

СИСТЕМА МОДЕЛЕЙ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА ПЛАСТМАСС

В. М. ИОФФЕ, Б. Х. ХАЗАНОВ

(Москва)

Промышленность пластмасс — одна из ведущих и быстро развивающихся отраслей химической индустрии. За период с 1950 г. по 1968 г. мировое производство пластмасс выросло с 1,6 до 22 млн. т (среднегодовой темп роста 14,8%) [1, стр. 103; 2, стр. 3]. Изменение объемных показателей сопровождается значительными структурными сдвигами в производстве и применении этих материалов.

В настоящее время в крупных масштабах вырабатывается около 30 классов различных материалов (марочный ассортимент пластмасс исчисляется тысячами). Пластмассы находят применение практически во всех отраслях народного хозяйства, что делает межотраслевые связи этой отрасли в высшей степени разветвленными.

Значительная часть пластмасс (80—85%) используется в качестве взаимозаменяемых материалов с традиционными. Это означает, что в большинстве случаев имеется возможность решать одну и ту же производственно-техническую задачу либо с применением, либо без применения пластмасс. Разница в затратах на производство и эксплуатацию сравниваемых вариантов характеризует эффект применения пластмасс, который в зависимости от направления (объекта) использования может составлять от нескольких десятков до нескольких тысяч рублей в расчете на 1 т полимерных материалов.

Экономический анализ показывает, что в ближайшие 10—12 лет сохранится, по-видимому, значительный разрыв между экономически обоснованной потребностью и возможными масштабами выработки пластмасс.

Такое положение объясняется в первую очередь ограниченностью капиталовложений, которые могут быть направлены на развитие отрасли и в особенности освоены в течение 10—12-летнего периода, а также ограниченностью некоторых сырьевых и других ресурсов.

Опережающий рост потребности в пластмассах по сравнению с возможностями их производства, высокая экономическая эффективность и широкая взаимозаменяемость этих материалов подводят к необходимости решения следующей задачи: найти структуру производства и распределения пластмасс между потребителями, обеспечивающую максимальный народнохозяйственный эффект.

Задачи подобного типа возникают, как правило, в тех случаях, когда быстро развивающаяся отрасль вырабатывает значительный ассортимент продукции, эффективность применения которой существенно различается, и когда спрос на эту продукцию в силу каких-либо обстоятельств не может быть удовлетворен.

Рассмотрим экономико-математическую модель оптимизации структуры производства и применения пластмасс, отличие которой от описанной в [3] вызвано рядом уточнений, введенных при практических расчетах перспективного плана развития этой отрасли.

Введем обозначения: i — вид пластмасс, $i = 1, 2, \dots, n$; j — направление (объект) использования пластмасс, $j = 1, 2, \dots, m$; x_{ij} — прирост потребления i -й пластмассы в j -м направлении; a_{ij} — экономическая эффективность применения i -й пластмассы в j -м направлении использования; P_{ij} — потребность j -го направления в i -й пластмассе; d_{ij} — нижний (обязательный) уровень удовлетворения потребности j -го направления в i -й пластмассе; Q_i — объем производства i -й пластмассы; r_{ik} — расход k -го ресурса на производство единицы i -й пластмассы, $k = 1, 2, \dots, K$; R_k — дополнительные количества k -го ресурса (сверх необходимых для обеспечения нижнего уровня производства), направляемые на развитие отрасли; c_i — удельные капиталовложения на производство i -й пластмассы (при расчете этого показателя учитывается возможная степень освоения мощности); C — суммарный объем капиталовложений, направляемых в течение планового периода на развитие отрасли; b_i — нижний уровень производства i -й пластмассы, включающий объем производства на действующих и строящихся предприятиях, т. е. предприятиях, строительство которых было начато в предплановый период и которые будут введены в строй в течение планового периода; $\beta_{ii'}$ — коэффициент замены i -й пластмассы на i' -ю, т. е. количество пластмассы вида i' , которое требуется для замены 1 т пластмассы вида i ; γ_{ij} — предельный коэффициент замены i -й пластмассы в j -м направлении. Природа этого коэффициента связана с объединением (агрегированием) нескольких направлений использования пластмасс в одно, когда только в некоторых из агрегируемых направлений возможна замена одной пластмассы на другую. Коэффициент показывает долю i -й пластмассы, которая в данном агрегированном направлении может быть заменена на i' -ю.

Ограничения:

а) искомый объем прироста потребления i -й пластмассы в j -м направлении x_{ij} не может превышать разницы между экономически обоснованной потребностью и нижним (обязательным) уровнем удовлетворения ее $x_{ij} \leq P_{ij} - d_{ij}$; d_{ij} включает случаи применения пластмасс, обусловленные технической необходимостью (пластмассы как незаменимые материалы), и области, где применение пластмасс стало традиционным и использование других материалов заведомо не эффективно;

б) баланс производства и потребления
$$\sum_{j=1}^m d_{ij} + \sum_{j=1}^m x_{ij} = Q_i;$$

в) потребление i -й пластмассы во всех j -х направлениях должно быть не менее нижнего уровня производства этой пластмассы d_{ij} :

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \geq b_i - \sum_{j=1}^m d_{ij} \quad \text{при } b_i > \sum_{j=1}^m d_{ij};$$

г) общий объем капиталовложений и дефицитных видов, сырья, направляемых на развитие отрасли в течение планового периода

$$\sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq C; \quad \sum_{i=1}^n r_{ik} \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq R_k;$$

д) исключается свертывание производства $x_{ij} \geq 0$;

е) замена одной пластмассы на другую $\beta_{ii'} x_{ij} \leq \gamma_{ij} (P_{ij} - d_{ij})$, $x_{ij} + \beta_{ii'} x_{ij} \leq P_{ij} - d_{ij}$.

Целевая функция — максимизация народнохозяйственного эффекта применения пластмасс
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_{ij} \rightarrow \max.$$

Некоторые методы решения этой задачи описаны в [4, стр. 92].

Параметрами, которые, по существу, определяют получаемый результат, являются общая сумма капиталовложений и дополнительные ресурсы сырья, полупродуктов и др., направляемые на развитие отрасли. Эти параметры, будучи внешними для модели, могут быть получены только из решения задач более высокого уровня. В первую очередь это относится к капитальным вложениям, распределяемым на межотраслевом уровне. Что же касается ресурсов сырья, то ограничения в данном случае носят менее жесткий характер. Дело в том, что производство пластмасс в основном базируется на нефтехимическом сырье, наличие и доступность которого даже при существующих масштабах нефтепереработки очевидна. Однако не исключается, что в силу комплексности нефтехимических производств и технологической невозможности полной сбалансированности спроса-предложения это ограничение может влиять в отдельные моменты времени на расширение выработки некоторых пластмасс.

Из приведенного описания видно, что рассматриваемая экономико-математическая модель является статической. Такой подход обусловлен в первую очередь большой размерностью задачи, при этом пока не удалось найти приемлемого вычислительного метода для решения подобных задач в динамической постановке.

Вместе с тем последовательным решением ряда задач в статической постановке создаются возможности для получения оптимальной структуры производства пластмасс для нескольких последовательных моментов времени. Планы для промежуточных лет могут быть получены интерполяцией. Благодаря тому, что при решении каждой задачи (в рамках общих ограничений) учитывается, с одной стороны, возможная замена одной пластмассы на другую и, с другой — изменение технико-экономических показателей (на стадии подготовки информации), получаемые результаты могут быть расчленены на отдельные однопродуктовые задачи.

Действительно, найденная оптимальная структура, обеспечивающая в рамках принятых условий и ограничений максимизацию народнохозяйственного эффекта, показывает, какие пластмассы и в каких объемах следует вырабатывать в каждый момент времени, что в конечном счете позволяет получить план производства каждого вида пластмасс на некоторый период времени. Однако при этом остается неясным, как рассматриваемую систему можно вывести в оптимальное состояние. Решение этой второй задачи рассмотрено ниже.

Динамическая постановка задачи развития отрасли базируется на решении ряда задач оптимизации структуры производства и распределения в статической постановке.

Пусть рассматривается плановый период продолжительностью в T лет. Информация о состоянии производства в начальном году планового периода может быть получена с достаточной точностью, так как продукция в первом году периода может вырабатываться лишь на действующих предприятиях или предприятиях, строительство которых уже началось и которые войдут в строй в течение планового периода. Затем последовательно решаются k задач ($k < T$) оптимизации структуры производства пластмасс (или продукции из них) на ряд лет планового периода: $T_1, T_2, \dots, T_k$, где $1 < T_1 < T_2 < \dots < T_k = T$. Полученные решения представляют собой планы производства всех имеющихся видов продукции. Планы производства во все промежуточные годы планового периода могут быть установлены интерполяцией.

Теперь, когда планы производства получены, задача распадается на ряд однопродуктовых задач (или задач комплексного производства), которые могут быть сформулированы так: *определить, когда и какие предприя-*

тия следует начать строить (или ввести в строй), чтобы в каждом году планового периода располагать достаточными освоенными мощностями для производства намечаемого объема продукции и чтобы суммарные затраты на строительство всех предприятий и выпуск всего объема продукции были бы минимальными.

Прежде чем строить экономико-математическую модель и решать такую задачу необходимо рассмотреть ряд проблем.

1. Начальное состояние системы. В рамках данной задачи не решается вопрос закрытия предприятий, поэтому решению ее должен предшествовать тщательный анализ состояния отрасли. Выявляются предприятия, на которых технически возможно провести реконструкцию или расширение. Если минимальный срок строительства предприятий (до получения первой продукции) составляет t лет, то в 1-, 2-, ..., $(t-1)$ -м годах условия задачи не могут быть выполнены за счет строительства в плановом периоде. Поэтому, если возникает вопрос закрытия устаревших (или небольших) предприятий, он должен решаться с учетом необходимости выполнения плана в первые $(t-1)$ лет планового периода. Требование обеспечения прироста выпуска продукции в эти годы не следует включать в экономико-математическую модель задачи.

2. Целесообразная длительность планового периода. Брать продолжительность планового периода T того же порядка, что и сроки строительства и освоения предприятий (2—4 года), бессмысленно, так как при малых T влияние начального состояния отрасли и плана последнего года периода будет определяющим. В самом деле, в первые годы всю «нагрузку» несут действующие предприятия и предприятия, строительство которых началось в предплановый период. Предприятия же, которые начали строиться в течение планового периода, смогут выдать продукцию лишь в последние 1—2 года.

Рациональная продолжительность планового периода ограничена и сверху. Действительно, возможности технического прогресса (появление новых материалов или новых технологических способов) могут быть учтены только для тех материалов и способов, по которым закончены поисковые работы. Лишь в этом случае можно с определенной степенью надежности указать технико-экономические показатели новых производств. Отечественный и зарубежный опыт свидетельствует, что время от окончания исследовательских работ до их крупнотоннажной реализации в промышленности составляет 8—10 лет. За пределами этого периода не могут быть сделаны достаточно надежные предсказания возможного технического прогресса.

Приведенные соображения дают основание выбрать продолжительность планового периода в десять лет.

3. Задельные мощности. Очевидно, что предприятия, строительство которых начинается в последние годы планового периода и которые поэтому не будут введены в строй в течение этого периода, не могут войти в оптимальное решение. Действительно, если предположить, что одно из таких предприятий вошло в оптимальное решение, то решение это можно улучшить (уменьшить затраты без ущерба для выполнения плана производства), исключив такое задельное предприятие из плана строительства. При этом подходе оптимальный план строительства и ввода не будет включать задельные предприятия, т. е. цели строительства исчерпываются плановым периодом. Это значительно снижает практическую ценность получаемых решений. Можно предложить следующий путь преодоления этой трудности. На основании анализа результатов решения (без учета задельных мощностей) устанавливается среднегодовой объем капиталовложений, осваиваемых в течение планового периода, и предусматривается в течение

первых «заплановых» лет ввод мощностей примерно в том же темпе. Можно несколько увеличить надежность экстраполяции исходя из того, что если производство продукции в последнем году планового периода значительно ниже выявленной на этот год потребности, то продолжение за T -й год темпов роста, имевших место в течение планового периода, вполне разумно. Если же производство и потребность в последнем году близки между собой, то темпы роста за пределами планового периода следует снижать тем сильнее, чем меньше разница между производством и потребностью. Разумеется, приведенные соображения основаны на качественном анализе и позволяют указать лишь направление корректировки темпов роста в заплановый период.

Нужно, однако, знать не только как, но и на сколько лет следует «продлить» плановый период с тем, чтобы дальнейшее «удлинение» хвоста не влияло на план строительства в пределах планового периода. Эта проблема была решена экспериментально. Расчет проводился для планового периода, увеличенного на 1, 2, 3... года. Оказалось, что удлинение периода более чем на 5 лет не влияло на решение. Поэтому расчет проводился для 15-летнего планового периода, а результаты использовались лишь за первые 10 лет.

4. Технологические способы. План может быть реализован путем строительства предприятий одного или нескольких типов. Под «типом предприятия» понимаются объекты, различающиеся мощностью, сроками строительства и освоения проектной мощности, технико-экономическими показателями (капиталовложениями с распределением по годам и себестоимостью продукции в зависимости от степени освоения мощности).

Рассматриваются только технически допустимые типы предприятий, т. е. такие, которые могут быть реализованы в течение планового периода.

В экономико-математической модели учтены возможности изменения технико-экономических показателей предприятий и появления в течение планового периода новых типов предприятий. Включение, начиная с некоторого года, новых типов предприятий позволит определить целесообразность их строительства (или условий, при которых эти предприятия становятся эффективными). Такие выводы могут быть полезны при проведении оценки проектных или конструкторских проработок. Типом предприятия можно называть и проект реконструкции или расширения какого-либо из действующих предприятий (нужно лишь указать, что их количество не должно превышать числа предприятий, на которых можно осуществить реконструкцию). Тогда в результате решения будет получен ответ на вопрос о том, выгодно ли проводить реконструкцию и если выгодно, то когда.

Заметим, наконец, что можно ввести в рассмотрение каждое предприятие в виде нескольких разных типов, различающихся сроками строительства и освоения проектной мощности (с соответствующим перераспределением по годам капитальных и текущих затрат). Тогда решение покажет, не только что и когда, но и в какие сроки следует строить.

5. Затраты. При динамической постановке задачи затраты исчисляются интегрально за весь рассматриваемый период [5, стр. 11]. При этом учитываются как единовременные затраты на строительство новых и расширение действующих предприятий, так и текущие затраты на выработку продукции на этих предприятиях в предусмотренных планом объемах.

Для учета разновременности затрат применяется дисконтирование по формуле сложных процентов, т. е. дисконтирующий множитель при приведении к первому году планового периода имеет вид

$$\gamma_t = 1 / (1 + E)^{t-1}.$$

Экономико-математическая модель. Пусть в каждом году t планового периода продолжительностью в T лет (время дискретно: $t = 1, 2, \dots, T$) должен вырабатываться некоторый объем продукции M_t . Из предположения дискретности времени естественно вытекает требование дискретности всех параметров модели. Все они должны задаваться в расчете на годовой промежуток времени — затраты, время начала и окончания строительства и т. п.

Пусть имеется N типов предприятий. Под предприятием j -го типа, $j = 1, 2, \dots, N$, понимается производство (завод, цех, линия) с заданными: мощностью m_j , сроками строительства и освоения; капиталовложениями с распределением по годам строительства; себестоимостью продукции в зависимости от степени освоения мощности. Обозначим через x_{tj} количество предприятий j -го типа, строительство которых следует начать в t -м году планового периода. Поскольку каждое предприятие может быть либо построено целиком, либо не строиться вовсе, то x_{tj} — целая величина.

Далее, пусть β_{tij} , K_{tij} и C_{tij} — соответственно коэффициент освоения мощности, капитальные и текущие затраты в $(t+i)$ -м году планового периода на предприятие типа j , строительство которого началось в t -м году планового периода. Как капитальные, так и текущие затраты приведены к первому году планового периода умножением на дисконтирующий множитель.

В каждом году t планового периода суммарная освоенная мощность предприятий должна быть не менее M_t . Это требование записывается в виде системы T неравенств

$$\sum_{\tau=1}^t \sum_{j=1}^N \beta_{\tau, (t-\tau), j} m_j x_{\tau j} \geq M_t, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (1)$$

Выпишем теперь выражение для суммарных (капитальных и текущих) затрат, которые необходимы для выполнения условий (1).

Затраты на предприятие типа j , строительство которого началось в году τ , составят в течение всего планового периода $L_{\tau j} =$

$\sum_{t=\tau}^T (K_{\tau, (t-\tau), j} + C_{\tau, (t-\tau), j})$. Суммарные затраты Q за весь плановый пе-

риод составят: $Q = \sum_{\tau=1}^T \sum_{j=1}^N L_{\tau j} x_{\tau j}$. Цель состоит в отыскании такого плана

строительства и ввода предприятий (т. е. такого вектора $x_{\tau j}$), который, удовлетворяя условиям (1), минимизирует значение функционала

$$Q = \sum_{\tau=1}^T \sum_{j=1}^N L_{\tau j} x_{\tau j} \rightarrow \min. \quad (2)$$

При этом неизвестные $x_{\tau j} \geq 0$ и целые. (1a)

Количество предприятий, которые начинают строиться одновременно, ограничено сверху

$$\sum_{j=1}^N x_{\tau j} \leq d_{\tau}^*, \quad \tau = 1, 2, \dots, T. \quad (3)$$

* Предложение использовать условия вида (3) вместо ограничений сверху типа $x_{\tau j} \leq d_{\tau j}$, ранее применявшихся авторами, высказано С. С. Лебедевым.

Условие (3) экономически может быть интерпретировано как ограничение мощности строительных организаций и возможности получения оборудования.

Задачу, описанную моделью (1), (2), (1а), будем для краткости называть «задача (1) — (2)».

Анализ экономико-математической модели. Прежде чем перейти к решению задачи, исследуем ее особенности.

Обозначим через M матрицу коэффициентов левых частей системы неравенств (1). Рассмотрим структуру этой матрицы.

Элементами первого столбца матрицы M являются мощности предприятия типа $j = 1$, строительство которого началось в году $t = 1$. В первой строке этого столбца стоит освоенная мощность предприятия в 1-м, во 2-м году, и вообще, в i -й строке — в i -м году планового периода.

Аналогично столбцы 2-, 3-, ..., N -й содержат освоенные мощности предприятий типа $j = 2, 3, \dots, N$ соответственно, строительство которых началось в первом году планового периода.

Дальнейшие рассуждения ведутся в предположении, что количество различных типов предприятий N , а также сроки строительства и освоения заданы и не меняются в течение планового периода T .

В столбцах $(N + 1)$, $(N + 2)$, ..., $2N$ матрицы M стоят освоенные мощности предприятий тех же типов, $j = 1, 2, \dots, N$, строительство которых начато во втором году планового периода.

Вообще, в группе из N столбцов, начиная со столбца $(qN + 1)$ и кончая столбцом $(q + 1)N$, содержатся мощности предприятий типов $j = 1, 2, \dots, N$, строительство которых началось в году $(q + 1)$ планового периода, при этом в 1-, 2-, ..., q -й строках этой группы столбцов стоят нули. Это и понятно, так как строительство этих предприятий началось в $(q + 1)$ -м году, а значит до этого они имели освоенную мощность, равную нулю. В последующих строках $((q + 1)$ -й, $(q + 2)$ -й, ..., T -й) этой группы столбцов стоят освоенные мощности предприятий в 1-, 2-, ..., $(T - q - 1)$ -й годы после начала их строительства (т. е. в $(q + 1)$ -й, $(q + 2)$ -й, ..., T -й годы планового периода).

Теперь ясно, что любые два столбца l -й и $\bar{l}$ -й, такие, что $\bar{l} = l + N$, различаются лишь тем, что $\bar{l}$ -й столбец сдвинут относительно l -го на одну строку вниз*.

Наконец, каждый столбец матрицы M имеет весьма простое строение. Коэффициент освоения мощности β_{tij} от начала планового периода ($t = 0$) до года, предшествующего получению первой продукции, равен нулю. Затем в течение срока освоения этот коэффициент монотонно возрастает до единицы и далее остается неизменным. Каждый столбец поэтому имеет вид $0; 0; \dots; 0; \bar{m}_1; \bar{m}_2; \dots; \bar{m}_{r-1}; \bar{m}_r; \bar{m}_{r+1} = \bar{m}_r; \bar{m}_{r+2} = \bar{m}_r; \dots; \bar{m}_T = \bar{m}_r$.

Таким образом, столбец начинается с группы нулей, соответствующих значению коэффициента освоения мощности $\beta = 0$. Элементы столбца $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_{r-1}$, где $\bar{m}_i < \bar{m}_j$ при $i < j$ и $i, j \leq r - 1$, соответствуют $0 < \beta < 1$, т. е. процессу освоения проектной мощности предприятия. Остальные элементы этого столбца одинаковы и равны проектной мощности предприятия (соответствуют значению коэффициента освоения мощности $\beta = 1$).

Итак, матрица M состоит из T групп столбцов по N столбцов в каждой группе. Каждая последующая группа сдвинута на одну строку вниз по отношению к предыдущей. В каждом столбце имеется лишь r различающихся между собой строк, а все элементы, стоящие ниже, равны между

* Ясно, что при этом нижний элемент сдвинутого вниз столбца выходит за пределы матрицы M и «теряется».

собой. Величина r есть промежуток времени от получения первой продукции до освоения проектной мощности предприятия.

Таким образом, матрица M состоит из блоков одинакового строения, причем каждый последующий сдвинут на одну строку вниз по отношению к предыдущему. Это хорошо видно из рисунка, представляющего собой схему матрицы M левых частей задачи.

Пользуясь этими особенностями, можно вводить в ЭВМ не всю матрицу M , а лишь различающиеся между собой элементы $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_r$ ее первых N столбцов. Остальная часть столбцов, а также все T групп столб-

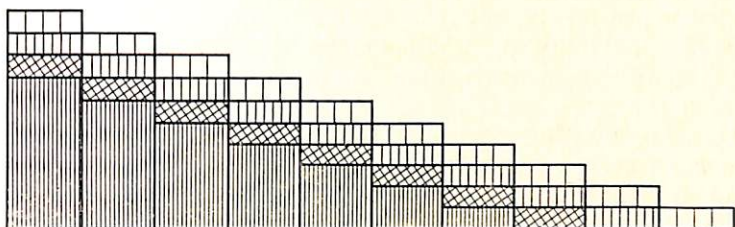


Схема матрицы M коэффициентов левых частей системы неравенств (1)

цов «достраиваются» самой ЭВМ с помощью несложной программы. Это позволяет существенно сократить время ввода исходной информации в ЭВМ, а также, что особенно важно, значительно упрощает процесс подготовки исходных данных для счета на ЭВМ — вместо сотен перфокарт при вводе полной матрицы M достаточно подготовить десяток перфокарт.

Если отказаться от предположения о постоянстве N , то длина «ступенек» матрицы M будет в разные годы различна, т. е. число столбцов, входящих в блок, будет неодинаково в разных блоках. Если в течение планового периода меняются сроки строительства и освоения, то меняется число различных элементов столбца; меняются и элементы $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_{r-1}$. Однако ступенчатость матрицы, а также одинаковость элементов каждого столбца, начиная с $\bar{m}_r$, сохраняются и в этом случае.

Метод решения. Модель (1) — (2) описывает задачу целочисленного линейного программирования. Существующие в настоящее время универсальные методы позволяют решать целочисленные задачи лишь небольших размеров, и вряд ли можно ожидать в ближайшее время появления новых методов, которые дали бы возможность решать любые задачи за приемлемое время [6, стр. 219—228]. Для решения задачи (1) — (2) мы попытались использовать дискретный алгоритм Гомори [7, стр. 193—206] и прелиминарный вариант (не обеспечивающий конечности) метода Юнга [8, стр. 213—250]. Эти алгоритмы привлекают тем, что счет ведется в целых числах, а значит, не возникает ошибок округления, которые нередко оказываются фатальными при использовании циклического алгоритма Гомори. Попытки эти не дали, однако, сколь-нибудь обнадеживающих результатов. Дискретный алгоритм Гомори не привел к оптимальному решению, хотя было выполнено несколько десятков тысяч итераций. Алгоритм Юнга за первые 150—200 шагов давал план, отличающийся от оптимального (по значению функционала) примерно на 5%, и дальнейшее улучшение прекращалось. По этой причине, а также ввиду того, что моделью (1) — (2) может быть описан важный класс экономических задач, нами разработан метод, существенно использующий специфику задачи (1) — (2).

Процедура решения состоит в последовательном, по годам, переборе всевозможных вариантов строительства с отсевом тех, которые не удовлет-

воряют условиям задачи. Одновременно, путем сравнения с приближенным решением, отсеиваются комбинации переменных, которые не могут войти в оптимальный план. Вводится понятие «предельной величины резерва» Δ , и все сочетания предприятий, дающие в каком-либо году планового периода избыток освоенной мощности не менее Δ , также исключаются.

Опишем сначала способ приближенного решения задачи (1) — (2). Идея его состоит в отыскании такого плана строительства, который, удовлетворяя условиям задачи, давал бы минимальные резервы освоенной мощности в каждом году планового периода и при этом включал наиболее экономичные типы предприятий в максимально возможной степени.

Обозначим через m_{1j} освоенную мощность предприятия j -го типа в год выдачи первой продукции и для упрощения занумеруем типы предприятий в порядке убывания удельных затрат $L_{\tau j} / m_j$.

Пусть план строительства, удовлетворяющий первым $(t-1)$ условиям системы (1), получен. Тогда нетрудно вычислить освоенную мощность $\bar{m}_t$, даваемую в t -м году предприятиями, обеспечившими выполнение плановых заданий в предшествующие (до $(t-1)$ -го) годы. Если оказывается, что $\bar{m}_t \geq M_t$, то сразу переходим к рассмотрению $(t+1)$ -го условия системы (1). Если же $\bar{m}_t < M_t$, т. е. t -е условие не выполнено, то рассматриваем один за другим N планов, которые включают предприятия, выдающие первую продукцию в t -м году планового периода:

$$\left. \begin{aligned} 1\text{-й план} & \text{ включает } K_1 \text{ предприятий типа } j=1; \\ 2\text{-й план} & \text{ — } (K_1-1) \text{ предприятий типа } j=1 \text{ и } K_2 \text{ — типа } j=2; \\ 3\text{-й план} & \text{ — } (K_j-1) \text{ предприятий типа } j=1, 2 \text{ и } K_3 \text{ — типа } j=3; \\ N\text{-й план} & \text{ — } (K_j-1) \text{ предприятий типа } j=1, 2, \dots, (N-1) \text{ и} \\ & K_N \text{ — типа } j=N. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Величины K_j выбираются так, чтобы выполнялись условия $(K_j-1) \times m_{1j} < M_t - \bar{m}_t - \sum_{i=1}^{j-1} (K_i-1) m_{1i} \leq K_j m_{1j}$, $j=1, 2, \dots, N$. Нетрудно видеть, что величина $\Delta M_{tj} = K_j m_{1j} - M_t + \bar{m}_t + \sum_{i=1}^{j-1} (K_i-1) m_{1i}$, $j=1, 2, \dots, N$, есть резерв освоенной мощности, даваемый в году t j -м планом (из системы планов (4)).

Включаем в решение план $j=l$, такой, что

$$\Delta M_{tl} = \min_{j \in \{1, 2, \dots, N\}} \{\Delta M_{tj}\}.$$

Если нашлось несколько планов с одинаковыми ΔM_{tl} , то из них выбираем план с наименьшим номером. Выполняя такой подбор плана последовательно для $t=1, 2, \dots, T$, получаем приближенное решение задачи (1) — (2).

Далее предположим, что все элементы матрицы M — целые неотрицательные числа.

Обратимся к изложению метода частичного перебора.

Перед началом вычислений составляем таблицу «фиктивных затрат» $Q_{t\phi}$. Определим фиктивные затраты выражением

$$Q_{t\phi} = \sum_{\theta=t+1}^T C_{\theta}, \quad t=2, 3, \dots, T, \quad (5)$$

где C_0 — «фиктивные затраты» для обеспечения выполнения плана в θ -м году планового периода

$$C_0 = \frac{L_{\tau j_0}}{m_{\bar{j}}} (M_0 - M_{\theta-1}). \quad (5a)$$

Здесь $L_{\tau j_0}/m_{\bar{j}}$ — наименьшие удельные (на единицу мощности) затраты на предприятие, выдающее первую продукцию в году τ

$$L_{\tau j_0}/m_{\bar{j}} = \min_{j \in \{1, 2, \dots, N\}} \{L_{\tau j}/m_j\}, \quad (5b)$$

τ таково, что

$$\beta_{\tau, (\theta-\tau-1), j} = 0 \quad \beta_{\tau, (\theta-\tau), j} > 0.$$

Экономический смысл «фиктивных затрат» заключается в следующем: C_0 — объем затрат на покрытие прироста мощности в году θ при условии, что строится предприятие с наименьшими удельными затратами и притом с мощностью в точности равной нужному приращению освоенной мощности ($M_0 - M_{\theta-1}$). Таким образом, при подсчете фиктивных затрат не учитывается неделимость объектов, а затраты считаются пропорциональными мощности. Ясно, что фиктивные затраты не превосходят соответствующих реальных затрат.

Пусть построен набор планов строительства, удовлетворяющий первым $(i-1)$ условиям системы (1). Составляем всевозможные комбинации целых неотрицательных переменных $x_{\tau j}$, удовлетворяющие условию (3) для t -го года. Соединяя эти комбинации с каждым из построенных ранее планов первых $(t-1)$ лет, получаем планы строительства, позволяющие выполнить задания M_{τ} в первые t лет планового периода. Выбираем из этих планов лишь те, которые удовлетворяют t -му условию системы (1)* и могут стать частью оптимального плана. Для этого вычисляем r величин μ_l , определяемых выражением

$$\mu_l = \sum_{\tau=1}^t \sum_{j=1}^N \beta_{\tau, (t-\tau+l), j} m_j x_{\tau j}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, r-1, \quad (6)$$

где

$$r = \max_{j, j' \in \{1, 2, \dots, N\}} \{r_{\text{осв. } j} - r_{\text{стр. } j'}\} \text{ и}$$

$r_{\text{стр. } j'}$ — время от начала строительства до получения первой продукции на предприятии типа j' ; $r_{\text{осв. } j}$ — время от начала строительства предприятия j -го типа до освоения проектной мощности; μ_l — величина освоенной мощности предприятий, строительство которых началось до t -го года включительно, в t -м, $(t+1)$ -м, ..., $(t+r-1)$ -м годах планового периода. По определению r и в силу специфической структуры матрицы M , показанной на рисунке, $\mu_{r+k} = \mu_{r-1}$, $k = 0, 1, 2, \dots, T-t$. Поэтому вектор $(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{r-1})$ полностью определяет «вклад» предприятий, строительство которых началось в первые t лет, в выполнение плановых заданий M_{τ} .

Проводим отбор.

4) Оставляем для дальнейшего анализа лишь такие комбинации предприятий, которые удовлетворяют условию

$$\mu_0 \geq M_t. \quad (7)$$

* Первые $(t-1)$ условий удовлетворяются по построению.

Сравнивая (6) и (7), легко убедиться, что (6) есть требование выполнения t -го условия системы (1).

2) Из оставшихся после «отсева снизу» (по правилу (7)) комбинаций берем лишь те, для которых

$$\mu_0 < M_{t \max} + a, \quad (8)$$

где $M_{t \max}$ — максимальный план производства за период с t -го до $(t + \bar{r} - 1)$ -го года

$$M_{j \max} = \max_{\tau=t, t+1, \dots, t+\bar{r}-1} \{M_{\tau}\};$$

$\bar{r}$ — максимальный промежуток времени от получения первой продукции до достижения проектной мощности $\bar{r} = \max_{i \in \{1, 2, \dots, N\}} \{r_{\text{осв.}i} - r_{\text{стр.}i}\}$.

Отметим, что величина $\bar{r}$ обычно невелика. Например, согласно существующим нормам, $\bar{r}$ в нефтехимии обычно не превышает 1—2 лет. Тогда

$$a = \max_{\substack{j \in \{1, 2, \dots, N\} \\ \theta \in \{1, 2, \dots, \bar{r}-1\}}} \{m_{1j}; m_{\theta+1, j} - m_{\theta, j}\}.$$

где $m_{\theta j}$ — освоенная мощность предприятия j -го типа в θ -м году после получения первой продукции.

Комбинации предприятий, не удовлетворяющие условию (8), не могут войти в оптимальный план. Предположим противное: пусть в оптимальный план вошла комбинация переменных такая, что

$$\mu_0 \geq M_{t \max} + a, \quad (8a)$$

т. е. условие (8) не выполняется. План, включающий комбинацию со свойством (8a), может быть улучшен, а значит не является оптимальным. Докажем это утверждение. Действительно, можно снизить затраты Q , перенеся строительство одного из предприятий, выдающих первую продукцию в t -м году, на один год позже. Это никак не отразится на величине освоенной мощности в годы до t -го и после $(t + \bar{r} - 1)$ -го. В $(t + k)$ -м году, $k = 0, 1, 2, \dots, \bar{r} - 1$, освоенная мощность будет не менее $M_{t \max}$ (по определению a и ввиду (8a)), а $M_{t \max} \geq M_{t+k}$ (по определению $M_{t \max}$).

Итак, план, не удовлетворяющий условию (8), неоптимален и, значит, отсев по правилу (8) не приводит к отклонению от оптимума.

3) Вычисляем затраты Q_t на предприятия, выдающие первую продукцию до t -го года включительно

$$Q_t = \sum_{j=1}^N \sum_{\tau=1}^t L_{\tau j} x_{\tau j}.$$

Эти предприятия обеспечивают выполнение плана в первые t лет планового периода и, за счет дальнейшего освоения мощности и резерва, также части планов нескольких (не более чем $(\bar{r} - 1)$) последующих лет.

Фиктивные затраты Q_{Φ} на выполнение оставшейся части плана будут равны: а) в $(t + k)$ -м году, $k = 1, 2, \dots, \bar{r} - 1$,

$$Q_{\Phi}^{(k+t)} = \begin{cases} 0, & \text{если } M_{t+k} \leq \mu_k, \\ C_0(M_{t+k} - \mu_k), & \text{если } M_{t+k} > \mu_k; \end{cases}$$

б) за период с $(t + \bar{r})$ -го до T -го года планового периода фиктивные затраты равны $Q_{(t+\bar{r}-1)\Phi}$ (см. (5)). Значит

$$Q_{\Phi} = \sum_{k=1}^{\bar{r}-1} Q_{\Phi}^{(t+k)} + Q_{(t+\bar{r}-1)\Phi}.$$

Складываем «реальные» затраты Q_t , необходимые для выполнения планов первых t лет, и «фиктивные» затраты Q_{Φ} на выполнение планов оставшихся $T - t$ лет планового периода и сравниваем эту сумму с затратами на приближенное решение $Q_{\text{прибл.}}$.

Для дальнейшего рассмотрения оставляем лишь такие планы, что

$$Q_t + Q_{\Phi} < Q_{\text{прибл.}} \quad (9)$$

Действительно, планы, у которых $Q_t + Q_{\Phi} \geq Q_{\text{прибл.}}$, не могут войти в оптимальное решение, так как они не лучше приближенного решения. Если бы такая комбинация вошла в оптимальное решение, то затраты на такое решение Q были бы больше, чем $Q_{\text{прибл.}}$: $Q \geq Q_t + Q_{\Phi} \geq Q_{\text{прибл.}}$, а, значит, найденное решение не лучше приближенного и может быть отброшено.

Ясно, что чем ближе приближенное решение к оптимуму, тем эффективнее работает правило отбора (9). Кроме того, эффективность этого правила сильно зависит от того, каково число решений, близких по затратам к оптимуму. Чем больше таких «около-оптимальных» решений, тем менее эффективно правило (9).

Накопленный опыт вычислений показывает, что отбор по правилу (9) гораздо более важен, чем по условию (8). Особенно велика роль правила (9) начиная с $t = 3-4$ года.

4) Наконец, последнее правило отбора в отличие от предыдущих связано не с выполнением планов производства M_t , а со сравнением между собой различных способов реализации этих планов. А именно, из каждой пары комбинаций X' и X'' , где $X' = (x_{11}', x_{12}', \dots, x_{1N}', \dots, x_{tN}')$, $X'' = (x_{11}'', x_{12}'', \dots, x_{1N}'', \dots, x_{tN}'')$, для которых одновременно верны $(r+1)$ нестрогих неравенств

$$\begin{aligned} Q_t' &\geq Q_t'', \\ \mu_0' &\leq \mu_0'', \\ \mu_1' &\leq \mu_1'', \\ &\dots \dots \dots \\ \mu_{r-1}' &\leq \mu_{r-1}'', \end{aligned} \quad (10)$$

оставляем только X'' .

Покажем, что при этом решения не ухудшаются и нет риска потерять оптимум. Для обоснования рассмотрим два случая.

1. Когда среди неравенств (10) хотя бы одно строгое. Предположим, что мы выбрасываем X'' . Тогда, если X' входит в оптимальный план, то этот план можно улучшить, заменив X' на X'' . Действительно, при этом либо снизятся затраты (если $Q_t' > Q_t''$), либо увеличится освоенная мощность (если $\mu_k' < \mu_k''$, $k = 0, 1, 2, \dots, r$). А это значит, что план, куда входит X' , либо неоптимальный (если $Q_t' > Q_t''$), либо не лучше оптимального (если $Q_t' = Q_t''$, а при каком-либо значении k : $\mu_k' < \mu_k''$).

2. Все выражения (10) — равенства. Тогда без изменения затрат и мощностей можно оставить любое из решений X' или X'' . Значит, и в этом случае правило (10) справедливо.

Если проводить отсев по правилу (10) лишь в первом случае, то метод частичного перебора позволяет получить не один, а все (или несколько) оптимальные планы. При этом отсев во втором случае следует применять

лишь тогда, когда перестает хватать емкости памяти ЭВМ. Этим заканчивается отбор вариантов для t -го года планового периода.

Процедура отбора проводится последовательно для $t = 1, 2, \dots$ и заканчивается при $t = T$. Из оставшихся после отсева вариантов выбирается план, требующий наименьших затрат Q . Он и является оптимальным.

Сделаем некоторые замечания по поводу реализации описанного метода. Можно достичь существенного сокращения объема вычислений, если подсчитывать все значения μ_l , $l = 0, 1, 2, \dots, r - 1$ (см. (6)), и составлять таблицу фиктивных затрат Q_{lf} (см. (5)) до начала подбора вариантов. Тогда в процессе отсева нужно лишь комбинировать (складывать) между собой освоенные мощности μ_l , даваемые различными сочетаниями предприятий. Это существенно уменьшает количество умножений, и счет ведется в основном на сложениях и сравнениях. А эти операции выполняются на ЭВМ значительно быстрее, чем умножения. Как явствует из условия (3), в году τ строительство предприятий можно вести одним из $C_{N+d\tau}^{d\tau}$ способов. Понятно, что μ_l целесообразно вычислять предварительно, лишь если N и $d\tau$ не слишком велики.

Из условий отбора (7) и (8) $M_t \leq \mu_0 \leq M_{t\max} + a - 1$ и целочисленности элементов матрицы M можно получить верхнюю оценку общего количества планов задачи, которые необходимо сохранять в процессе вычислений*. Однако из-за грубости верхнего предела освоенной мощности ($M_{t\max} + a - 1$) эта оценка не дает никакого представления о реально необходимом объеме памяти. Наиболее существенный «отсев сверху» дает применение правила (9). Как показывает опыт вычислений, правило (8) имеет скорее принципиальное, чем практическое значение, и работает лишь изредка при $t = 1$ и $t = 2$. Время счета** для задачи с $N = 4$ и $T = 15$ не превышает 2—4 мин. (включая ввод и вывод). На наш взгляд, к достоинствам метода относятся: нечувствительность к ошибкам округления; возможность получения не одного, а целого набора решений; возможность увеличения продолжительности планового периода T и числа типов предприятий N без использования внешних запоминающих устройств ЭВМ.

Авторы выражают благодарность Ю. Ю. Финкельштейну и С. С. Лебедеву за советы, высказанные при разработке и обсуждении модели и методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Народное хозяйство СССР в 1965 г. М., «Статистика», 1966.
2. Japan Plast., 1969, v. 20, N 1.
3. Н. П. Федоренко, В. М. Иоффе, А. В. Алёшин. Об оптимизации структуры производства пластмасс. План. х-во, 1965, № 10.
4. А. В. Алёшин. О подходах к решению задач оптимизации структуры отрасли химической промышленности. Матер. Всес. конф. по применению экономико-математических методов и ЭВМ в отраслевом планировании и управлении. Секция 2. М., 1966, (АН СССР и ЦЭМИ).
5. Основные положения оптимального планирования развития и размещения производства. М.—Новосибирск, «Наука» 1968.
6. E. M. L. Beale. Survey of Integer Programming. Operat. Res. Quart., 1965, v. 16, N 2.
7. R. E. Gomory. An all-integer programming algorithm. Industrial scheduling, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
8. R. D. Young. A primal (all-integer) integer programming algorithm. J. Res. Bur. Standards, 1965, B. 69, N 3.
9. Б. Х. Хазанов. Определение оптимальных мощностей предприятий и последовательности их строительства в перспективном планировании. Дис. ЦЭМИ АН СССР, М., 1968.

Поступила в редакцию
3 VI 1969

* Оценка необходимого объема памяти и вычислений получена в [9].

** Время счета указывается для ЭВМ со средним быстродействием 20 тыс. операций / сек.