

содержит при любом $\varepsilon > 0$ точки x , для которых $f(x) > f(x')$ и $\|x - x'\| < \varepsilon$.

Построим для x' систему подпространств $\bar{Y}^i(x')$. В силу леммы 1 найдется прямая L_0 в Q , принадлежащая некоторому пересечению $\bar{Y}_0^i(x') \cap Q$ и не ортогональная к $\text{grad } f_Q(x')$. Следовательно, существуют точки $x \in L_0$, для которых $f(x) > f(x')$ и $\|x - x'\| < \varepsilon$, где ε произвольно мало.

Предположим, что среди таких точек есть при любом $\varepsilon > 0$ точки $x \notin \zeta$. Тогда гиперплоскость Q содержит как точки $x \in \zeta$, так и точки $x \notin \zeta$, для которых $f(x) > f(x')$ и $\|x - x'\| < \varepsilon$. В силу произвольной малости ε и выпуклости функции $f_Q(x)$ это возможно лишь, если точка x' лежит в Q на границе Q_1 множества $Q \cap \zeta$ и $Q \cap \bar{\zeta}$, где $\bar{\zeta}$ — дополнение к ζ в E_n , $Q_1 \subseteq \zeta$ и Q_1 содержит точки x , для которых $f(x) > f(x')$ и $\|x - x'\| < \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Но в этом случае граница Q_1 совпадает в некоторой конечной окрестности точки x' с гиперплоскостью, удовлетворяющей всем условиям, определяющим пространство Q , и имеющей размерность, меньшую размерности Q . Последнее противоречит определению гиперплоскости Q .

Следовательно, допущение неверно, и все точки прямой L_0 , для которых $f(x) > f(x')$ и $\|x - x'\| < \varepsilon$, принадлежат ζ .

Пространство $\bar{Y}_0^i(x')$ удовлетворяет всем требованиям леммы 2 относительно пространства $\bar{Y}^i(x')$.

2. Пусть $x' \in \zeta$ и $\bar{i} = (i_1, \dots, i_{r+1})$ — набор различных между собой индексов $1, \dots, n$. Будем говорить, что обмен $[\bar{i}]$ выполняется в точке x' и переводит ее в точку $x_{\bar{i}}' \in \zeta$, если $x_{\bar{i}}'$ является решением следующей задачи максимизации

$$f(x) = \max_{x \in \bar{Y}^{\bar{i}}(x') \cap \zeta}. \quad (14)$$

Из леммы 2 следует, что в любой точке $x' \in \zeta$, где $f(x') \neq \max_{x \in \zeta} f(x)$, существует обмен $[\bar{i}]$, переводящий ее в точку $x_{\bar{i}}' \in \zeta$, для которой $f(x_{\bar{i}}') > f(x')$. Поэтому функция точки x'

$$\varphi(x') \equiv \sum_{i_1, \dots, i_{r+1}} (f(x_{\bar{i}}') - f(x')), \quad (15)$$

где суммирование ведется по всем наборам различных между собой индексов $i_1, \dots, i_{r+1}$, положительна в ζ всюду, кроме точек максимума $f(x)$,

$$\varphi(x') > 0, \quad x' \in \zeta, \quad f(x') \neq \max_{x \in \zeta} f(x). \quad (16)$$

В задаче (14) функция $f(x)$ дифференцируема; ее максимальное значение $f(x_{\bar{i}}')$ непрерывно зависит от правых частей $b_1(x'), \dots, b_r(x')$ ограничений (4), а они являются непрерывными функциями (6) точки $x' \in \zeta$. Следовательно, $f(x_{\bar{i}}')$ для любого набора индексов $\bar{i}$ и вся сумма (15) — непрерывные функции точки x' в ζ .

Определим для произвольной начальной точки $x^{(0)} \in \zeta$ случайную последовательность обменов и соответствующую случайную последовательность точек многогранника ζ

$$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots \quad (17)$$

Занумеруем в каком-либо порядке всевозможные обмены $[\bar{i}]$ числами $1, 2, \dots, N$, $N \equiv C_n^r = n! / (r!(n-r)!)$.

Пусть уже определена конечная случайная последовательность $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(h-1)}$. Тогда из чисел $1, 2, \dots, N$ выбирается случайным образом

число η_k , причем все значения $\eta_k = 1, 2, \dots, N$ считаются равновероятными. В точке $x^{(k-1)}$ выполняется обмен с номером η_k , и за $x^{(k)}$ принимается точка, в которую $x^{(k-1)}$ переводится этим обменом. В случае, когда решение задачи обмена с номером η_k в точке $x^{(k-1)}$ неединственно, точка $x^{(k)}$ определяется неоднозначно, как любое решение.

Соответствующая вероятностная мера $m(\Omega)$ в пространстве бесконечных последовательностей номеров обмена $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ определяется на сигма-алгебре измеримых множеств, порожденной множествами вида $\eta_k = i$, с условием, что ее значение для пересечения j таких множеств равно $(1/N)^j$.

Теорема. Для случайной последовательности обменов с началом в произвольной точке $x^{(0)} \in \zeta$, в которой $f(x^{(0)}) \neq \max_{x \in \zeta} f(x)$, с вероятностью 1 выполняется предельное равенство

$$f(x^{(k)}) \rightarrow \max_{x \in \zeta} f(x). \quad (18)$$

Доказательство. Обозначим через ζ_0 множество $(x: x \in \zeta, f(x) = \max_{x \in \zeta} f(x))$, ζ_0 — выпуклое замкнутое множество в E_n ; через $\rho(x, \zeta_0)$ —

расстояние точки x от множества ζ_0 в метрике евклидова пространства E_n .

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности функции $f(x)$ на ограниченном замкнутом множестве $\zeta \subseteq E_n$, найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(x) - \max_{x \in \zeta} f(x)| < \varepsilon, \text{ если } x \in \zeta \text{ и } \rho(x, \zeta_0) < \delta(\varepsilon).$$

Пусть ζ_ε — множество $(x: \rho(x, \zeta_0) < \delta(\varepsilon), x \in \zeta)$ и R_ε — дополнительное к нему в ζ множество $(x: \rho(x, \zeta_0) \geq \delta(\varepsilon), x \in \zeta)$.

На ограниченном замкнутом множестве R_ε непрерывная функция $\varphi(x)$ (15) достигает своего минимума d_ε . Так как все точки множества R_ε отстоят от ζ_0 на положительное расстояние, то в силу неравенства (16)

$$d_\varepsilon = \min_{x' \in R_\varepsilon} \varphi(x') > 0. \quad (19)$$

Пусть случайная последовательность обменов начинается в точке $x^{(0)} \in \zeta$ и дает случайную последовательность точек (17). Покажем, что по любому $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 существует $k_0 = k_0(\varepsilon)$ такое, что

$$\max_{x \in \zeta} f(x) - f(x^{(k)}) \leq \varepsilon \text{ при всех } k \geq k_0. \quad (20)$$

Так как последовательность $\max_{x \in \zeta} f(x) - f(x^{(k)})$ невозрастающая в силу определения обмена, то достаточно доказать существование, с вероятностью 1, числа $k_0 = k_0(\varepsilon)$, для которого

$$\max_{x \in \zeta} f(x) - f(x^{(k_0)}) \leq \varepsilon. \quad (21)$$

Построим для заданного ε множества ζ_ε и R_ε . Если $x^{(0)} \in \zeta_\varepsilon$, то $k_0 = 0$. Пусть $x^{(0)} \in R_\varepsilon$. С вероятностью 1 осуществляется одно из двух: либо при некотором k $f(x^{(k)}) \in \zeta_\varepsilon$ и только $\max_{x \in \zeta} f(x) - f(x^{(k)}) < \varepsilon$; либо при всех k

$x^{(k)} \in R_\varepsilon$. В последнем случае неравенство (19) позволяет доказать [1], что с вероятностью 1 существует число $k_2 = k_2(\varepsilon)$, для которого $\max_{x \in \zeta} f(x) - f(x^{(k_2)}) \leq \varepsilon$. Следовательно, с вероятностью 1 существует число

$k_0 = k_0(\varepsilon)$, для которого выполняются неравенства (21) и (20).

Отсюда следует, что с вероятностью 1 выполняются неравенства (20) одновременно для всех i и предельное равенство

$$\max_{x \in \xi} f(x) - f(x^{(h)}) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0. \quad (22)$$

3. Для недифференцируемых $f(x)$ сходимость (18) может нарушаться. В качестве примера можно привести следующую задачу [1]

$$f(x) = f_1(x_1, x_4) + f_2(x_2, x_5) + f_3(x_3, x_6) = \max, \quad (23)$$

$$f_1(x_1, x_4) = \min \{x_1, x_4\}, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

$$f_2(x_2, x_5) = \frac{1}{16}x_2 + \frac{1}{8}x_5, \quad x_4 + x_5 + x_6 = 1,$$

$$f_3(x_3, x_6) = \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{16}x_6; \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Здесь $f(x)$ — выпуклая, непрерывная, недифференцируемая функция переменных $(x_1, \dots, x_6) = x$ в ξ , $r = m = 2$. Пространства $Y^{i_1 i_2 i_3}(x')$ при всевозможных наборах индексов $i_1, i_2, i_3 = 1, 2, \dots, 6$ принадлежат двум пространствам: $Y^{1, 2, 3}(x')$ и $Y^{4, 5, 6}(x')$.

Для точек x' прямой

$$x_1' = x_4', \quad x_2' = x_6' = 0 \quad (24)$$

функция (23) в каждом из пространств $Y^{1, 2, 3}(x')$, $Y^{4, 5, 6}(x')$ имеет строгий максимум в самой точке x' , поэтому обмены (1), (2), (3) и (4), (5), (6), а значит и любые обмены i_1, i_2, i_3 оставляют точку x' неподвижной. Но на прямой (24) $f(x') \neq \max_{x \in \xi} f(x)$ максимум $f(x)$ достигается в точке $x_1 =$

$$= x_4 = 1, \quad x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0.$$

Следовательно, сходимость (18) не осуществляется для любой начальной точки $x^{(0)} = x'$, расположенной на прямой (24).

Автор благодарен Л. А. Оганесяну и Б. Г. Питтелю за постановку задачи и активное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. В. Гусева. Последовательность обменов в одной задаче линейного программирования. Экономика и матем. методы, 1968, т. IV, вып. 3.

Поступила в редакцию
16 VII 1967