будет конечной и относительно достаточно большой величиной, но от шага к шагу она меняется, поэтому выбирать надо те значения величин s_j и r_i, для которых δ — наименьшая.

Теперь перейдем непосредственно к описанию программы, составленной для электронно-счетных машин БЭСМ-3М, БЭСМ-4, М-20 и т. д.

Числовой материал располагается следующим образом: 1) в ячейках 500—527 — вектор **d**; 2) в ячейках 530—557 — вектор **z**; 3) в ячейках 560—607 — начальное значение вектора **s**; 4) в ячейках 610—637 — диагональная матрица $\hat{x}$; 5) в ячейках 640—2043 — сначала матрица a_{ij}, а затем матрица a_{ji}. Сама программа располагается в ячейках 40—157. Перед тем как ввести программу в машину по адресному коду (АК) с 40-й ячейки

56 0000 0040 0000
00 0040 0000 0000 1 (АК)

необходимо вызвать ИС-2 по системе команд, присущей данной конкретной электронно-счетной машине.

На печать выводятся векторы **r** и **s**, а также величина δ, причем печатается каждый итерационный шаг. Программа составлена для числа $n = 18$ (порядок матрицы), но она может работать и для величин $0 < n \leqslant 24$. Если одна или несколько строчек матрицы a_{ij} нулевые, то машина останавливается (Ав. ост.). При этом необходимо «протолкнуть» программу простым нажатием на кнопку «Пуск». В программе используются только четыре стандартных подпрограммы: СП-42, СП-34, СП-33 и СП-27, поэтому нет необходимости в дополнительном расширении рабочего поля. При переходе к матрице другого порядка ($n \neq 18$) необходимо: 1) в третьем адресе ячеек 52, 56, 63 и 75 записать порядок новой матрицы в восьмеричном виде; 2) в первом адресе ячеек 71, 103, 113 и 121 записать порядок новой матрицы в восьмеричном виде без единицы (т. е. на единицу меньше).

ЛИТЕРАТУРА

1. Input-output relationships 1954—1966. A programme for growth. Cambridge, 1963.

Поступила в редакцию
22 IV 1968

ОПТИМАЛЬНЫЙ СТРАХОВОЙ ЗАПАС ПРИ БОЛЬШОМ ЧИСЛЕ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

В. Л. ИНОСОВ, Н. В. СВЯТСКАЯ

(Киев)

Задача программирования запасов в условиях неопределенности потребности в сырье в основном сводится к определению оптимального размера резерва.

Критерием оптимальности этой величины служит условие минимума суммарных издержек от хранения и дефицитности материала. В [1] для отыскания величины оптимального резерва (страхового запаса) приводится выражение (имеется в виду периодичность пополнения запаса при случайном характере спроса)

$$\frac{d}{dR}\left\{ c_1 \int_{-\infty}^{R} (R-u) f(u)\,du + c_2 \int_{R}^{\infty} (u-R) f(u)\,du \right\} = 0, \tag{1}$$

где R — величина резерва, при котором суммарные издержки по его хранению и возможной дефицитности минимальны; c_1 — удельные издержки хранения; c_2 — удельные издержки дефицитности; u — случайная переменная, характеризующая фактически израсходованное количество материалов; $f(u)$ — распределение вероятности расходования материалов (предполагается известным).

Выражение (1) дает возможность определить оптимальную величину резерва при известном законе распределения вероятности случайного спроса.

Теория управления запасами имеет обширную библиографию, в основном зарубежную. Математические модели управления запасами создавались с учетом особенностей капиталистических предприятий, связь между которыми осуществляется в основном через рынок. Поэтому в (1) дефицит отождествляется с упущенными продажами. Возможное количество продаж за период здесь связано с вероятностью дефицита зависимостью весьма общего вида.

В условиях функционирования социалистической экономики даже если спрос носит случайный характер, часто можно считать его стационарным.

Используем свойство стационарности спроса для отыскания такого способа определения размера R, который исключает необходимость знания вида функции распределения спроса. Эту задачу можно решить, если найти плотность вероятности полного исчерпания запаса A за время t, т. е. $p(t)$.

Согласно [2],

$$p(t)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi t_2}}\,\frac{A^2}{t^2 m_x}\exp\left[-\frac{[(A^2/m_x t)-A]^2}{2\sigma_x^2 t_2}\right], \tag{2}$$

где T — время полного исчерпания запаса A (случайная величина); m_x — математическое ожидание интенсивности спроса (считаем известным из статистических данных), размерность количество/время; σ_x — среднеквадратичное отклонение функции спроса (также определяется из статистики); t_2 — гарантированное время поставок; A — размер производственного запаса (сумма максимального текущего и страхового запасов).

Распределение $p(t)$ справедливо для любой случайной функции спроса [2]. Кроме того, оно позволяет установить вероятность исчерпания заданного уровня запаса A за время t.

Используя $p(t)$, запишем выражение (1) в форме, исключающей необходимость знания распределения функции спроса

$$\frac{d}{dA}\left\{c_1 m_x\int\limits_{t_2}^{\infty}(t-t_2)p(t)\,dt+c_2\int\limits_{0}^{t_2}(t_2-t)p(t)\,dt\right\}=0 \tag{3}$$

где $p(t)$ — распределение вероятности полного исчерпания запаса A за t дней; A, m_x, t, t_2 — то же, что в (2); c_1 — издержки хранения единицы продукции (руб./количество); c_2 — издержки простоя предприятия в единицу времени (руб./время).

Оптимальный страховой резерв

$$R=A_{\text{опт}}-m_x t_2=m_x(T_{\text{опт}}-t_2).$$

При определении R с использованием $p(t)$ предполагается знание стоимостных показателей c_1 и c_2, а также t_2, m_x, σ_x (последние определяются с помощью статистических данных).

В (1) и (3) первые слагаемые определяют величину издержек хранения резерва, вторые — величину издержек дефицитности.

Рассмотренные способы определения оптимального резерва пригодны для вероятностной системы с одним выходом (запасами пользуется один потребитель). В этом случае c_2 означает издержки от простоя всего предприятия в единицу времени. Для ряда задач производственной практики характерна следующая ситуация: дефицит какого-либо материала означает простой не всего предприятия, а лишь той его части, для функционирования которой он необходим. Например, одной из функций автотранспортного предприятия является ремонт автомашин. При тупиковом методе ремонта каждое рабочее место является самостоятельным потребителем. При отсутствии одного вида запчастей простаивать будут лишь те машины, для ремонта которых требуется именно эта запчасть. Причем количество простаивающих машин пропорционально размеру дефицита. Аналогичная ситуация возникает в строительстве при снабжении домостроительным комбинатом (поставщик) серии однотипных строительных объектов (потребители).

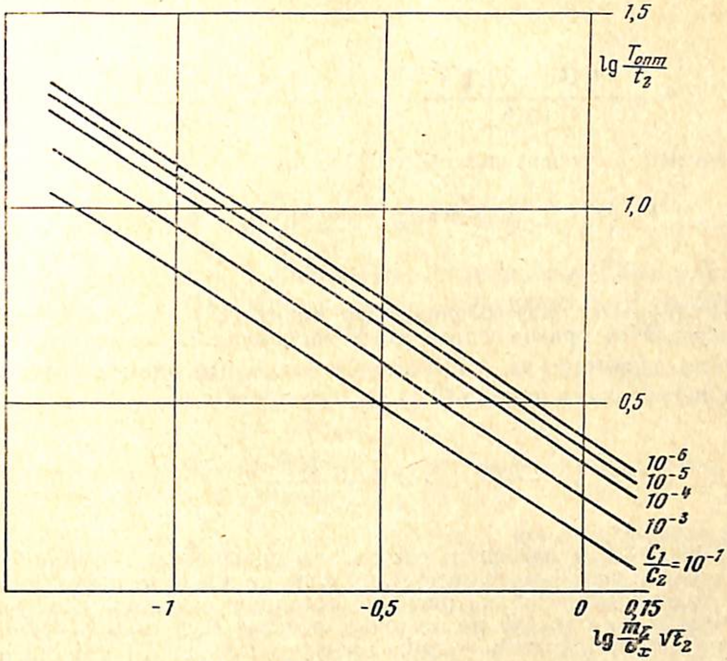
Определим размер оптимального резерва при конечномножественном числе идентичных выходов.

Выражение для издержек хранения останется прежним, задача состоит в определении издержек дефицитности.

Обозначим: m_ε — математическое ожидание интенсивности общего спроса всех потребителей (количество/время); m_x — математическое ожидание интенсивности спроса одного потребителя (количество/время); c_2 — издержки дефицитности одного потребителя в единицу времени (руб/время).

Если запас A исчерпается с вероятностью $p(k)$ за k дней, то в $(k+1)$-й день будет простаивать m_ε / m_x потребителей (в среднем), в $(k+2)$-й день $2m_\varepsilon / m_x$ потребителей и т. д., т. е. до прибытия следующей поставки увеличение количества простаивающих потребителей составит кортеж длиной (t_2-k)

$$\left\langle\frac{m_\varepsilon}{m_x},\ 2\frac{m_\varepsilon}{m_x},\ 3\frac{m_\varepsilon}{m_x}\ \ldots,(t_2-k)\frac{m_\varepsilon}{m_x}\right\rangle.$$



Номограмма определения оптимального резерва при снабжении нескольких потребителей из одного склада

Величина нехватки материала с момента исчерпания запаса до прибытия новой партии составит $m_\varepsilon\sum_{i=0}^{t_2-k} i$, если за приращение времени принять один день. При $\Delta t\to 0$ величина нехватки материала выразится в виде интеграла

$$m_\varepsilon\int_0^{t_2-k} t\,dt=\frac{m_\varepsilon}{2}(t_2-k)^2. \tag{4}$$

Издержки дефицита в случае исчерпания запаса A за k дней составят

$$c_2\frac{m_\varepsilon}{2}(t_2-k)^2 p(k), \tag{5}$$

а кумулятивные издержки дефицита

$$c_2\frac{m_\varepsilon}{2}\int_0^{t_2}(t_2-t)^2 p(t)\,dt. \tag{6}$$

Соответственно формула для определения оптимального запаса при наличии нескольких потребителей будет

$$\frac{d}{dA}\left\{c_2\frac{m_\varepsilon}{2}\int_0^{t_2}(t_2-t)^2p(t)\,dt+c_1m_\varepsilon\int_{t_2}^{\infty}(t-t_2)\,p(t)\,dt\right\}=0. \tag{7}$$

Пользуясь (2), приведем выражение (7) к виду, удобному для расчетов $A_{опт}=m_xT_{опт}$ на ЭВМ

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{c_2m_\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\bar{x}}(\bar{x}-x)^2e^{-x^2/2}\,dx+\frac{c_1m_\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\int_{\bar{x}}^{\infty}(x-\bar{x})\,e^{-x^2/2}\,dx\right\}=0, \tag{8}$$

где

$$\bar{x} = \frac{m_\varepsilon (t_2 - T)\sqrt{T}}{\sigma_x t_2}, \qquad x = \frac{m_\varepsilon (t - T)\sqrt{T}}{\sigma_x t_j}.$$

Если определить T относительно t_2, то

$$\frac{d}{d\left(\frac{T}{t_2}\right)}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\bar{x}} (\bar{x} - x)^2 e^{-x^2/2}\,dx + \frac{c_1}{c_2}\int_{\bar{x}}^{\infty} (x - \bar{x})\, e^{-x^2/2}\,dx\right\} = 0. \tag{9}$$

Выражение (9) содержит свободную переменную T / t_2 и связанную x. Определение $T_{\text{опт}}$ производится при фиксированных значениях c_1 / c_2, m_ε, σ_x, t_2. Легко заметить, однако, что параметры m_ε, σ_x, t_2 встречаются в (9) лишь в соотношении $m_\varepsilon\sqrt{t_2} / \sigma_x$. Это дает возможность, считая $T_{\text{опт}} / t_2$ функцией $m_\varepsilon\sqrt{t_2} / \sigma_x$, построить семейство кривых

$$\frac{T_{\text{опт}}}{t_2} = f\left(\frac{m_\varepsilon\sqrt{t_2}}{\sigma_x}\right)$$

при вариации отношения c_1 / c_2.

Авторами разработан алгоритм, составлена программа и выполнены соответствующие вычисления на ЭВМ «Минск-2». Анализ таких зависимостей, показанных в логарифмических координатах на рисунке, позволяет сделать следующий важный вывод. Величина $T_{\text{опт}}$, а значит и страхового резерва $R_{\text{опт}}$, при случайном характере спроса может быть представлена в виде произведения двух функций, одна из которых определяется относительной неравномерностью спроса, а другая отношением стоимостных показателей c_1 и c_2. Действительно, зависимости на рисунке могут быть представлены

$$\lg\left(\frac{T_{\text{опт}}}{t_2}\right) = \varphi\left(\frac{c_1}{c_2}\right) - 0{,}7\lg\left(\frac{m_\varepsilon\sqrt{t_2}}{\sigma_x}\right), \tag{10}$$

откуда

$$\frac{T_{\text{опт}}}{t_2} = \left(\frac{\sigma_x}{m_\varepsilon\sqrt{t_2}}\right)^{0,7} \exp 2{,}3\varphi\left(\frac{c_1}{c_2}\right). \tag{11}$$

В выражении (11) сомножитель $\sigma_x / m_\varepsilon\sqrt{t_2}$ характеризует степень неравномерности спроса, а $\exp 2{,}3\varphi(c_1 / c_2)$ определяется соотношением удельных издержек хранения и дефицитности.

Таким образом, для определения оптимального размера страхового запаса $R_{\text{опт}} = m_x(T_{\text{опт}} - t_2)$ в системе с несколькими потребителями необходимо лишь знание отношения c_1 / c_2 и статистических показателей m_x, σ_x, t_2. Величина $T_{\text{опт}}$ определяется по номограммам рисунка.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Ланге. Оптимальные решения. М., «Прогресс», 1967.
2. В. Л. Иносов, Н. В. Святская. Некоторые задачи оптимального управления запасами. Экономика и матем. методы, 1969, т. V, вып. 1.

Поступила в редакцию
25 III 1968