

Замечание 1. Хотя по этому алгоритму и требуется решение ряда задач транспортного типа, но решение каждой вспомогательной задачи, как правило, не требует большого числа шагов.

Далее, если после k -й итерации $\Delta_{ij}^{(k)} \geq 0$ при всех $(i, j) \in \Omega_{k+p-1}$ (p — натуральное число) и, по крайней мере, одно число $\Delta_{ij}^{(k)}$ — меньше нуля при $(i, j) \in \Omega_{k+p}$, то очевидно, что x^k также является решением задач $E_{k+1}, \dots, E_{k+p-1}$. Следовательно, мы можем сразу перейти к $(k+p)$ -й итерации, исходя из плана $x^{k+p-1} = x^k$ и системы потенциалов $\{u_i^{(k+p-1)} = u_i^{(k)}; v_j^{(k+p-1)} = v_j^{(k)}\}$.

Замечание 2. Можно начинать процесс решения задачи (1) — (5) исходя из произвольного (не обязательно оптимального) плана x^0 задачи (1) — (4). Решив вспомо-

гательную задачу E_1 , получим решение x^1 . Если $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}^{(1)} > d$, продолжа-

ем итерации по описанному выше алгоритму. А если $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}^{(1)} \leq d$, тогда

нужно проверить, является ли x^1 решением задачи (1) — (5). Для этого рассмотрим вспомогательную задачу транспортного типа с коэффициентами целевой функции

$$c_{ij}^{(2)} = \begin{cases} d_{ij} & \text{при } t_{ij} < t_{x^1}, \\ +\infty & \text{при } t_{ij} \geq t_{x^1}. \end{cases}$$

Решив эту задачу, исходя из плана x^1 , получим оптимальный план x^2 .

Если $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} x_{ij}^{(2)} > d$, то x^1 — решение задачи (1) — (5). Если $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} x_{ij}^{(2)} \leq d$ тогда опять рассматриваем вспомогательную задачу, изменив x^1 и x^2 , и так далее. Легко видеть, что этот процесс также заканчивается через конечное число шагов получением плана x^{s+1} , при котором

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(s+1)} x_{ij}^{(s+1)} > d,$$

и, следовательно, x^s является искомым решением задачи (1) — (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Барсов. Линейное программирование в технико-экономических задачах. М., «Наука», 1964.
2. W. Grabowski. Problem of transportation in minimum time. Bull. Acad. Polon. Sci. XII, 2 (1964).

Поступила в редакцию
14 XII 1967

К ВОПРОСУ ОПТИМИЗАЦИИ ОБСЛУЖИВАНИЯ В СИСТЕМАХ С ОЖИДАНИЕМ

Ю. Н. ШУЛЬГА

(Донецк)

Предположим, что имеется некоторая многоканальная система массового обслуживания с ожиданием, состоящая из конечного числа каналов, в которую поступает простейший поток требований с интенсивностью λ и время обслуживания распределено по показательному закону с параметром τ^{-1} . Требование, поступившее в систему в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь и ожидает, пока один из каналов не освободится. Длина очереди предполагается неограниченной. Если канал закончил обслуживание требования и в системе в этот момент не оказалось больше требований, то канал (или несколько каналов) некоторое время простаивает

в ожидании поступления требований в систему. Следовательно, каналы могут образовывать очередь в ожидании требований на обслуживание. Эта очередь ограниченной длины, так как число каналов в системе ограничено. Рассматривается стационарный режим работы системы.

При решении задач массового обслуживания возникает необходимость в определении условий, при которых издержки из-за простоя каналов и ожидания требований в очереди минимальны. Таким образом, одним из критериев экономической эффективности систем массового обслуживания может служить сумма общих издержек. Под суммой общих издержек будем понимать сумму издержек от простоя среднего числа каналов и требований в очереди в единицу времени.

Пусть $\bar{v}_n(\alpha)$ — средняя длина очереди в системе обслуживания, когда система состоит из n каналов; $\bar{a}_n(\alpha)$ — среднее число свободных каналов обслуживания; q_1 — издержки от простоя одного требования в очереди в единицу времени; q_2 — издержки от простоя одного канала в единицу времени. Тогда функция общих издержек принимает вид

$$Z_n(\alpha) = \bar{v}_n(\alpha)q_1 + \bar{a}_n(\alpha)q_2, \quad (1)$$

где $\bar{v}_n(\alpha)q_1$ — издержки от простоя среднего числа требований в очереди в единицу времени; $\bar{a}_n(\alpha)q_2$ — издержки от простоя среднего числа каналов обслуживания в единицу времени; $\bar{a} = \lambda\tau$ — коэффициент использования обслуживающего канала.

Число каналов n_0 , удовлетворяющее системе неравенств

$$Z_{n_0}(\alpha_0) < Z_{n_0-1}(\alpha_0), \quad Z_{n_0}(\alpha_0) < Z_{n_0+1}(\alpha_0), \quad n_0 \geq 1 \quad (2)$$

при заданном α_0 , будем считать оптимальным. Рассмотрим графики функций общих издержек

$$Z_k(\alpha) = v_k(\alpha)q_1 + \bar{a}_k(\alpha)q_2, \quad (3)$$

$$k = n-1, n, n+1; \quad n \geq 2$$

в системе координат αZ (рис. 1). Функция общих издержек $Z_k(\alpha)$ определена и непрерывна на интервале $(0, k)$ и на концах интервала принимает значения

$$Z_k(0) = kq_2, \quad \lim_{\alpha \rightarrow k} Z_k(\alpha) = +\infty. \quad (4)$$

Следовательно, функция $Z_k(\alpha)$ имеет вертикальную асимптоту, уравнение которой

$$\alpha = k. \quad (5)$$

Можно показать, что функция $Z_k(\alpha)$ на интервале $(0, k)$ достигает единственного минимума [1]. Повторяя аналогичные рассуждения для функции $Z_{k-1}(\alpha)$, получим

$$Z_{k-1}(0) = (k-1)q_2, \quad \lim_{\alpha \rightarrow k} Z_{k-1}(\alpha) = +\infty, \quad (6)$$

а вертикальная асимптота имеет уравнение

$$\alpha = k-1. \quad (7)$$

Так как

$$kq_2 > (k-1)q_2, \quad (8)$$

то график функции $Z_k(\alpha)$ пересекается с графиком функции $Z_{k-1}(\alpha)$ в одной точке. Нетрудно видеть, что сказанное выше справедливо и для функции $Z_{k+1}(\alpha)$. Абсциссы точек, принадлежащих части графика функции $Z_k(\alpha)$, заключенной между точками пересечения с графиками функций $Z_{k-1}(\alpha)$ и $Z_{k+1}(\alpha)$, удовлетворяют двойному неравенству

$$\alpha_{k-1, k} < \alpha < \alpha_{k, k+1}. \quad (9)$$

Следовательно, k , согласно системе (2), является оптимальным числом каналов для всех значений α , удовлетворяющим двойному неравенству (9).

Абсциссы точек пересечения графиков функций общих издержек $(Z_{n-1}(\alpha), Z_n(\alpha), Z_{n+1}(\alpha))$ разбивают ось α на части интервалами $(\alpha_{n-1, n}, \alpha_{n, n+1})$ так, что для любого α_0 найдется такой интервал $(\alpha_{n_0-1, n_0}, \alpha_{n_0, n_0+1})$, что $\alpha_0 \in (\alpha_{n_0-1, n_0}, \alpha_{n_0, n_0+1})$. В этом случае оптимальным числом каналов обслуживания является n_0 , так как для него выполняется система неравенств (2).

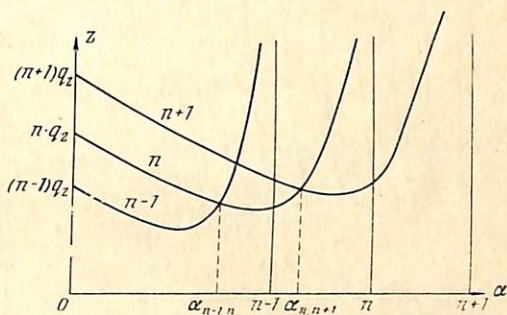


Рис. 1. Графики функции $Z_k(\alpha)$, $k = n-1, n, n+1$

Для получения абсцисс точек пересечения графиков функций общих издержек можно использовать уравнение

$$Z_n(\alpha) = Z_{n+1}(\alpha), \quad (10)$$

которое имеет, как видно из рис. 1, один действительный корень, принадлежащий интервалу $(0, n)$. Так как среднее число свободных каналов $\bar{a}_n(\alpha)$ равно $n - \alpha$ при $\alpha < n$ [2], то из уравнения (10) получим

$$\rho = \bar{v}_n(\alpha) - \bar{v}_{n+1}(\alpha), \quad (11)$$

где $\rho = q_2 / q_1$ — отношение издержек от простоя каналов и требований в очереди в единицу времени. Построим функцию

$$Y_{n, n+1}(\alpha) = \bar{v}_n(\alpha) - \bar{v}_{n+1}(\alpha). \quad (12)$$

Областью определения ее служит интервал $(0, n)$. Легко видеть, что функция $Y_{n, n+1}(\alpha)$ монотонно возрастает на этом интервале и на концах его принимает значения, равные

$$Y_{n, n+1}(0) = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow n} Y_{n, n+1}(\alpha) = +\infty. \quad (13)$$

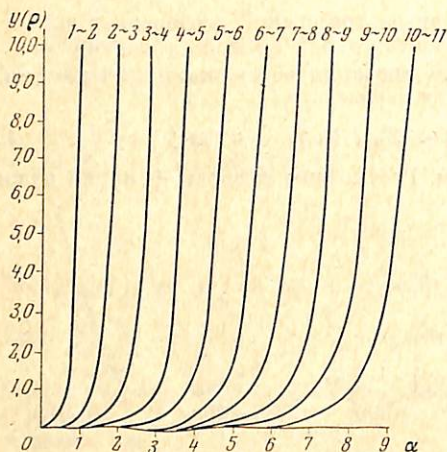


Рис. 2. Графики функции $Y_{n, n+1}(\alpha)$.
Для $1 \leq n \leq 10$; $0 \leq \alpha \leq 10$

Таким образом, значения функции $Y_{n, n+1}(\alpha)$ заключены внутри интервала $(0, \infty)$. Графики функции $Y_{n, n+1}(\alpha)$ представлены на рис. 2.

Точки пересечения графиков функций $Z_n(\alpha)$ и $Z_{n+1}(\alpha)$ для любого ρ лежат на графике функции $Y_{n, n+1}(\alpha)$.

Рассмотрим последовательно графики функции $Y_{n, n+1}(\alpha)$ для $n = 1, \dots, 10$ в системе координат αOY , представленные на рис. 2. График функции $Y_{1,2}(\alpha)$ и ось ординат ограничивает часть плоскости координат, и точки, лежащие внутри этой части плоскости, имеют абсциссы, значения которых расположены слева от значения абсциссы точки пересечения графиков функций $Z_1(\alpha)$ и $Z_2(\alpha)$ для любого ρ . Точно так же графики функций $Y_{1,2}(\alpha)$ и $Y_{2,3}(\alpha)$ определяют часть плоскости координат, точки которой имеют абсциссы со значениями, расположенными между абсциссами точек пересечения графиков функций $Z_1(\alpha)$ и $Z_2(\alpha)$, $Z_2(\alpha)$ и $Z_3(\alpha)$ для любого ρ , и т. д.

Так как отношение издержек $\rho = q_2 / q_1$ может быть любым положительным числом, то ось ординат можно рассматривать как ось ρ . Тогда точки, находящиеся внутри части плоскости координат $\alpha OY(\rho)$, ограниченной графиками функций $Y_{n-1, n}(\alpha)$ и $Y_{n, n+1}(\alpha)$, имеют координаты (α_n, ρ_n) .

Перейдем к решению задачи определения оптимального числа каналов системы при заданном коэффициенте использования канала α и отношении издержек ρ .

Пусть заданы некоторые значения α_0 и ρ_0 . Найдем на оси $O\alpha$ значение $\alpha = \alpha_0$, а на оси $OY(\rho)$ — значение $\rho = \rho_0$. Пересечение перпендикуляров, восстановленных из этих точек, определит точку плоскости координат $A(\alpha_0, \rho_0)$. Предположим, что точка A находится внутри части плоскости координат, заключенной между графиками функций $Y_{n_0-1, n_0}(\alpha)$ и $Y_{n_0, n_0+1}(\alpha)$. Значит, абсцисса точки A принадлежит интервалу $(\alpha_{n_0-1}, \alpha_{n_0})$. В этом случае оптимальным числом каналов обслуживания является n_0 .

Таким образом, задача определения оптимального числа каналов системы, при котором функция суммы общих издержек достигает минимума (в смысле выполнения условий (2)) при заданных α_0 и ρ_0 , сводится к нахождению точки плоскости координат $A(\alpha_0, \rho_0)$, лежащей внутри области, ограниченной графиками функций $Y_{n_0-1, n_0}(\alpha)$ и $Y_{n_0, n_0+1}(\alpha)$.

Может оказаться, что точка A принадлежит графику функции $Y_{n, n+1}(\alpha)$. Этот случай соответствует ситуации, когда при заданных α и ρ значение функции суммы общих издержек при n каналах совпадает со значением функции суммы общих издержек при $n+1$ каналах. Если указанная ситуация имеет место на практике, то для выбора оптимального числа каналов обслуживания следует воспользоваться вспомогательным критерием: средней длиной очереди, средним временем ожидания начала обслуживания, средним числом свободных каналов и т. д.

Изложенная методика определения оптимального числа каналов, при котором функция суммы общих издержек достигает минимума, достаточно проста и удобна для пользования при проведении расчетов вручную. Для использования ее нет необходимости рассматривать и вычислять финальные вероятности состояний системы и связанных с ними математических ожиданий, характеризующих стационарный режим системы массового обслуживания. Вполне достаточно установить, что исследуемая система массового обслуживания является марковской и, зная коэффициент использования канала и отношение издержек, по графикам функции $Y_{n, n+1}(\alpha)$, приведенным на рис. 2, рассчитать оптимальное число каналов обслуживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Шульга. О критериях эффективности разомкнутой системы обслуживания. В сб. Экономическая кибернетика и исследование операций. Семинар, вып. 1, Киев, 1967. (АН УССР, Научный совет по кибернетике, Ин-т кибернетики).
2. Ю. Н. Шульга. Определение оптимального числа обслуживающих аппаратов разомкнутой системы массового обслуживания. В сб. Применение математических методов в экономических исследованиях и планировании. Семинар, вып. 1, Киев, 1967. (АН УССР, Научный совет по кибернетике, Ин-т кибернетики).

Поступила в редакцию
13 II 1967

ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЙ НА БЭСМ-3 ПО RAS-МЕТОДУ ПРИ ОТСУТСТВИИ ОШИБОК НАБЛЮДЕНИЯ

В. Г. АРАНОВИЧ

(Москва)

Дана матрица [1]

$$W = (\hat{r}A\hat{s})\hat{x}, \quad (1)$$

являющаяся произведением матрицы A размерности $(n \cdot n)$ на диагональные матрицы $\hat{r}$, $\hat{s}$ и $\hat{x}$ той же размерности. Сумма элементов матрицы W в i -й строке равна величине z_i , а сумма элементов матрицы W в j -м столбце — величине d_j . Эти зависимости можно записать в векторной форме

$$\hat{r}(A\hat{x})s = d, \quad \hat{s}(A\hat{x})r = z. \quad (2)$$

Уравнения (2) представляют собой основные соотношения RAS-метода. В первом векторном уравнении обозначение A' означает транспонированную матрицу. Для практического использования зависимостей (2) необходимо записать их в индексном виде, т. е.

$$r_i \left[\sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) s_j \right] = z_i, \quad \left[\sum_{i=1}^n r_i (a_{ji}x_i) \right] s_j = d_j; \\ i, j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Разные индексы у величины x в первом и втором выражениях (3) не должны вводить в заблуждение, так как она определяет диагональную наперед известную матрицу. Кроме того, известной является и матрица a_{ij} , а также векторы z и d , поэтому произведение $a_{ji}x_i$ является ни чем иным, как элементом транспонированной матрицы от матрицы с элементом $a_{ij}x_j$. Искомые величинами же являются r_i и s_j , $i, j = 1, \dots, n$, поэтому запишем равенства (3) в виде

$$r_i = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) s_j}, \quad s_j = \frac{d_j}{\sum_{i=1}^n r_i (a_{ji}x_i)}; \\ i, j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Предлагается следующий алгоритм нахождения величин r_i и s_j .

Зададимся вполне определенными начальными значениями величины s_j , например, $s_j^0 = 1$, $j = 1, \dots, n$. Подставляя s_j^0 в первые n соотношений (4), получим какие-то значения величин r_i^0 , $i = 1, \dots, n$, затем их подставляем в последние n со-