

расчет в социальном разрезе распределения населения по уровню душевого дохода. Проводимое расширение сети обследуемых семей до 62 тысяч и периодическое — раз в 5 лет — обследование 250 тысяч семей одних только рабочих и служащих вооружают дополнительной информацией для такого расчета.

Использование пообластных данных открывает широкие возможности для разработки прогнозов спроса не только по СССР в целом, но и для отдельных зон и даже для менее крупных группировок территорий, поскольку на них приходится достаточно большое количество данных для корреляционного анализа. Такие разработки отразят влияние на спрос климатических и других особенностей зон и менее крупных районов.

* * *

Прогнозирование макроспроса носит пока характер поиска научно обоснованных методов. Все пути прогнозирования для текущего планирования используют корреляции. Следует иметь в виду, что любая корреляция рассчитана на бездефицитность рынка потребительских товаров. По недостаточным товарам спрос в большинстве случаев может оказаться заниженным. Не исключено, что встретится и обратный результат. Это возможно тогда, когда в отчетном году, по данным которого рассчитано уравнение регрессии, ресурсы дефицитного товара резко возрастают. Параметры уравнения в этом случае могут оказаться завышенными.

Порой может в планируемом году усилиться или ослабиться степень влияния учтенных в модели факторов, что потребует изменения найденных параметров. Такую новую тенденцию нужно предвидеть, корреляционный анализ сам по себе ее не выявит. С этим не следует смешивать изменение самих переменных, иначе говоря, величины факториальных признаков, при сохранении степени их влияния на спрос, т. е. при сохранении найденных параметров уравнения регрессии.

Таким образом, по отдельным группам товаров по этим и другим причинам придется корректировать оценку спроса, выявленную по моделям, чтобы, зная состояние ресурсов товаров, осуществить целенаправленное воздействие на производство, спрос и торговлю. Для такой корректировки полезно привлечь и научно обоснованные нормы потребления, значение которых при текущем планировании будет возрастать по мере приближения к ним уровня потребления.

Поступила в редакцию
26 XII 1968

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ПО КРИТЕРИЮ ВРЕМЕНИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

ЧАН-ВУ ТХИЕУ

(Ленинград)

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При составлении плана перевозок, по которому все грузы должны быть доставлены в пункты назначения в кратчайший срок, с ограничением на какие-нибудь средства (например, расхода на перевозки) можно поставить следующую задачу: требуется найти

$$\min_{x_{ij} \geq 0} \max t_{ij} \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n, \quad (4)$$

с дополнительным ограничением общего вида

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \leq d. \quad (5)$$

Задачу (1) — (4) можно решить с помощью известных методов (см., например, [1, стр. 238—247] и [2, стр. 107—108]). Учитывая особенности структуры задачи (1) — (5), мы предлагаем метод ее решения, заключающийся в решении конечной последовательности задач транспортного типа по критерию стоимости. Достоинство этого метода состоит не только в сведении поставленной задачи к задачам транспортного типа, но и в том, что в каждой итерации можно использовать информацию предыдущей итерации.

2. АЛГОРИТМ МЕТОДА

1. Сначала решим транспортную задачу (1) — (4) по критерию времени. Пусть x^0 — решение этой задачи. Если x^0 удовлетворяет условию (5), то x^0 является решением задачи (1) — (5). В противном случае, обозначим через $t_1, t_2, \dots, t_q$ различные значения t_{ij} в промежутке $[t_1, t_q]$, где $t_1 = \max_{x_{ij}^0 > 0} t_{ij}$ и $t_q = \max_{ij} t_{ij}$. Затем составим

множества

$$\Omega_k = \{(i, j) : t_{ij} \leq t_k\}, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (6)$$

и матрицы

$$c^k = [c_{ij}^{(k)}], \quad k = 1, 2, \dots, q,$$

где

$$c_{ij}^{(k)} = \begin{cases} d_{ij} & \text{при } (i, j) \in \Omega_k \\ +\infty & \text{при } (i, j) \notin \Omega_k. \end{cases} \quad (7)$$

С каждым множеством $\Omega_k, k = 1, 2, \dots, q$, свяжем следующую вспомогательную задачу транспортного типа

$$(E_k) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(k)} x_{ij}, \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n. \quad (11)$$

2. На первой итерации решим задачу E_1 , исходя из плана x^0 . Пусть x^1 — оптимальный план, а $\{u_i^{(1)}, v_j^{(1)}\}^1$ — соответствующая система потенциалов задачи E_1 .

1) Если x^1 удовлетворяет условию (5), то x^1 является искомым решением. В самом деле, по соотношению (7) из $x_{ij}^{(1)} > 0$ следует $(i, j) \in \Omega_1$, значит $t_{x^1} = \max_{ij} t_{ij} \leq t_{x^0}$, т. е. x^1 также является решением задачи (1) — (4). Следовательно,

но, x^1 — решение задачи (1) — (5).

2) Пусть x^1 не удовлетворяет (5).

Определяем оценки $\Delta_{ij}^{(1)} = d_{ij} - (u_i^{(1)} - v_j^{(1)})$ для всех i, j . При этом возможны два случая: а) когда $\Delta_{ij}^{(1)} \geq 0$ при всех (i, j) . Отсюда и из (7) следует, что x^1 является решением задачи E_1 с коэффициентами целевой функции $c_{ij}^{(1)} = d_{ij}$ при всех (i, j) . Так как x^1 не удовлетворяет условию (5), то не существует никакого плана задачи (1) — (4), удовлетворяющего этому условию. Это значит, что задача (1) — (5) неразрешима из-за несовместимости ее условий.

б) Когда, по крайней мере, одно число $\Delta_{ij}^{(1)}$ меньше нуля. В этом случае перейдем к следующей итерации.

3. На k -й итерации имеются план x^{k-1} (не удовлетворяющий условию (5)) и система потенциалов $\{u_i^{(k-1)}, v_j^{(k-1)}\}$, причем хотя бы одно значение $\Delta_{ij}^{(k-1)} = d_{ij} - (u_i^{(k-1)} - v_j^{(k-1)})$ меньше нуля.

Тогда, исходя из плана x^{k-1} и системы потенциалов $\{u_i^{(k-1)}, v_j^{(k-1)}\}$, решим задачу E_k . Рассмотрим оптимальный план x^k и систему потенциалов $\{u_i^{(k)}, v_j^{(k)}\}$ задачи E_k . Здесь возможны два случая: 1) если x^k удовлетворяет условию (5), то x^k является искомым решением задачи (1) — (5); 2) если x^k не удовлетворяет условию (5), вычисляем оценки

$$\Delta_{ij}^{(k)} = d_{ij} - (u_i^{(k)} - v_j^{(k)}) \text{ при всех } (i, j). \quad (12)$$

Если все $\Delta_{ij}^{(k)} \geq 0$, то задача (1) — (5) неразрешима из-за несовместимости ее условий. Процесс решения заканчивается.

Если есть, по крайней мере, одно значение $\Delta_{ij}^{(k)}$ меньше нуля, перейдем к $(k+1)$ -й итерации.

3. ОСНОВЫ АЛГОРИТМА

Теорема 1. Пусть x^k — решение вспомогательной задачи E_k на k -й итерации. Если

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(k)} x_{ij}^{(k)} > d \text{ при } k = 1, 2, \dots, s-1;$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(k)} x_{ij}^{(k)} \leq d \text{ при } k = s,$$

то x^s является решением задачи (1) — (5).

Доказательство. Предположим, что решением задачи (1) — (5) является вектор $\bar{x}$, причем

$$t_{\bar{x}} = \max_{\bar{x}_{ij} > 0} t_{ij} < t_{x^s} = \max_{x_{ij}^s > 0} t_{ij}.$$

Например, $t_{\bar{x}} = t_k$ при $k < s$. Тогда ясно, что $\bar{x}$ также является планом вспомогательной задачи E_k . Так как $\bar{x}_{ij} = 0$ для всех (i, j) , при которых $t_{ij} > t_k$, то по определению матрицы c^k мы имеем

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(k)} \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} \bar{x}_{ij} \leq d.$$

Это противоречит предположению теоремы. Следовательно, задача (1) — (5) не может иметь решения $\bar{x}$ с $t_{\bar{x}} < t_{x^s}$ и значит x^s — решение задачи.

Так как в целевую функцию задачи E_q входят все d_{ij} , то очевидна следующая теорема.

Теорема 2. Описанный алгоритм заканчивается через конечное число итераций (не выше q) случаев, когда оптимальный план будет получен или когда задача неразрешима.

Пример. Решим задачу (1) — (5) при следующих данных $a_1 = 10$; $a_2 = 7$; $a_3 = 8$; $b_1 = 5$; $b_2 = 6$; $b_3 = 4$; $b_4 = 10$; $d = 75$;

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 8 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Предварительный этап. Можно проверить, что решением задачи (1) — (4) является план $x^0 (t_{x^0} = \max_i (\max_j \min_i t_{ij}, \max_j \min_i t_{ij}))$.

$$x^0$$

$a_i \backslash b_j$	5	6	4	10
10	2 4 3	5 2	6 4	1 6 0
7	3 1 3	4 6 5	8 2	3 4
8	5 10	6 5	2 4 3	4 4 6

$$\sum_i \sum_j d_{ij} x_{ij}^{(0)} = 81 > 75.$$

$t_1 = 4; t_2 = 5; t_3 = 6; t_4 = 8; \Omega_1 = \{(1,1); (1,4); (2,1); (2,2); (2,4); (3,3); (3,4)\};$
 $\Omega_2 = \Omega_1 \cup \{(1,2); (3,1)\}; \Omega_3 = \Omega_2 \cup \{(1,3); (3,2)\}; \Omega_4 = \Omega_3 \cup \{(2,3)\}.$

Итерация I.

$$x^1 = x^0$$

$a_i \backslash b_j$	5	6	4	10	$u_i^{(1)}$
10	4 3	∞	∞	6 0	0
7	1 3	6 5	∞	4	0
8	∞	∞	4 3	4 6	6
$v_j^{(1)}$	-3	-5	3	0	

$$\sum_i \sum_j d_{ij} x_{ij}^{(1)} = 81 > 75;$$

$$[\Delta_{ij}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Итерация II.

$$x^{(2)}$$

$a_i \backslash b_j$	5	6	4	10	$u_i^{(2)}$
10	3	4 2	∞	6 0	0
7	5 3	2 5		4	3
8	10	∞	4 3	4 6	6
$v_j^{(2)}$	0	-2	3	0	

$$\sum_i \sum_j d_{ij} x_{ij}^{(2)} = 69 < 75.$$

Итак, x^2 — искомое решение; $t_{\text{опт}} = 5$.

Замечание 1. Хотя по этому алгоритму и требуется решение ряда задач транспортного типа, но решение каждой вспомогательной задачи, как правило, не требует большого числа шагов.

Далее, если после k -й итерации $\Delta_{ij}^{(k)} \geq 0$ при всех $(i, j) \in \Omega_{k+p-1}$ (p — натуральное число) и, по крайней мере, одно число $\Delta_{ij}^{(k)}$ — меньше нуля при $(i, j) \in \Omega_{k+p}$, то очевидно, что x^k также является решением задач $E_{k+1}, \dots, E_{k+p-1}$. Следовательно, мы можем сразу перейти к $(k+p)$ -й итерации, исходя из плана $x^{k+p-1} = x^k$ и системы потенциалов $\{u_i^{(k+p-1)} = u_i^{(k)}; v_j^{(k+p-1)} = v_j^{(k)}\}$.

Замечание 2. Можно начинать процесс решения задачи (1) — (5) исходя из произвольного (не обязательно оптимального) плана x^0 задачи (1) — (4). Решив вспомо-

гательную задачу E_1 , получим решение x^1 . Если $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}^{(1)} > d$, продолжа-

ем итерации по описанному выше алгоритму. А если $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}^{(1)} \leq d$, тогда

нужно проверить, является ли x^1 решением задачи (1) — (5). Для этого рассмотрим вспомогательную задачу транспортного типа с коэффициентами целевой функции

$$c_{ij}^{(2)} = \begin{cases} d_{ij} & \text{при } t_{ij} < t_{x^1}, \\ +\infty & \text{при } t_{ij} \geq t_{x^1}. \end{cases}$$

Решив эту задачу, исходя из плана x^1 , получим оптимальный план x^2 .

Если $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} x_{ij}^{(2)} > d$, то x^1 — решение задачи (1) — (5). Если $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} x_{ij}^{(2)} \leq d$ тогда опять рассматриваем вспомогательную задачу, изменив x^1 и x^2 , и так далее. Легко видеть, что этот процесс также заканчивается через конечное число шагов получением плана x^{s+1} , при котором

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(s+1)} x_{ij}^{(s+1)} > d,$$

и, следовательно, x^s является искомым решением задачи (1) — (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Барсов. Линейное программирование в технико-экономических задачах. М., «Наука», 1964.
2. W. Grabowski. Problem of transportation in minimum time. Bull. Acad. Polon. Sci. XII, 2 (1964).

Поступила в редакцию
14 XII 1967

К ВОПРОСУ ОПТИМИЗАЦИИ ОБСЛУЖИВАНИЯ В СИСТЕМАХ С ОЖИДАНИЕМ

Ю. Н. ШУЛЬГА

(Донецк)

Предположим, что имеется некоторая многоканальная система массового обслуживания с ожиданием, состоящая из конечного числа каналов, в которую поступает простейший поток требований с интенсивностью λ и время обслуживания распределено по показательному закону с параметром τ^{-1} . Требование, поступившее в систему в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь и ожидает, пока один из каналов не освободится. Длина очереди предполагается неограниченной. Если канал закончил обслуживание требования и в системе в этот момент не оказалось больше требований, то канал (или несколько каналов) некоторое время простаивает