выполняется при $\lambda_i \geq ((\alpha_s + \varepsilon)x_0^i - y_0^i)/y_i^i$. Если $i \in R$ и $x_v^i > 0$ для некоторого $v \in R$, то i -е неравенство (14) выполняется при $\lambda_i \geq ((\alpha_s + \varepsilon)x_0^i - y_0^i)/(\alpha_v - \alpha_s - \varepsilon - \varepsilon_2)$. Так как $y_s^s \geq y_0^s > 0$, то подходящей нормировкой

можно добиться равенства $y_s^s = 1$. Итак, $\sup \alpha = \alpha_l$. На конусе K^l определим функцию $\alpha_l(\bar{x}, \bar{y})$, равную наибольшему значению α , удовлетворяющему (12). Очевидно, $\alpha_l(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{i: \bar{x}^i + \bar{y}^i > 0} \bar{y}^i / \bar{x}^i$. Так как $\sup_{K^l} \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_{\bar{M}^l} \alpha = \alpha_l < \infty$, то из $\bar{x} = 0$ следует $\bar{y} = 0$, и функция $\alpha_l(\bar{x}, \bar{y})$ определена всюду в K^l , кроме вершины. Функция $\alpha_l(\bar{x}, \bar{y})$ полунепрерывна сверху и положительно однородна нулевой степени. Поэтому она достигает максимума на конусе K^l . Лемма доказана.

Отметим, что использованный здесь метод построения темпов сбалансированного роста $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ близок к описанному в [7].

Теорема 1. *Существуют такие числа $c > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и любого $k = 1, \dots, n$, найдется вектор цен $p_k(\varepsilon)$, удовлетворяющий условиям*

$$p_k(\varepsilon)y \leq (\alpha_k + \varepsilon)p_k(\varepsilon)x \text{ для всех } (x, y) \in K, \quad (18)$$

$$p_k^i(\varepsilon) \geq c\varepsilon \text{ для всех } i \in A^k, \quad (19)$$

$$p_k^i(\varepsilon) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad \sum_{i=1}^n p_k^i(\varepsilon) = 1. \quad (20)$$

Доказательство. Рассмотрим конус K^k и множество

$$W_k(\varepsilon) = \{w(\varepsilon): w(\varepsilon) = \bar{y} - (\alpha_k + \varepsilon)\bar{x}, (\bar{x}, \bar{y}) \in K^k\}.$$

Очевидно, $W_k(\varepsilon)$ — выпуклый замкнутый конус в пространстве $R^{(k)}$. Определим в R^n угловое расстояние между точками x и y , $x \neq 0$, $y \neq 0$.

$$\rho_y(x, y) = \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right|, \quad \text{где } |x| = \left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2 \right)^{1/2}. \quad (21)$$

Определим также угловое расстояние между замкнутыми конусами X и Y

$$\rho_y(X, Y) = \min_{x \in X} \min_{y \in Y} \rho_y(x, y).$$

Покажем сначала, что найдутся такие $a > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$

$$\rho_y(W_k(\varepsilon), R_+^{(k)}) \geq a\varepsilon, \quad (22)$$

где $R_+^{(k)}$ — неотрицательный ортант n_k -мерного пространства $R^{(k)}$.

Наряду с множеством $W_k(\varepsilon)$ рассмотрим множество

$$W_k = \{w: w = \bar{y} - \alpha_k \bar{x}, (\bar{x}, \bar{y}) \in K^k, |w| = 1\}.$$

Для любой точки $w \in W_k$ имеет место одно из двух:

$$\begin{aligned} &\text{либо } \min_i w^i \leq -\sigma \quad \text{для некоторого } \sigma > 0, \\ &\text{либо } \max_{i: w^i \leq 0} \bar{x}^i \geq a' \quad \text{для некоторого } a' > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Пусть это неверно. Тогда найдется последовательность $w_l \in W_k$, $l = 1, \dots$, такая, что $\min_i w_l^i \rightarrow 0$ и $\max_{i: w_l^i \leq 0} \bar{x}^i \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$.

Выделим из $\{w_l\}$ сходящуюся подпоследовательность и, учитывая замкнутость W_k , найдем точку $w_0 = \bar{y}_0 - \alpha_k \bar{x}_0$, для которой $w_0 \geq 0$, $\max_{i: w_0^i = 0} \bar{x}_0^i =$

$= 0$. Отсюда α_k не является решением задачи $\bar{M}_k$. Противоречие доказывает справедливость (23).

Положим $\varepsilon_1 = \sigma / a'$. Тогда для любой точки

$$w(\varepsilon) \in W_h(\varepsilon) \cap \{|w| = 1\}, \quad \varepsilon < \varepsilon_1, \quad (24)$$

$$\min w^i(\varepsilon) \geq -a'\varepsilon.$$

Из (21) и (24) сразу следует (22) для некоторого $0 < a < a'$.

Положим $R_+^{(h)}(\varepsilon') = \{z: \rho_y(z, R_+^{(h)}) \leq \varepsilon'\}$, т. е. $R_+^{(h)}(\varepsilon') - \varepsilon'$ — расширение неотрицательного ортанта. Если $\varepsilon' = a\varepsilon/2$, то $R_+^{(h)}(\varepsilon') \cap W_h(\varepsilon) = \{0\}$ и существует гиперплоскость с направляющим вектором $\bar{p}(\varepsilon)$, разделяющая конусы $R_+^{(h)}(\varepsilon')$ и $W_h(\varepsilon)$, причем

$$\bar{p}(\varepsilon)w(\varepsilon) \leq 0, \quad w(\varepsilon) \in W_h(\varepsilon), \quad (25)$$

$$\bar{p}(\varepsilon)\bar{x} \geq 0, \quad \bar{x} \in R_+^{(h)}(\varepsilon'). \quad (26)$$

Дополним $\bar{p}(\varepsilon)$ нулевыми компонентами на местах $i \notin A^h$ до n -мерного вектора $p(\varepsilon)$ и нормируем его так, чтобы $\sum_{i=1}^n p^i(\varepsilon)$.

Из (25) сразу следует (18). Неравенства (19) и (20) следуют из (26). Чтобы убедиться в этом, заметим, что наибольшая компонента $\bar{p}(\varepsilon)$ (пусть ее номер l) превосходит $1/n$, а векторы $\bar{z}_s$ с компонентами

$$\bar{z}_s^i = \begin{cases} \lambda - & \text{при } i = l, \\ \sqrt{1 - \lambda^2} & \text{при } i = s, s \in A^h \setminus \{l\}, \\ & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

принадлежат $R_+^{(h)}(a\varepsilon/2)$ при $\lambda \leq (a\varepsilon/8)(16 - a^2\varepsilon^2)^{1/2}$.

При этом из (26) следует, что $\bar{p}^s(\varepsilon) \geq \lambda/n\sqrt{1 - \lambda^2}$. По выбранному $0 < \sigma < a/2n$ найдется такое $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$, что $\lambda/n\sqrt{1 - \lambda^2} \geq (a/2n - \sigma)\varepsilon$, когда $\varepsilon < \varepsilon_0$. Для завершения доказательства остается положить $c = (a/2n) - \sigma$.

Следуя принятому определению (1) — (3), естественно назвать *неймановским ε -равновесием* тройку объектов: число a , вектор-функцию цен $p(\varepsilon)$ и процесс-функцию $x_0(\varepsilon_1)$, $y_0(\varepsilon_1)$, удовлетворяющую соотношениям

$$y_0(\varepsilon_1) \geq (a - \varepsilon_1)x_0(\varepsilon_1), \quad (27)$$

$$(a + \varepsilon)p_0(\varepsilon)x \geq p_0(\varepsilon)y \text{ для всех } (x, y) \in K, \quad (28)$$

$$p_0(\varepsilon)y_0(\varepsilon_1) > 0 \quad (29)$$

для любых $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon > 0$.

Из теоремы 1 непосредственно следует существование ε -равновесия. Равновесным a может быть любое a_i , $i = 1, \dots, n$, причем для $a = \max_{1 \leq i \leq n} a_i$

можно положить $\varepsilon_1 = 0$. Заметим, что не существует равновесных a , отличных от всех a_i . Действительно, найдется индекс l такой, что $y_0^l(\varepsilon_1^h) > 0$ на последовательности $\varepsilon_1^h \rightarrow 0$. Тогда из (27) следует, что $a \leq a_l$. Если, однако, $a < a_l$, то неравенство (28) нарушается на процессах, образующих решение задачи M_l . Таким образом, ε -равновесия возможны только при a , равных $a_1, \dots, a_n$.

3°. Приведем некоторые определения и вспомогательные результаты, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Пусть $Y(y_0, y_1, \dots, y_t, \dots)$ — траектория. Максимальным темпом роста k -го продукта на последовательности Y будем называть верхний предел

$$\theta_k(Y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{\sqrt[k]{y_T^k}}. \quad (30)$$

Следствие 1. Максимальный темп роста k -го продукта на произвольной траектории не превосходит α_k .

Доказательство. Применяя последовательно неравенство (28) и учитывая $p_k^h(\varepsilon) > 0$, получим

$$y_T^k \leq \frac{(\alpha_k + \varepsilon)^T}{p_k^h(\varepsilon)} p_k(\varepsilon) y_0, \quad (31)$$

т. е. $\theta_k(Y) \leq \alpha_k + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $\theta_k(Y) \leq \alpha_k$.

Утверждение следствия 1 может быть несколько усилено. Пусть $y^h(T)$ — наибольшее значение k -й компоненты вектора y_T на множестве траекторий $Y_T = (y_0, \dots, y_T)$. Максимальным темпом роста k -го продукта будем называть

$$\theta_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{\sqrt[k]{y^h(T)}}. \quad (32)$$

Из (31) сразу следует, что $\theta_k \leq \alpha_k$.

Величину $\theta_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{\sqrt[k]{y^h(T)}}$, если она существует, будем называть устойчивым темпом роста k -го продукта. Из определения следует, что по произвольному T найдется $\varepsilon(T)$ такое, что для всех $t \geq T$ выполняется

$$y^h(t) \geq (\alpha_k - \varepsilon(T))^t = \alpha_k^t (1 - (\varepsilon(T) / \alpha_k))^t.$$

Если для некоторого $c > 0$ справедливо $(1 - (\varepsilon(T) / \alpha_k))^T = O(1 / T^c)$, то α_k — сильно устойчивый темп роста k -го продукта.

Если θ_k — устойчивый темп роста и существует такое $d > 0$, что для всех T , начиная с некоторого, $y^h(T) \geq d \theta_k^T$, то будем называть величину θ_k постоянным темпом роста k -го продукта. При заданном технологическом множестве K темп роста может быть как устойчивым, так и неустойчивым в зависимости от начального состояния y_0 .

Введем следующее множество ε -равновесных векторов цен

$$P_k(\varepsilon, \sigma) = \{p(\varepsilon) : (\alpha_k + \varepsilon)p(\varepsilon)x \geq p(\varepsilon)y, \quad \forall (x, y) \in K, \\ p^i(\varepsilon) \geq \sigma, \quad \forall i \in A^k\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

В силу теоремы 1 множество $P_k(\varepsilon, \sigma)$ непусто при $\varepsilon > 0$ для всех σ , не превосходящих $\sigma(\varepsilon) = c\varepsilon$.

Лемма 2. Точечно-множественное отображение $P_k(\varepsilon, \lambda(\varepsilon))$ непрерывно в точке $\varepsilon = +0$ при $0 < \lambda(\varepsilon) = o(\varepsilon)$.

Доказательство. Полунепрерывность сверху отображения $P_k(\varepsilon, \lambda(\varepsilon))$ очевидна. Пусть p — произвольная точка $P_k(0, 0)$. Зададимся последовательностью $\varepsilon_l \rightarrow 0$ и в каждом множестве $P_k(\varepsilon_l, \sigma(\varepsilon_l))$ выберем точку p_l , ближайшую к p . Такая точка существует в силу замкнутости множеств $P_k(\varepsilon, \sigma)$. Расстояние $\rho(p, p_l) \leq G$, где G — диаметр $(n-1)$ -мерного симплекса. Все точки отрезка $[p, p_l] \in P_k(\varepsilon_l, 0)$. Так как $p_l^i \geq c\varepsilon_l$, $i \in A^k$, а $p^i \geq 0$, то точка $p_l(\lambda_l) = \lambda_l p_l + (1 - \lambda_l)p \in P_k(\varepsilon_l, \lambda_l c\varepsilon_l)$ при $0 \leq \lambda_l \leq 1$. Положим $\lambda_l^0 = \lambda(\varepsilon_l) / c\varepsilon_l$. Тогда $\lambda_l^0 > 0$ и $\lambda_l^0 \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Так как расстояние $\rho(p_l(\lambda_l^0), p) \leq \lambda_l^0 G$, то $p_l(\lambda_l^0) \rightarrow p$. Лемма доказана.

Рассмотрим множества технологических процессов $F_k(p) = \{(x, y) : (x, y) \in K, \alpha_k p x = p y, p \in P_k(0, 0)\}$ и $F_k = \bigcap_{p \in P_k(0, 0)} F(p)$, называемое обычно [3] неймановской гранью.

Чтобы убедиться в том, что F_h непусто, достаточно из последовательности процессов решения задачи M_h выбрать сходящуюся подпоследовательность и перейти к пределу (x_h^*, y_h^*) . Процесс $(x_h^*, y_h^*) \in F_h(p)$ при любом $p \in P_h(0, 0)$, т. е. $(x_h^*, y_h^*) \in F_h$.

Легко проверить равенства

$$F_h = F_h(p_h^*), \quad (33)$$

где p_h^* — отрицательно внутренняя точка $P_h(0, 0)$, и

$$F_h = F_l, \text{ если } \alpha_h = \alpha_l. \quad (34)$$

Наряду с множествами $F_h(p)$ рассмотрим множества $F_h(\varepsilon, p(\varepsilon)) = \{(x, y) : (x, y) \in K, (\alpha_h + \varepsilon)p(\varepsilon)x \geq p(\varepsilon)y \geq \alpha_h p(\varepsilon)x, p(\varepsilon) \in P_h(\varepsilon, c, \varepsilon)\}$. Множество $F_h(\varepsilon, p(\varepsilon))$ непусто, поскольку оно содержит процесс (x_h^*, y_h^*) . Будем оценивать близость в пространстве процессов R^{2n} с помощью углового расстояния (21). При этом точечно-множественное отображение $F_h(\varepsilon, p(\varepsilon))$ полунепрерывно сверху в любой точке $(0, p)$, $p \in P_h(0, 0)$. Отсюда следует, что для любого $p \in P_h(0, 0)$ и некоторого ε_0 , зависящего от δ ,

$$F_h^{\delta/2}(\varepsilon, p(\varepsilon)) \subset F_h^\delta(p) \quad (35)$$

для всех ε и $p(\varepsilon)$, таких, что $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, $|p(\varepsilon) - p| \leq \varepsilon_0$. Здесь F_h^δ — δ -окрестность множества F . Из леммы 2 следует, что для любого ε_0 найдутся такие $p(\varepsilon) \in P_h(\varepsilon, \lambda(\varepsilon))$, что $|p(\varepsilon) - p| < \varepsilon_0$.

Лемма 3 (обобщение леммы Раднера [2], Мак-Кензи [3]). Для любого $\delta > 0$ найдутся такие $\varepsilon_0 > 0$ и $s > 0$, что

$$p(\varepsilon)y \leq (\alpha_h - s)p(\varepsilon)x \quad (36)$$

для всех процессов $(x, y) \notin F_h^\delta$ и всех $\varepsilon < \varepsilon_0$, $|p(\varepsilon) - p_h^*| \leq \varepsilon_0$.

Доказательство. Из (33), (35) и условия $(x, y) \notin F_h^\delta$ следует, что интересующие нас процессы $(x, y) \notin F_h^{\delta/2}(\varepsilon, p(\varepsilon))$. Дальнейшее доказательство почти дословно повторяет доказательства аналогичных утверждений в [2, 3].

Следствие 2. Пусть $Y_T = (y_0, y_1, \dots, y_T)$ — траектория. Если процессы $(y_{i_l}, y_{i_l+1}) \notin F_h^\delta$ для $l = 1, \dots, r$, то при $\varepsilon < \varepsilon_0$ найдутся такие $p_h(\varepsilon)$, что

$$p_h^* y_T \leq (\alpha_h - s)^r \alpha_h^{T-r} p_h^* y_0,$$

$$p_h(\varepsilon) y_T \leq (\alpha_h - s)^r (\alpha_h + \varepsilon)^{T-r} p_h(\varepsilon) y_0, \quad (37)$$

причем при $(p_h^*)^k > 0$

$$y_T^k \leq (\alpha_h - s)^r \alpha_h^{T-r} p_h^* y_0 / (p_h^*)^k, \quad (38)$$

при $(p_h^*)^k = 0$

$$y_T^k \leq (\alpha_h - s)^r (\alpha_h + \varepsilon)^{T-r} p_h(\varepsilon) y_0 / \lambda(\varepsilon).$$

Доказательство неравенств (37) следует из r -кратного применения (36) и $(T-r)$ -кратного применения (28) при $\varepsilon \geq 0$. Соотношения (38) непосредственно следуют из (37) и существования $p(\varepsilon) \in P_h(\varepsilon, \lambda(\varepsilon))$, удовлетворяющего (37).

Если положить $\varepsilon = \alpha_h / T$, то из (38) можно получить оценку сверху количества k -го продукта, достижимого к моменту T

$$y_T^k \leq CT^{1+\sigma} \alpha_h^T,$$

где $\sigma > 0$ — произвольное число; C не зависит от T . Эту оценку нельзя улучшить, так как легко строится модель, в которой $y_T^k = T\alpha_k T$.

4°. Пусть на множестве траекторий $Y_T = (y_0, \dots, y_T)$ задана функция общественной полезности, зависящая только от состояния в конечный момент времени $u(Y_T) \equiv u(y_T)$.

Траектория $\tilde{Y}_T$, на которой $u(Y_T)$ достигает наибольшего значения, называется *и-оптимальной*. Введенные выше понятия темпов роста k -го продукта распространим на функцию общественной полезности.

Исследуем поведение *и-оптимальных* траекторий при достаточно больших T . Рассмотрим сначала случай, когда $u(y) = uy$, $u \geq 0$. Определим некоторый номер продукта k и темп роста α_k такие, что

$$\alpha_k = \max_{i: u^i > 0} \alpha_i. \quad (39)$$

Из следствия 2 очевидно, что максимальный темп роста функции общественной полезности не превосходит α_k .

Приведем сначала утверждение, опирающееся на обычное понятие неймановского равновесия (1) — (3). Пусть $B_k = \{i : \alpha_i = \alpha_k\}$.

Теорема 2. Пусть конус K удовлетворяет условиям I—III, α_k — постоянный темп роста общественной полезности при данном y_0 . Если $(p_k^*)^i > 0$ для всех $i \in B^k \cap \{i : u^i > 0\}$, то для любого $\delta > 0$ найдется такое M_0 , что для любого T и любой *и-оптимальной* траектории число циклов, когда $(y_t, y_{t+1}) \notin F_k^\delta$, не превосходит M_0 .

Доказательство следует плану, предложенному Раднером [2]. Отличие заключается в необходимости доказательства существования такого $D > 0$, что

$$Dp_k^* \tilde{y}_t \geq u \tilde{y}_t \quad (40)$$

для всех $t \geq t_0$ и любой *и-оптимальной* траектории $\tilde{Y}_t$.

Представим

$$uy = u^I y^I + u^{II} y^{II} = \sum_{i \in B^k} u^i y^i + \sum_{i \in B^k} u^i y^i.$$

Так как максимальный темп роста $u^{II} y^{II}$ меньше α_k , то для некоторого $\alpha < \alpha_k$ и любой траектории Y

$$u^{II} y_t^{II} \leq \alpha^t \quad \text{для всех } t \geq t_1. \quad (41)$$

Из условия постоянства темпа роста общественной полезности

$$u \tilde{y}_t \geq d \alpha_k^T, \quad (42)$$

т. е., учитывая (41), для всех $T \geq t_0$

$$u^I \tilde{y}_T^I \geq u^{II} \tilde{y}_T^{II}. \quad (43)$$

Положим $u_{\max} = \max_{i \in B^k} u^i$, $p_{\min}^* = \min_{i \in B^k} (p_k^*)^i > 0$. Тогда при $D = 2 \times (u_{\max}/p_{\min}^*)$ из (43) и условий теоремы следует $Dp_k^* \tilde{y}_T = 2(u_{\max}/p_{\min}^*) \times p_k^* \tilde{y}_T \geq 2u^I \tilde{y}_T^I \geq u \tilde{y}_T$, $T \geq t_0$. Если число циклов, когда $(\tilde{y}_t, \tilde{y}_{t+1}) \notin F_k^\delta$, равно M , то из (42), (40) и (37) следует при $T \geq t_0$, что

$$d \alpha_k^T \leq u \tilde{y}_T \leq Dp_k^* \tilde{y}_T \leq D(\alpha_k - s)^{T-M} \alpha_k^{T-M} p_k^* y_0,$$

т. е.

$$M \leq M_0 = \max \left(t_0, \left\lceil \ln \frac{d}{Dp_k^* y_0} \middle/ \ln \left(1 - \frac{s}{\alpha_k} \right) \right\rceil \right).$$

Теорема 3. Пусть конус K удовлетворяет условиям I—III, α_k — сильно устойчивый темп роста общественной полезности при заданном y_0 . Тогда

для любого $\delta > 0$ найдется такое m_0 , что для любого T и любой u -оптимальной траектории число циклов, когда $(\tilde{y}_t, \tilde{y}_{t+1}) \notin F^\delta$, не превосходит $m_0 \ln T$.

Доказательство. По заданному δ найдется такое ε_0 , что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и произвольного $p \in P_h(\varepsilon, \lambda(\varepsilon))$ $u y \leq (u_{\max} / \lambda(\varepsilon)) p y$. По заданному T найдется такое ε_T , что $d(\alpha_k - \varepsilon_T)^T \leq u \tilde{y}_T$.

Из этих соотношений и (37) следует, что число циклов M , когда $(\tilde{y}_t, \tilde{y}_{t+1}) \notin F_h^\delta$, должно удовлетворять условию

$$\left(1 - \frac{s}{\alpha_k}\right)^M \geq G \left[\lambda(\varepsilon) \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\alpha_k}\right)^T \left/ \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha_k}\right)^{T-M} \right. \right], \quad (44)$$

где $G = d p y_0 / u_{\max}$.

Заметим, во-первых, что из (44) следует $T - M \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$ и любых достаточно малых ε и ε_T . Поэтому при достаточно большом T можно положить $\varepsilon = \alpha_k / (T - M)$. По определению сильной устойчивости найдется число $c_1 > 0$ такое, что при $\varepsilon_T = \varepsilon(T)$ и достаточно большом T выполняется $(1 - (\varepsilon(T) / \alpha_k))^T \geq c_1 / T^c$. Оценим правую часть (44) при сделанном выборе ε и ε_T , считая, например, $\lambda(\varepsilon) = c_2 \varepsilon^{1+\sigma}$, где $\sigma > 0$ — сколь угодно малое число.

Так как

$$\begin{aligned} \lambda(\varepsilon) \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\alpha_k}\right)^T \left/ \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha_k}\right)^{T-M} \right. &\geq \\ &\geq c_1 c_2 \left(\frac{\alpha_k}{T-M}\right)^{1-\sigma} \frac{1}{T^c} \left/ \left(1 + \frac{1}{T-M}\right)^{T-M} \right., \end{aligned}$$

то при достаточно больших T

$$(1 - s / \alpha_k)^M \geq G_1 / T^c (T - M)^{1+\sigma},$$

где $G_1 = c_1 c_2 \alpha_k^{1+\sigma} G / e$.

Отсюда $M \leq m_0 \ln T$ при $m_0 = (1 + \sigma + c) / |\ln(1 - s / \alpha_k)|$. Теорема доказана.

Замечания. 1. Если существуют такие траектории, что $y^h(T) \geq C T \alpha_k^T$, то число циклов, когда $(\tilde{y}_t, \tilde{y}_{t+1}) \notin F_h^\delta$, как и в условиях теоремы 2, ограничено константой.

2. Порядок оценки, установленной в теореме 3, нельзя улучшить.

Пример 3. Конус K_3 задается процессами

$$\begin{aligned} z_1 &= (0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, \alpha), & z_2 &= (0, 0, 1, 0; 0, 0, \alpha, 0), \\ z_3 &= (0, 1, 0, 0; 0, \alpha, 0, 0), & z_4 &= (1, 1, 0, 0; \alpha, 2\alpha, 0, 0), \\ z_5 &= (0, 1, 1, 0; 0, 0, 0, 1), & z_6 &= (0, 1, 0, 0; 0, \beta, 0, 0), \\ z_7 &= (1, 1, 0, 0; \beta, 2\beta, 0, 0), & y_0 &= (1, 1, 1, 1), \quad c = (0, 0, 0, 1), \\ & & \alpha &> \beta > 1. \end{aligned}$$

В этой модели α — постоянный темп роста. Процессы $z_6, z_7 \notin F_1$. Вместе с тем можно построить оптимальную траекторию, в которой в $N \approx \ln T / (\ln \alpha - \ln \beta)$ циклах используются лишь процессы z_6 и z_7 .

Приведем примеры постоянного, устойчивого и сильно устойчивого темпов роста.

Если $(x_k, y_k = \alpha_k x_k)$ — решение задачи M_k , а состояние x_k достижимо при заданном y_0 за конечное число циклов, то α_k — постоянный темп роста. Действительно, существует траектория $Y = (y_0, y_1, \dots, y_l = x_k, \alpha_k y_l, \dots, y_T = \alpha_k^{T-l} y_l)$, т. е. $u \tilde{y}_T \geq d \alpha_k^T$ для всех T .

Пусть теперь значение α_h в задаче M_h не достигается, т. е. решением задачи является последовательность (x_{hs}, y_{hs}) , $s = 1, 2, \dots$. Ограничимся случаем, когда конус K удовлетворяет условиям I—IV. Поскольку в модели циркулирует конечное число продуктов, не уменьшая общности, можно считать, что последовательность (x_{hs}, y_{hs}) сходится и в каждом ее процессе затрачиваются одни и те же продукты, т. е.

$$x_{h1}^i = 0 \rightarrow x_{hl}^i = 0 \quad \text{для всех } l. \quad (45)$$

Если состояние x_{h1} достижимо, то

$$y^h(T) \geq r_l(\alpha_h - \varepsilon_l) T y_{hl}^h \quad \text{для любого } l \text{ и } T, \quad (46)$$

поскольку существует траектория $Y_T^{(l)} = (y_0, \dots, y_l) = x_{h1}$,

$$r_l(\alpha_h - \varepsilon_l) x_{hl}, \quad r_l(\alpha_h - \varepsilon_l) y_{hl}, \quad r_l(\alpha_h - \varepsilon_l)(\alpha_h - \varepsilon_l) y_{hl}, \dots, \quad r_l(\alpha_h - \varepsilon_l)(\alpha_h - \varepsilon_l)^{T-l-2} y_{hl},$$

где $r_l = \min_{i: x_{hl}^i > 0} x_{h1}^i / x_{hl}^i$.

Из (45) следует, что $r_l > 0$ для всех l .

В (46) будем выбирать различные l для различных T так, чтобы $l(T) \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$ и $\varepsilon_{l(T)} = \alpha_h / T$. Возможность такого выбора следует из определения решения задачи M_h .

Очевидно, $r_{l(T)} \rightarrow 0$, так как в противном случае существует процесс (x_h, y_h) , удовлетворяющий (7)–(9) при $\alpha = \alpha_h$. Пусть $(x_{h\varepsilon}, p_{h\varepsilon})$ — процесс, удовлетворяющий (7)–(9) при $\alpha = \alpha_h - \varepsilon$.

$$\text{Если} \quad |x_{h\varepsilon}| \sim 1/\varepsilon^c \quad (47)$$

для некоторого $c > 0$, то из (46) следует с учетом $y_{hl}^h = 1$ сильная устойчивость темпа роста α_h .

Если (47) не выполняется ни для какого $c > 0$, то сильная устойчивость не имеет места, однако темп роста устойчив, поскольку $\lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt[T]{y^h(T)} \geq \alpha_h - \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$.

Теорема 4. Пусть конус K удовлетворяет условиям I—III, α_h — устойчивый темп роста общественной полезности при заданном y_0 . Тогда для любого $\delta > 0$ и любой ε -оптимальной траектории $\tilde{Y}_T$ отношение числа периодов M , когда $(\tilde{y}_t, \tilde{y}_{t+1}) \notin F_h^\delta$, к длине траектории T стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$.

Доказательство. Предположим, что на некоторой последовательности оптимальных траекторий $\tilde{Y}_T$, $T \rightarrow \infty$, отношение $M/T \rightarrow b > 0$. Используя те же рассуждения, что при выводе (44), получим

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (1 - s/\alpha_h)^{M/T} (1 + \varepsilon/\alpha_h)^{1-(M/T)} \geq \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt[T]{u \tilde{y}_T / \alpha_h^T} \quad (48)$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Поскольку α_h — устойчивый темп роста, правая часть (48) для любой последовательности $\tilde{Y}_T$ равна единице, что невозможно, например, при

$$\varepsilon < \alpha_h \left(1 - \frac{1}{[1 - (s/\alpha_h)]^{b/(1-b)}} \right).$$

Таким образом, предположение $b > 0$ приводит к противоречию, т. е. $M = o(T)$. Теорема доказана.

Если отказаться от требования устойчивости, то теорема о магистрали, вообще говоря, не имеет места даже в случае многогранного конуса K , когда существует равновесие (1)–(3).

Пример 4. Пусть

$$K_4 = \left\{ (x, y) : x = \sum_{j=1}^4 \lambda_j x_j, y = \sum_{j=1}^4 \lambda_j y_j, \lambda_j \geq 0 \right\},$$

где $(x_1, y_1) = (1, 0, 0; 0, 2, 0)$; $(x_2, y_2) = (0, 1, 0; 1, 0, 0)$; $(x_3, y_3) = (1, 0, 0; 0, 0, 1)$; $(x_4, y_4) = (0, 0, 1; 0, 0, 1)$.

Начальное состояние $y_0 = (1, 0, 0)$; коэффициенты функции общественной полезности $u = (1, 0, 0)$. Оптимальные значения функции полезности

$$u\tilde{y}_T = \begin{cases} 0, & T = 2l + 1, \quad l = 0, 1, \dots, \\ 2^l, & T = 2l. \end{cases}$$

Максимальный темп роста $\theta = \sqrt{2}$, однако, он неустойчивый.

Решая задачу M_1 , получим, что $\alpha_1 = \sqrt{2}$ и достигается на процессе $(x_1, y_1) + \sqrt{2}(x_2, y_2)$.

Из (2) следует, что вектор p_0 должен удовлетворять условиям $\sqrt{2}p_0^1 \geq 2p_0^2$; $\sqrt{2}p_0^2 \geq p_0^1$, $\sqrt{2}p_0^4 \geq p_0^3$, т. е.

$$p_1^* = p_0 = \left(0,9 \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}; 0,9 \frac{1}{1 + \sqrt{2}}; 0,1 \right) \in P_1(0,0).$$

и является относительно внутренней точкой. Неймановская грань $F_1 = \{ \lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) \}$. Для $T = 2l + 1$ оптимальной является траектория $Y = (y_0 = (1, 0, 0); y_s = (0, 0, 1), s = 1, \dots, 2l + 1)$, в которой в первом цикле используется процесс (x_3, y_3) , а затем процесс (x_4, y_4) . Процесс $(x_4, y_4) \notin F_1$.

5°. Пусть теперь функция общественной полезности удовлетворяет следующим условиям.

V. $u(y)$ — неотрицательная положительно однородная первой степени функция, удовлетворяющая условию Липшица

$$u(y_1) - u(y_2) \leq L|y_1 - y_2| \quad (49)$$

для любых неотрицательных y_1 и y_2 .

Однородную первой степени функцию $f(z)$ будем называть простой, если $f(z) = 0$, как только хотя бы одна компонента вектора z равна нулю. Каждому вектору $x = (x^1, \dots, x^n) \geq 0$ и множеству $I_s = \{i_1(s), \dots, i_{l(s)}(s)\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ будем сопоставлять вектор $v_s = \{x_{i_1(s)}, \dots, x_{i_{l(s)}(s)}\}$.

Лемма 4. Если однородная первой степени функция n переменных ограничена на сфере $|x| \leq 1$, то она представима в виде конечной суммы простых

$$u(x) = \sum_{s=1}^s f_s(v_s). \quad (50)$$

Доказательство проведем индукцией по числу переменных. Для $n = 1$, очевидно $u(x) = f_1(x)$, так как $u(0) = 0$.

Пусть (50) справедливо для всех функций $(k-1)$ переменной, удовлетворяющих условиям леммы. Рассмотрим функцию $u(x)$, зависящую от k переменных. Могут встретиться два случая:

1) $u(x) = 0$, как только хотя бы одна компонента x равна нулю. По определению $u(x)$ — простая,

2) для некоторого подмножества индексов $I = \{i_1, \dots, i_l\}$ возможно $u(x) > 0$ при $x_i = 0$

для произвольного $i \in I$.

(51)

Обозначим $X^{i_1} = (x_1, \dots, x_{i_1-1}, 0, x_{i_1+1}, \dots, x_k)$ и представим $u(x) = u(X^{i_1}) + (u(x) - u(X^{i_1}))$. Функция $u(X^{i_1})$ удовлетворяет условиям леммы и зависит от $(k-1)$ переменных, т. е. по предположению индукции $u(X^{i_1}) = \sum_s f_s(v_s)$.

Функция $u_1(x) = u(x) - u(X^{i_1})$ также удовлетворяет условиям леммы, и для нее снова может встретиться один из двух случаев. В первом случае лемма доказана. Рассмотрим второй случай. Функция $u_1(x)$ обращается в нуль при $x_{i_1} = 0$. Если $u(x) = 0$ при $x_t = 0$, то и $u_1(x) = 0$ при $x_t = 0$, поскольку при этом $u(X^{i_1}) = 0$.

Поэтому для функции $u_1(x)$ (51) выполняется лишь для собственного подмножества I .

Последовательно переходя к функциям $u_2(x), u_3(x), \dots$, после не более чем $l \leq k$ шагов, придем к случаю (1).

Если функция $u(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то при разложении ее на сумму простых с помощью конструкции, использованной в доказательстве леммы 4, любая простая также удовлетворяет условию Липшица.

Пусть $u(x) = \sum_{s=1}^s f_s(v_s)$, $f_s(v_s)$ — простые, v_s — вектор, сопоставленный множеству I_s . Определим $k(s)$ для каждого s

$$\alpha_{k(s)} = \min_{i \in I_s} \alpha_i$$

и индекс k

$$\alpha_k = \max_{1 \leq s \leq S} \alpha_{k(s)}. \quad (52)$$

Поскольку $f_s(x_{i_1}, \dots, x_{i_v-1}, 0, x_{i_v+1}, \dots, x_{i_{k(s)}}) = 0$ для любого v , то $f_s(v_s) \leq L_s |x_{k(s)}| = L_s x_{k(s)}$, т. е.

$$u(x) \leq L_0 \sum_{s=1}^s x_{k(s)} \text{ при } L_0 = \max_{1 \leq s \leq S} L_s. \quad (53)$$

Если α_k — постоянный, сильно устойчивый или устойчивый темп роста общественной полезности $u(y)$, то, учитывая (53), легко доказать для случая, когда $u(y)$ удовлетворяет условиям V, теоремы о магистрали, аналогичные теоремам 2, 3 или 4.

Автор выражает благодарность Е. Г. Гольштейну за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. G. Kemeny, O. Morgenstern, G. L. Thompson. A Generalization of the von-Neumann Model of an Expanding Economy. *Econometrica*, 1956, № 2, v. 24.
2. R. Radner. Paths of Economic Growth that are Optimal with Regard only to Final State. *The Review of Economic Studies*, 1961, v. XXVIII (2), № 76.
3. L. W. McKenzie. Turnpike Theorems for a Generalized Leontief Model. *Econometrica*, 1963, v. 31, № 1—2.
4. E. M. Drandakis. On Efficient Accumulation Paths in the Closed Production Model. *Econometrica*, 1966, v. 34, № 2.
5. I. Tsukui. Turnpike Theorem in a Generalized Dynamic Input — Output System. (там же).
6. В. Л. Макаров. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий линейных моделей экономики. *Сиб. матем. ж.*, т. 7, № 4, 1966.
7. С. Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир». 1964.
8. В. Л. Макаров. Состояния равновесия замкнутой линейной модели расширяющейся экономики. *Экономика и матем. методы*, 1965, т. 1, вып. 5.

Поступила в редакцию
24 X 1968