

О ВЫБОРЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗАГРУЗКИ СТАНКОВ

В. Я. БУРДЮК
(Днепропетровск)

Постановка задачи. Имеется m станков ($m > 2$), $M_1, M_2, \dots, M_m$ и n деталей $d_1, d_2, \dots, d_n$. Детали должны пройти обработку сначала на M_1 , затем на M_2 и т. д., пока не пройдут обработку на M_m . Требуется построить такой алгоритм нахождения последовательности запуска деталей, который минимизировал бы полное время обработки всех деталей.

Ограничения. 1) Каждая деталь не может обрабатываться одновременно более чем одним станком, а каждый станок не может обрабатывать одновременно более чем одну деталь;

2) процесс обработки детали на станке не прерывается;

3) время обработки на M_i детали d_j больше нуля для любых i, j ;

4) время переналадки станков и время транспортировки деталей между станками включено во время обработки деталей;

5) детали проходят обработку на всех станках в одном и том же порядке;

6) после прохождения M_1 все детали подаются на M_2, M_3 и т. д. так, чтобы эти станки не простаивали после начала обработки на них первой детали и до окончания обработки последней детали данного порядка, т. е. чтобы внутренние простои на M_2, M_3 и т. д. отсутствовали.

Обозначения: T_{ij} — время обработки на M_i детали d_j , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; X — перестановка над множеством деталей $d_1, d_2, \dots, d_n$ или над множеством номеров деталей $1, 2, \dots, n$; $T_{ij}(X)$ — время обработки на M_i детали, стоящей на j -м месте в X ; поэтому если $X = \langle 1, 2, \dots, n \rangle$, то $T_{ij}(X) = T_{ij}$; $T_k(X)$ — время от начала обработки на M_1 детали, стоящей на первом месте в X , до окончания обработки на M_k детали, стоящей на последнем месте в X ; $k = 2, 3, \dots, m$; X_0 — оптимальная перестановка, т. е. $T_m(X_0) = \min T_m(X)$.

Понятно, что задача m станков (без внутренних простоев) переходит в задачу m станков, если в указанных выше ограничениях вместо 6) потребовать, чтобы деталь после прохождения M_1 сразу же подавалась на M_2 и ее обработка начиналась немедленно после освобождения M_2 , дальше с M_2 деталь немедленно переходила на M_3 и т. д. Вообще говоря, полное время обработки всех деталей в задаче m станков (без внутренних простоев) больше, чем в задаче m станков, но зато получается выигрыш за счет отсутствия внутренних простоев станков.

Найдем зависимость $T_m(X)$ от $T_{ij}(X)$. Из [1] следует, что для задачи двух станков время $t(X)$ окончания обработки всех деталей на M_2 при условии запуска их в порядке X выражается формулой

$$t(X) = \max_{1 \leq u \leq n} \left[\sum_{j=1}^u T_{1j}(X) - \sum_{j=1}^{u-1} T_{2j}(X) \right] + \sum_{j=1}^n T_{2j}(X),$$

где первое слагаемое справа — время простоя M_2 от начала обработки пер-

вой детали из X на M_1 и до окончания обработки последней детали из X на M_2' . Легко понять, что в задаче двух станков можно избежать внутренних простоев второго станка без увеличения $t(X)$, сдвинув начало обработки на M_2 некоторых деталей на графике Ганта вправо, т. е. задача двух станков и задача двух станков (без внутренних простоев) совпадают. Поэтому

$$T_2(X) = F_{12}(X) + \sum_{j=1}^n T_{2j},$$

где

$$F_{12}(X) = \max_{1 \leq u \leq n} \left[\sum_{j=1}^u T_{1j}(X) - \sum_{j=1}^{u-1} T_{2j}(X) \right].$$

Для построения $T_3(X)$ будем считать, что на M_2 путем сдвига устранены простои, а поэтому M_2 и M_3 находятся в таком же положении, как M_1 и M_2 , с той лишь разницей, что на M_2 обработка начинается через $F_{12}(X)$ единиц времени после начала работы M_1 .

Следовательно,

$$T_3(X) = F_{12}(X) + F_{23}(X) + \sum_{j=1}^n T_{3j},$$

где

$$F_{23}(X) = \max_{1 \leq u \leq n} \left[\sum_{j=1}^u T_{2j}(X) - \sum_{j=1}^{u-1} T_{3j}(X) \right].$$

Теперь уже ясно, что

$$T_m(X) = \sum_{r=1}^{m-1} F_{r,r+1}(X) + \sum_{j=1}^n T_{mj}, \quad (1)$$

где

$$F_{r,r+1}(X) = \max_{1 \leq u \leq n} \left[\sum_{j=1}^u T_{rj}(X) - \sum_{j=1}^{u-1} T_{r+1,j}(X) \right].$$

Запишем (1) в другом виде

$$T_m(X) = \sum_{r=1}^{m-1} \left[F_{r,r+1}(X) + \sum_{j=1}^n T_{r+1,j} \right] - \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=1}^n T_{ij}. \quad (2)$$

Из (2) следует, что оптимальные перестановки для $T_m(X)$ и для $R_m(X)$, где

$$\begin{aligned} R_m(X) &= \sum_{r=1}^{m-1} \left[F_{r,r+1}(X) + \sum_{j=1}^n T_{r+1,j} \right] = \\ &= \sum_{r=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq n} \left[\sum_{j=1}^u T_{rj}(X) + \sum_{j=u}^n T_{r+1,j}(X) \right] \end{aligned}$$

совпадают. Ниже строится алгоритм для минимизации $R_m(X)$. Отметим, что

$$\max_{1 \leq u \leq n} \left[\sum_{j=1}^u T_{rj}(X) + \sum_{j=u}^n T_{r+1,j}(X) \right]$$

представляет собой полное время обработки всех деталей перестановки X в задаче двух станков M_r и M_{r+1} и вычисляется известным способом.

Применим распространенный (см. [2—4]) алгоритм ветвей и границ, который для задачи трех станков впервые приведен в [5, 6], а для задачи m станков в [7].

Пусть π_v — подпоследовательность, состоящая из v , $v = 1, 2, \dots, n$, элементов (номеров деталей), а $H\Gamma(\pi_v)$ — нижняя граница значений $R_m(X)$ на всех X , начинающихся с π_v .

Таблица 1

π_v	$T_2^1(\pi_v)$	$\sum_{j=1}^n T_{1j} + \min_{j \in \pi_v} T_{2j}$	Γ_{11}	$\max [\Gamma_{11}, \Gamma_{21}]$
		$T_2^1(\pi_v) + \sum_{j \in \pi_v} T_{2j}$	Γ_{21}	
				
$T_m^{m-1}(\pi_v)$	$\sum_{j=1}^n T_{m-1, j} + \min_{j \in \pi_v} T_{mj}$	$\Gamma_{1, m-1}$	$\max [\Gamma_{1, m-1}, \Gamma_{2, m-1}]$	
	$T_m^{m-1}(\pi_v) + \sum_{j \in \pi_v} T_{mj}$	$\Gamma_{2, m-1}$		
				$H\Gamma(\pi_v)$

Развитием π_v назовем образование из π_v всевозможных подпоследовательностей длины $v+1$. Для очередного развития выбираем π_v с минимальным значением $H\Gamma(\pi_v)$. Начинаем с определения $H\Gamma(\pi_1)$ всех одноэлементных π_1 . Кончаем после того, как для очередного развития можно будет взять π_n . Такое π_n и есть X_0 , ибо для него $H\Gamma(\pi_n) = R_m(\pi_n) \leq R_m(X)$ при любом X .

Пусть $T_{r+1}^r(\pi_v)$ — время от начала обработки первой детали из π_v на M_r и до окончания обработки последней детали из π_v на M_{r+1} в задаче двух станков, M_r и M_{r+1} , $r = 1, 2, \dots, m-1$.

Таблица 2

	1	2	3	4	5	6	
1	6	12	4	3	6	2	33
2	7	2	6	11	8	14	48
3	3	3	8	7	10	12	43

Введем

$$\Gamma_{1r}(\pi_v) = \sum_{j=1}^n T_{rj} + \min_{j \in \pi_v} T_{r+1,j}, \quad \Gamma_{2r}(\pi_v) = T_{r+1}^r(\pi_v) + \sum_{j \in \pi_v} T_{r+1,j}$$

положив

$$H\Gamma(\pi_v) = \sum_{r=1}^{m-1} \max[\Gamma_{1r}(\pi_v), \Gamma_{2r}(\pi_v)].$$

Видно, что $\max[\Gamma_{1r}(\pi_v), \Gamma_{2r}(\pi_v)] \leq T_{r+1}^r(X)$ для всех X , начинающихся с π_v , а поэтому для этих же X имеем $H\Gamma(\pi_v) \leq R_m(X)$, т. е. $H\Gamma(\pi_v)$ — действительно нижняя граница.

Все вычисления (при ручном счете) удобно оформлять в виде ряда таблиц типа табл. 1.

Рассмотрим пример, описываемый табл. 2, где $m = 3$, $n = 6$.

Легко проверить, что для этого примера среди одноэлементных подпоследовательностей $\pi_1 = \langle 3 \rangle$ обладает минимальной нижней границей. Покажем на табл. 3 вычисление $HT(\langle 3 \rangle)$ и $HT(\langle 3, 1 \rangle)$.

После просмотра 55 подпоследовательностей π_v находим $X_0 = \langle 3, 5, 6, 4, 1, 2 \rangle$, $R_3(X_0) = 105$, $T_3(X_0) = 105 - 48 = 57$.

Таблица 3

$\langle 3 \rangle$	0	4	33+2	35	52	$\langle 3, 1 \rangle$	4	10	33+2	35	52
	4	10	10+42	52			10	17	17+35	52	
	0	6	48+3	51			6	13	48+3	51	
	6	14	14+35	49			14	17	17+32	49	
					103						103

Рассматриваемый пример взят из [6], где он используется для решения задачи трех станков. Заметим, что для обеих задач полное время обработки оказалось одинаковым. Понятно, что после получения X_0 необходимо построить расписание, т. е. указать время начала и конца обработки каждой детали из X_0 на каждом станке.

Пусть уже на M_i расписание построено, причем так, что окончание обработки предыдущей детали совпадает с началом обработки последующей (внутренние простои отсутствуют). На M_{i+1} определяем время начала и конца обработки деталей как на втором станке в задаче двух станков, полагая M_i первым станком. Затем уплотняем расписание на M_{i+1} , чтобы окончание обработки предыдущей детали совпало с началом обработки последующей, не изменяя при этом времени окончания работы M_{i+1} , и переходим к M_{i+2} .

Добавление 1. Иногда можно уменьшить количество просматриваемых подпоследовательностей π_v .

Из [1] следует, что если при любом $r = 1, 2, \dots, m - 1$

$$\min [T_{rk}, T_{r+1, j}] \leq \min [T_{rj}, T_{r+1, k}],$$

то, запретив паре $\langle j, k \rangle$ участвовать в развитии подпоследовательностей, мы тем не менее получим X_0 .

Для нашего примера можно запретить пары $\langle 1, 3 \rangle$, $\langle 1, 4 \rangle$, $\langle 1, 5 \rangle$, $\langle 1, 6 \rangle$, $\langle 4, 6 \rangle$, $\langle 5, 3 \rangle$. За счет этого количество просматриваемых подпоследовательностей уменьшится до 43.

Добавление 2. Известно, что при организации производства широко применяется параллельно-последовательное (смешанное) сочетание операций, при котором процесс производства осуществляется без перерывов. Для подсчета длительности технологической части производственного цикла при смешанном сочетании операций в [8] дана формула. Ниже предлагается не менее удобная формула (3).

Пусть $T_{ij} = t_i$ при любом j , т. е. время обработки всех деталей на M_i одинаково, $i = 1, 2, \dots, m$. Напомним, что t_i называют штучным временем i -й операции. В этом случае $T_m(X)$ есть величина постоянная при любом X , а ее значение T_m представляет собой длительность технологической части цикла и вычисляется по формуле

$$T_m = nt_m + \sum_{i=2}^m t_i + \sum_{i=1}^{m-1} \tau_i, \quad (3)$$

где

$$\tau_i = \begin{cases} t_i - t_{i+1} & \text{при } t_i < t_{i+1}, \\ 0 & \text{при } t_i = t_{i+1}, \\ n(t_i - t_{i+1}) & \text{при } t_i > t_{i+1}. \end{cases}$$

Формула (3) легко выводится из (1).

В заключение автор выражает признательность за обсуждение результатов М. И. Алхимову, В. И. Судаку и другим участникам семинара при Днепропетровском государственном университете.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Джонсон. Оптимальное расписание для двух- и трехступенчатых процессов с учетом времени наладки. Кибернетический сборник. Новая серия, вып. 1. М., «Мир», 1965.
2. Дж. Литл, К. Мурти, Д. Супини, К. Кэрел. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 1.
3. E. L. Lawler, D. E. Wood. Branch-and-bound methods: a survey. Operat. Res., 1966, v. 14, № 4.
4. В. В. Шкурба и др. Задачи календарного планирования и методы их решения. Киев, «Наукова думка», 1966.
5. E. Ignall, L. Schrage. Application of the branch- and bound-technique to some flow-shop scheduling problems. Operat. Res., 1965, v. 13, № 3.
6. Z. A. Lomnicki. A branch-and-bound algorithm for the exact solution of the three-machine scheduling problem. Operat. Res. Quart., 1965, v. 16, № 1.
7. A. P. G. Brown, Z. A. Lomnicki. Some applications of the branch-and bound algorithm to the machine scheduling problem. Operat. Res. Quart., 1966, v. 17, № 2.
8. С. Е. Каменицер, В. Г. Конторович, Г. А. Пищулин. Организация и планирование промышленных предприятий. М., Политиздат, 1967.

Поступила в редакцию
1 VIII 1967