

Изложенная методика определения оптимального числа каналов, при котором функция суммы общих издержек достигает минимума, достаточно проста и удобна для пользования при проведении расчетов вручную. Для использования ее нет необходимости рассматривать и вычислять финальные вероятности состояний системы и связанных с ними математических ожиданий, характеризующих стационарный режим системы массового обслуживания. Вполне достаточно установить, что исследуемая система массового обслуживания является марковской и, зная коэффициент использования канала и отношение издержек, по графикам функции $Y_{n, n+1}(\alpha)$, приведенным на рис. 2, рассчитать оптимальное число каналов обслуживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Шульга. О критериях эффективности разомкнутой системы обслуживания. В сб. Экономическая кибернетика и исследование операций. Семинар, вып. 1, Киев, 1967. (АН УССР, Научный совет по кибернетике, Ин-т кибернетики).
2. Ю. Н. Шульга. Определение оптимального числа обслуживающих аппаратов разомкнутой системы массового обслуживания. В сб. Применение математических методов в экономических исследованиях и планировании. Семинар, вып. 1, Киев, 1967. (АН УССР, Научный совет по кибернетике, Ин-т кибернетики).

Поступила в редакцию
13 II 1967

ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЙ НА БЭСМ-3 ПО RAS-МЕТОДУ ПРИ ОТСУТСТВИИ ОШИБОК НАБЛЮДЕНИЯ

В. Г. АРАНОВИЧ

(Москва)

Дана матрица [1]

$$W = (\hat{r}A\hat{s})\hat{x}, \quad (1)$$

являющаяся произведением матрицы A размерности $(n \cdot n)$ на диагональные матрицы $\hat{r}$, $\hat{s}$ и $\hat{x}$ той же размерности. Сумма элементов матрицы W в i -й строке равна величине z_i , а сумма элементов матрицы W в j -м столбце — величине d_j . Эти зависимости можно записать в векторной форме

$$\hat{r}(A\hat{x})s = d, \quad \hat{s}(A\hat{x})r = z. \quad (2)$$

Уравнения (2) представляют собой основные соотношения RAS-метода. В первом векторном уравнении обозначение A' означает транспонированную матрицу. Для практического использования зависимостей (2) необходимо записать их в индексном виде, т. е.

$$r_i \left[\sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) s_j \right] = z_i, \quad \left[\sum_{i=1}^n r_i (a_{ji}x_i) \right] s_j = d_j; \\ i, j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Разные индексы у величины x в первом и втором выражениях (3) не должны вводить в заблуждение, так как она определяет диагональную наперед известную матрицу. Кроме того, известной является и матрица a_{ij} , а также векторы z и d , поэтому произведение $a_{ji}x_i$ является ни чем иным, как элементом транспонированной матрицы от матрицы с элементом $a_{ij}x_j$. Искомые величинами же являются r_i и s_j , $i, j = 1, \dots, n$, поэтому запишем равенства (3) в виде

$$r_i = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) s_j}, \quad s_j = \frac{d_j}{\sum_{i=1}^n r_i (a_{ji}x_i)}; \\ i, j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Предлагается следующий алгоритм нахождения величин r_i и s_j .

Зададимся вполне определенными начальными значениями величины s_j , например, $s_j^0 = 1$, $j = 1, \dots, n$. Подставляя s_j^0 в первые n соотношений (4), получим какие-то значения величин r_i^0 , $i = 1, \dots, n$, затем их подставляем в последние n со-

отношений (4) и получаем новые значения величин $s_j^1, j = 1, \dots, n$. Теперь s_j^1 подставляем опять в первые n соотношений (4) и получаем $r_i^1, i = 1, \dots, n$, а их, в свою очередь — в последние n соотношений (4) и получаем теперь уже $s_j^2, j = 1, \dots, n$, и т. д. Таким образом, получается вполне определенный итерационный процесс, в результате которого получается ряд величин

$$s_j^0 \rightarrow r_i^0 \rightarrow s_j^1 \rightarrow r_i^1 \rightarrow s_j^2 \rightarrow r_i^2 \rightarrow \dots \rightarrow s_j^m \rightarrow r_i^m \rightarrow \dots \rightarrow s_j^{m+1} \rightarrow r_i^{m+1} \rightarrow \dots$$

Естественно предположить, что сходимость такого итерационного процесса можно оценить, например, по разности

$$\Delta s_j = s_j^{m+1} - s_j^m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Чем меньше будет величина Δs_j , тем, очевидно, ближе мы подходим к искомой величине s_j^* , $j = 1, \dots, n$, которую необходимо найти по RAS-методу.

Так как целое положительное число n , до которого изменяются индексы i и j , может быть достаточно большим, то сходимость данного алгоритма удобнее будет оценивать по величине

$$\delta = \sqrt{\sum_{j=1}^n (s_j^{m+1} - s_j^m)^2}. \quad (6)$$

Необходимо иметь в виду, что RAS-метод представляет собой конечные алгебраические соотношения, а не дифференциальные, поэтому нельзя требовать, чтобы величина δ была меньше наперед известной сколь угодно малой величины ϵ , т. е. вопрос о фундаментальной сходимости здесь не имеет места, Величина δ всегда

Программа вычислений

40	10	0500	0040	0000	110	13	0106	0112	0106
41	16	0042	7501	7610	111	56	0000	0113	0000
42	52	0500	0042	2043	112	00	0001	0001	0001
43	52	0000	0000	0000	113	112	0021	0105	0001
44	00	0000	0000	0000	114	52	0000	0000	0000
45	00	0000	0000	0000	115	01	5700	0560	5700
46	00	0000	0000	0000	116	13	0115	0120	0115
47	00	0000	0000	0000	117	56	0000	0121	0000
50	16	0051	7501	7610	120	00	0000	0001	0000
51	52	0640	0034	0610	121	112	0021	0115	0001
52	52	0640	0000	0022	122	44	5700	0000	5701
53	52	0000	0000	0000	123	52	0000	0000	0000
54	16	0055	7501	7610	124	00	5740	0000	0560
55	52	1344	0034	0610	125	13	0124	0127	0124
56	52	1344	0000	0022	126	56	0000	0130	0000
57	00	0000	0000	0000	127	00	0001	0000	0001
60	00	0000	0000	0000	130	112	0021	0124	0001
61	16	0062	7501	7610	131	52	0000	0000	0000
62	52	0640	0033	0560	132	56	0000	0141	0000
63	52	0300	0000	0022	133	04	0530	0300	5710
64	52	0000	0000	0000	134	04	0502	0400	5740
65	04	0530	0300	5710	135	02	0560	5740	0560
66	13	0065	0070	0065	136	05	0560	0560	0560
67	56	0000	0071	0000	137	01	5700	0560	5700
70	00	0001	0001	0001	140	00	5740	0000	0560
71	112	0021	0065	0001	141	00	0133	0000	0065
72	52	0000	0000	0000	142	00	0134	0000	0077
73	16	0074	7501	7610	143	00	0135	0000	0105
74	52	1344	0033	5710	144	00	0136	0000	0106
75	52	0400	0000	0022	145	00	0137	0000	0115
76	52	0000	0000	0000	146	00	0140	0000	0124
77	04	0500	0400	5740	147	00	5701	0000	5740
100	13	0077	0102	0077	150	16	0151	7501	7610
101	56	0000	0103	0000	151	52	5710	0027	5740
102	00	0001	0001	0001	152	00	0000	0000	0000
103	112	0021	0077	0001	153	16	0154	7501	7610
104	52	0000	0000	0000	154	52	0560	0027	0607
105	02	0560	5740	0560	155	00	0000	0000	0000
106	05	0560	0560	0560	156	56	0000	0060	0000
107	13	0105	0112	0105	157	00	0000	0000	0000

будет конечной и относительно достаточно большой величиной, но от шага к шагу она меняется, поэтому выбирать надо те значения величин s_j и r_i , для которых δ — наименьшая.

Теперь перейдем непосредственно к описанию программы, составленной для электронно-счетных машин БЭСМ-3М, БЭСМ-4, М-20 и т. д.

Числовой материал располагается следующим образом: 1) в ячейках 500—527 — вектор d ; 2) в ячейках 530—557 — вектор z ; 3) в ячейках 560—607 — начальное значение вектора s ; 4) в ячейках 610—637 — диагональная матрица $\hat{x}$; 5) в ячейках 640—2043 — сначала матрица a_{ij} , а затем матрица a_{ji} . Сама программа располагается в ячейках 40—157. Перед тем как ввести программу в машину по адресному коду (АК) с 40-й ячейки

```
55 0000 0040 0000
00 0040 0000 0000 1 (АК)
```

необходимо вызвать ИС-2 по системе команд, присущей данной конкретной электронно-счетной машине.

На печать выводятся векторы r и s , а также величина δ , причем печатается каждый итерационный шаг. Программа составлена для числа $n = 18$ (порядок матрицы), но она может работать и для величин $0 < n \leq 24$. Если одна или несколько строчек матрицы a_{ij} нулевые, то машина останавливается (Ав. ост.). При этом необходимо «протолкнуть» программу простым нажатием на кнопку «Пуск». В программе используются только четыре стандартных подпрограммы: СП-42, СП-34, СП-33 и СП-27, поэтому нет необходимости в дополнительном расширении рабочего поля. При переходе к матрице другого порядка ($n \neq 18$) необходимо: 1) в третьем адресе ячеек 52, 56, 63 и 75 записать порядок новой матрицы в восьмеричном виде; 2) в первом адресе ячеек 74, 103, 113 и 121 записать порядок новой матрицы в восьмеричном виде без единицы (т. е. на единицу меньше).

ЛИТЕРАТУРА

1. Input-output relationships 1954—1966. A programme for growth. Cambridge, 1963.

Поступила в редакцию
22 IV 1968

ОПТИМАЛЬНЫЙ СТРАХОВОЙ ЗАПАС ПРИ БОЛЬШОМ ЧИСЛЕ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

В. Л. ИНОСОВ, Н. В. СВЯТСКАЯ

(Киев)

Задача программирования запасов в условиях неопределенности потребности в сырье в основном сводится к определению оптимального размера резерва.

Критерием оптимальности этой величины служит условие минимума суммарных издержек от хранения и дефицитности материала. В [1] для отыскания величины оптимального резерва (страхового запаса) приводится выражение (имеется в виду периодичность пополнения запаса при случайном характере спроса)

$$\frac{d}{dR} \left\{ c_1 \int_{-\infty}^R (R-u)f(u)du + c_2 \int_R^{\infty} (u-R)f(u)du \right\} = 0, \quad (1)$$

где R — величина резерва, при котором суммарные издержки по его хранению и возможной дефицитности минимальны; c_1 — удельные издержки хранения; c_2 — удельные издержки дефицитности; u — случайная переменная, характеризующая фактически израсходованное количество материалов; $f(u)$ — распределение вероятности расходования материалов (предполагается известным).

Выражение (1) дает возможность определить оптимальную величину резерва при известном законе распределения вероятности случайного спроса.

Теория управления запасами имеет обширную библиографию, в основном зарубежную. Математические модели управления запасами создавались с учетом особенностей капиталистических предприятий, связь между которыми осуществляется в основном через рынок. Поэтому в (1) дефицит отождествляется с упущенными продажами. Возможное количество продаж за период здесь связано с вероятностью дефицита зависимостью весьма общего вида.