

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ В МОДЕЛЯХ ТЕКУЩЕГО ОТРАСЛЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Г. В. МАРТЫНОВ

(Москва)

Настоящая статья посвящена рассмотрению практических путей построения локального критерия народнохозяйственной эффективности и конкретных возможностей его использования в отраслевых задачах оптимального планирования.

На основе общих теоретических исследований в ряде работ В. Ф. Пугачева [1, 2] показано, что наилучшим локальным критерием является критерий народнохозяйственной эффективности, статическая форма которого имеет вид

$$W = \int_0^x p(x) dx, \quad (1)$$

где x — вектор продукции и затрат хозяйственного объекта; $p(x)$ — вектор оценок оптимального плана, определенных в масштабе всей экономики.

В настоящее время таких оценок еще нет, и поэтому локальный критерий можно использовать практически лишь с определенными оговорками.

Но использование *самой формы* критерия W может уже сейчас показать ряд его достоинств. Это один из возможных практических путей последовательной оптимизации экономики.

Существующий экономический механизм дает некоторые возможности для построения критерия народнохозяйственной эффективности. Одной из них является процесс постоянного совершенствования ценообразования, позволяющий построить приближенные зависимости цен от объемов выпуска и затрат.

Другая предпосылка — совершенствование самой системы планирования и использования во все более широких масштабах математических методов оптимизации. Это позволяет уже сейчас осуществлять ряд экспериментов, на основе которых можно делать обобщающие выводы о возможных путях построения критерия W .

Данная работа преследует две основные цели: показать конкретные практические пути построения критерия народнохозяйственной эффективности в существующих условиях и определить практические преимущества использования критерия W по сравнению с другими формами локального критерия.

Применение критерия народнохозяйственной эффективности в моделях отраслевого текущего планирования позволяет дать более четкую постановку частных задач текущего планирования исходя из интересов всего народного хозяйства. Кроме того, форма локального критерия W значительно упрощает саму отраслевую модель и методы ее решения. При

удачно подобранных параметрах локального критерия W появляется принципиальная возможность снять подавляющее большинство ограничений по выпускаемым продуктам и затрачиваемым ресурсам, что резко сокращает размеры отраслевой модели текущего планирования.

Использование W в отраслевых моделях дает возможность рассчитывать также коэффициенты взаимозаменяемости продуктов на стадии их производства, что в свою очередь значительно упрощает принятие решений на уровне отрасли.

1. ТИПОВАЯ АППРОКСИМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ

Отраслевая модель строится по принципу объединения моделей предприятий, которые выпускают однородную продукцию. Одновременно учитываются факторы, характерные для отрасли как единого самостоятельного хозяйственного объекта: ресурсы, типичные для данной отрасли, а также промежуточные отраслевые продукты.

Однако построение на основе подробных моделей предприятий, содержащих тысячи переменных и ограничений, привело бы к отраслевым моделям очень большой размерности. Существует приближенный, но значительно более экономный метод описания предприятий с помощью их аппроксимационных моделей. Предложены два способа аппроксимации [3].

В первом случае используется информация об оптимальном плане l -го предприятия $\bar{x}^l$ и оценках $\bar{p}^l$, соответствующих этому плану. Аппроксимация осуществляется с помощью неравенства $(\hat{h}^l, \bar{x}^l) \leq 1$, где вектор $\hat{h}^l$ образуется путем нормирования $\bar{p}^l$ на величину $(\bar{p}^l, \bar{x}^l)$.

Во втором случае из множества допустимых планов $\{a^j\}$ l -го предприятия выбирается некоторое число планов a_j^l (j — номер выбранного плана), характеризующих возможные варианты изменения структуры выпуска и затрат по данному предприятию, и на основе этих планов строится аппроксимирующий многогранник

$$x^l = \sum_{j \in J(l)} a_j^l \xi_j^l, \quad l \in L, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J(l)} \xi_j^l \leq 1, \quad \xi_j^l \geq 0. \quad (3)$$

Здесь ξ_j^l — интенсивность использования варианта a_j^l в плане $\bar{x}^l$. Построение множества $\{a_j^l\}$ может быть выполнено, например, путем последовательного нахождения ряда оптимальных планов по одной и той же модели предприятия при соответствующих изменениях его целевой функции. На уровне предприятий более подходящим является второй из этих способов аппроксимации.

Если воспользоваться описанием плана предприятия через выпуклый многогранник (2) — (3), то отраслевой план

$$x = \sum_{l \in L} x^l.$$

Чтобы перейти теперь от аппроксимационных моделей предприятий к модели отрасли, необходимо отразить еще ограниченность отраслевых выпусков и затрат. Введем в рассмотрение множество I_r номеров затрачиваемых ресурсов и множество I_p номеров продуктов, выпускаемых отраслью. Обозначим также через r вектор ограничений на отраслевые затраты и через b вектор ограничений по отраслевому выпуску. Тогда для

отрасли в целом можно записать условия

$$x_i \geq b_i, \quad i \in I_p, \quad (4)$$

$$x_i \leq r_i, \quad i \in I_r. \quad (5)$$

Для окончательной формулировки отраслевой модели осталось задать критерий отраслевой оптимизации. Основная цель текущего планирования на уровне отрасли состоит в оптимальном распределении производственных заданий по выпуску между отдельными предприятиями, входящими в отрасль, с учетом ограниченности их производственных возможностей и оптимальное распределение различных видов ограниченных ресурсов между ними.

В общем виде критерий оптимальности для отрасли есть некоторая целевая функция $f(x)$, под которой в существующих моделях понимается, например, прибыль, выпуск в заданных пропорциях и т. д.

Тогда на базе вышеизложенной модели может быть записана экстремальная отраслевая задача

$$\max f(x) \quad (6)$$

при условиях

$$x_i \geq b_i, \quad i \in I_p, \quad (7)$$

$$x_i \leq r_i, \quad i \in I_r, \quad (8)$$

$$x_i \geq 0, \quad i \in I_p \cup I_r, \quad (9)$$

где $x_i, i \in I_p \cup I_r$ удовлетворяют условиям (2) — (3).

Типовую задачу отраслевого текущего планирования (6) — (9) можно резко упростить на основе использования более совершенного локального критерия народнохозяйственной эффективности.

Действительно, если бы удалось построить критерий W , в котором учитывалась бы зависимость цен от объемов производства и затрат, то это, возможно, позволило бы снять в отраслевой задаче ограничения (7) — (8). В этом смысле задача (6) — (9) приняла бы вид

$$\max W(x) \quad (10)$$

при условиях

$$\sum_{j \in J(l)} \xi_j^l \leq 1, \quad \xi_j^l \geq 0, \quad l \in L, \quad (11)$$

где

$$x = \sum_i \sum_l \sum_j a_{ij}^l \xi_j^l.$$

Преимущества этой модели заключаются, очевидно, в резком сокращении числа ограничений и в использовании локального критерия, в большей мере соответствующего народнохозяйственному оптимуму.

Из задачи (10) — (11) можно найти не только оптимальный план $\hat{x}$ и соответствующие ему оптимальные цены $\hat{p}$, но и коэффициенты производственной взаимозаменяемости для отрасли в целом. Последние, очевидно, получаются путем нормирования $\hat{p}$ с помощью формулы $\hat{h} = \hat{p} / (\hat{p}, \hat{x})$ и могут послужить инструментом для принятия решений на уровне отрасли.

Понятно, что все это может быть реализовано лишь при наличии надежных практических приемов построения критерия W .

2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ПРИБЛИЖЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ КРИТЕРИЯ W

Построение локального критерия народнохозяйственной эффективности принципиально возможно во всех тех случаях, когда задана зависимость цен от объемов выпуска и затрат.

Допустим, что известна зависимость цены p_i продукции или затрат x_i . Для упрощения дальнейших исследований предположим, что отсутствует перекрестная зависимость цен от объемов выпуска и затрат.

Тогда критерий W распадается на производственную и затратную части

$$W = \sum_{i \in J_p} \int_0^{x_i} p_i(x_i) dx - \sum_{i \in J_r} \int_0^{x_i} p_i(x_i) dx_i. \quad (12)$$

Дальнейшие трудности в приближенном построении W связаны с учетом зависимости $p_i(x_i)$, каждая из которых имеет свой специфический нелинейный вид.

Практическое построение этих зависимостей невозможно без дальнейших предположений и упрощений. В условиях отсутствия конкретной

информации о характере зависимостей $p_i(x_i)$ одним из возможных допущений может служить предположение об обратной пропорциональности каждой цены p_i соответствующему объему выпуска x_i

$$p_i x_i = c_i, \quad i \in I_p, \quad (13)$$

где c_i — постоянные величины.

Таким образом, принимается гипотеза о том, что эластичность цены каждого продукта по объему его выпуска равна -1

$$\partial_{p_i} x_i = \frac{\partial \ln p_i}{\partial \ln x_i} = -1, \quad i \in I_p.$$

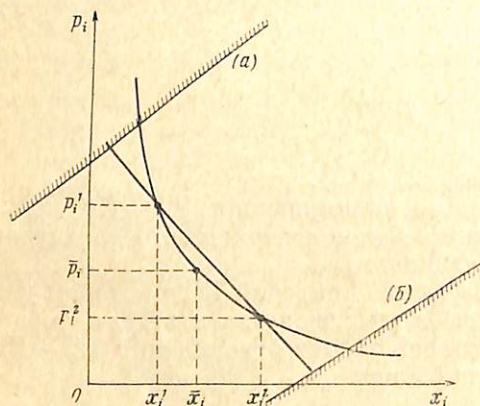
Формула (13) удобна для вычисления параметров c_i , определяющих зависимости $p_i(x_i)$. Действительно, зная хотя бы одно значение $\bar{x}_i$ и соответствующие ему значения $\bar{p}_i$, можно вычислить $c_i = \bar{p}_i \bar{x}_i$ и окончательно записать

$$p_i = \frac{\bar{p}_i \bar{x}_i}{x_i}, \quad i \in I_p. \quad (14)$$

Для практического использования целесообразно провести линейную аппроксимацию этой формулы. Это можно сделать как с помощью касательной к (14), проходящей через точку $(\bar{x}_i, \bar{p}_i)$, так и с помощью некоторой секущей, охватывающей весь представляющий интерес диапазон изменения цен и объемов. Второй способ более предпочтителен и может быть реализован путем отыскания двух подходящих точек на кривой (14). При этом в силу (14) достаточно знать хотя бы какую-то одну точку, лежащую на этой кривой, чтобы найти любое число ее точек.

Если имеются две точки (x_i^1, p_i^1) и (x_i^2, p_i^2) , определяющие нужный диапазон изменения цен и объемов, то прямая, проходящая через них, есть

$$p_i = \alpha_i x_i + \beta_i, \quad i \in I_p, \quad (15)$$



где

$$\alpha_i = \frac{p_i^2 - p_i^1}{x_i^2 - x_i^1} < 0, \quad \beta_i = p_i^1 - \alpha_i x_i^1$$

и

$$p_i^1 x_i^1 = p_i^2 x_i^2 = \bar{p}_i \bar{x}_i. \quad (16)$$

Изложенный процесс аппроксимации иллюстрируется для двумерного случая рисунком, на котором изучаемый диапазон исследования цен и объемов заключен между прямыми (а) и (б).

Зависимость $p_i(x_i)$ для затратной части локального критерия (12) должна возрастать при увеличении объема потребления ресурсов. Полагая эластичность цены p_i по объему потребления x_i равной $+1$, мы сразу приходим к линейной зависимости $p_i(x_i)$

$$p_i = c_i x_i, \quad i \in I_r, \quad (17)$$

которая также позволяет определить свой единственный параметр c_i с помощью одной точки $(\bar{x}_i, \bar{p}_i)$, $i \in I_r$, лежащей на этой прямой $c_i = \bar{p}_i / \bar{x}_i$, $i \in I_r$.

Используя (15) и (17), локальный критерий (12) можно представить в виде квадратичной формы

$$W = \sum_{i \in J_n} \left(\frac{1}{2} \alpha_i x_i^2 + \beta_i x_i \right) - \sum_{i \in J_r} \left(\frac{1}{2} \alpha_i x_i^2 + \beta_i x_i \right). \quad (18)$$

Такова принципиальная сторона построения приближенной формы локального критерия W . Чтобы практически построить этот критерий, нужно, очевидно, определить все параметры, содержащиеся в (18). Применительно к статической отраслевой модели (6) — (9) это можно сделать с помощью определенного процесса, который рассмотрим по этапам.

1. Нахождение первоначальной зависимости цен от объемов выпуска. Практический интерес представляет диапазон изменения отраслевого выпуска x_i в пределах от фактически существующего объема выпуска x_i^2 до некоторой заявленной потребности x_i^1 . В этих пределах и целесообразно строить линейную зависимость (15).

Принимается, что существующие цены p_i^1 являются ценами равновесия, соответствующими заявленной потребности в продукции отрасли x_i^1 . Это дает одну опорную точку для построения (15). Цены для x_i^2 строим, пользуясь соотношением (16): $p_i^2 = p_i^1 \cdot x_i^1 / x_i^2$.

Указанные две точки и позволяют построить прямую (15). Производственная часть локального критерия (12) при этом будет

$$W = \sum_{i \in J_p} \left(\frac{1}{2} \alpha_i x_i^2 + \beta_i x_i \right).$$

Построенные таким способом зависимости цен от объемов выпуска не отвечают, конечно, той идеальной ситуации, когда для каждого объема выпуска известна оптимальная цена. Однако при построении первоначальной формы зависимости (15) можно ограничиться приближенным значением входящих в нее коэффициентов, так как на следующих этапах построения W приходится их корректировка.

2. Корректировка коэффициентов линейной зависимости цен от объемов выпуска. С целью корректировки коэффициентов производственной части локального критерия (18) рассмотрим решение следующей задачи.

Задача I.

Найти

$$\max \sum_{i \in J_p} \left(\frac{1}{2} a_i x_i^2 + \beta_i x_i \right)$$

при условиях (7) — (9).

В результате решения задачи I итеративным путем получим оптимальный план выпуска $\hat{x}_i$, $i \in I_p$ и соответствующие ему цены $\hat{p}_i$, $i \in I_p$. Может оказаться, что не все компоненты отраслевого выпуска x_i при этом будут превосходить плановое задание b_i . Для этих наиболее дефицитных продуктов целесообразно скорректировать коэффициенты целевой функции задачи I таким образом, чтобы при ее повторном решении все отраслевые выпуски $\hat{x}_i$ превосходили плановое задание b_i .

Необходимым условием ликвидации дефицитности продукта i является установление такой его цены $\hat{p}_i$, которая удовлетворяла бы неравенству

$$\hat{p}_i(\hat{x}_i) \geq \hat{q}_i, \quad i \in I_p, \quad (19)$$

где $\hat{q}_i$ — оценка i -го ограничения вида (7).

С этой целью увеличим коэффициенты β_i в соответствующих линейных зависимостях (15) по формуле

$$\beta_i' = \beta_i + (\hat{q}_i - \hat{p}_i) \quad (20)$$

и подставим эти значения β_i' в W задачи I.

Решая повторно задачу I со скорректированным критерием W , получаем новый план $\hat{x}'$. Если в этом случае окажется, что выпуск $\hat{x}'_i$ превосходит величины b_i по всем продуктам, то процесс построения производственной части локального критерия W можно закончить. Если же дефицитность по некоторым выпускаемым продуктам и на этот раз не ликвидирована, то процесс корректировки W продолжается.

Таким образом, при соответствующим образом скорректированной производственной части локального критерия народнохозяйственной эффективности имеется принципиальная возможность снять группу ограничений (7) по выпускаемым продуктам. Эти ограничения уже нашли свое отражение в локальном критерии W .

3. Нахождение первоначальной линейной зависимости цен от объемов затрат. С целью определения первоначальной величины коэффициентов линейной зависимости (17) воспользуемся решением задачи: величинами отраслевых затрат $\hat{x}_i$, $i \in I_r$, и величинами оценок затратных ограничений (8) $\hat{q}_i$, $i \in I_r$.

Тогда неизвестный параметр c_i в (17) определим из выражения

$$c_i = \frac{\hat{x}_i}{\hat{q}_i}, \quad i \in I_r.$$

4. Корректировка коэффициентов линейной зависимости цен объемов затрат.

Рассмотрим решение следующей задачи.

Задача II.

$$\max \left(\sum_{i \in I_p} \left(\frac{1}{2} a_i x_i^2 + \beta_i x_i \right) - \sum_{i \in I_r} a_i x_i^2 \right)$$

при условиях (7) — (9).

Здесь критерий этой задачи содержит скорректированную на этапе II производственную часть и первоначальные зависимости цен от объемов потребления в затратной части.

Пусть в результате решения задачи II получен оптимальный план по затратам $\dot{x}_i$, $i \in I_r$, соответствующие им оптимальные цены $\dot{p}_i$ и оценки ограничений (8) $\dot{q}_i$.

Можно предположить, что в решении $\dot{x}_i$, $i \in I_r$ не по всем компонентам будет наблюдаться экономия ресурсов. Постараемся скорректировать коэффициенты затратной части целевой функции задачи II так, чтобы ликвидировать дефицитность по этим видам ресурсов.

Необходимым условием ликвидации дефицитности ресурса $\dot{x}_i$ является установление его цены $\dot{p}_i$ такой, чтобы она удовлетворяла неравенству

$$\dot{p}_i(\dot{x}_i) \leq \dot{q}_i, \quad i \in I_r. \quad (21)$$

Для снижения цены дефицитного ресурса $\dot{p}_i$ скорректируем соответствующий параметр c_i в линейной зависимости (17) по формуле

$$c'_i = c_i \frac{\dot{q}_i}{\dot{p}_i}, \quad i \in I_r. \quad (22)$$

Если в результате повторного решения задачи II со скорректированным в затратной части критерием W наблюдается экономия по всем видам используемых ресурсов, то процесс построения локального критерия W заканчивается.

Если же и на этот раз не ликвидирована дефицитность некоторых ресурсов, то корректировка соответствующих коэффициентов c_i продолжается.

Допустим, что локальный критерий народнохозяйственной эффективности скорректирован так, что все ограничения (18) выполняются с определенным запасом. Тогда мы можем снять эти ограничения при решении отраслевой задачи, так как они уже нашли свое отражение в затратной части критерия W .

Таким образом, скорректированный локальный критерий W позволяет снять ограничения (7) — (8) в отраслевой модели. Теперь задача отраслевого оптимального текущего планирования такова.

Задача III.

$$\max \left(\sum_{i \in I_p} \left(\frac{1}{2} \alpha_i x_i^2 + \beta_i x_i \right) - \sum_{i \in I_r} \alpha_i x_i^2 \right)$$

при условиях (11).

Отсюда видно, что задача III приняла вид задачи (10) — (11), анализ которой показал ряд ее значительных практических преимуществ по сравнению с (6) — (9).

3. АЛГОРИТМЫ ОТРАСЛЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Для проведения необходимых корректировок параметров первоначальных зависимостей цен от объемов выпуска и затрат в локальном критерии W потребуются эффективные быстродействующие алгоритмы решения задач квадратичного программирования.

В этом разделе будут описаны два алгоритма отраслевой оптимизации, специфика которых обусловлена формой локального критерия (18).

Сперва представим (18) относительно ξ_i^l

$$W(\xi) = \sum_{i \in I_p} \left[+ \frac{1}{2} \alpha_i \left(\sum_{l, j} a_{ij}^l \xi_j^l \right)^2 + \beta_i \sum_{l, j} a_{ij}^l \xi_j^l \right] - \sum_{i \in I_r} \left[\frac{1}{2} \alpha_i \left(\sum_{l, j} a_{ij}^l \xi_j^l \right)^2 \right]. \quad (23)$$

Аппроксимируем (23) линейным функционалом

$$f(\xi) = \sum_{l, j} c_j^l \xi_j^l, \quad (24)$$

где

$$c_j^l = \frac{\partial W(\xi)}{\partial \xi_j^l} = \sum_{i \in I_p} [\alpha_i a_{ij}^l x_i + \beta_i a_{ij}^l] - \sum_{i \in I_r} [\alpha_i a_{ij}^l x_i + \beta_i a_{ij}^l], \quad \begin{matrix} l \in L, \\ j \in J(l). \end{matrix}$$

Тогда линейаризованная отраслевая задача III состоит в отыскании максимума $f(\xi)$ при условиях (7) — (9).

Задача, двойственная к (18), (7) — (9), есть

$$\min \varphi(q, v) = \min \left(\sum_{i \in I_r} q_i r_i - \sum_{i \in I_p} q_i b_i + \sum_{l \in L} v^l \right) \quad (25)$$

при условиях

$$- \sum_{i \in I_p} q_i a_{ij}^l + \sum_{i \in I_r} q_i a_{ij}^l + v^l \geq c_j^l, \quad (26)$$

$$q_i, v^l \geq 0. \quad (27)$$

Рассмотрим итеративную процедуру решения задачи (18), (7) — (9). Обозначим через t номер текущей итерации.

Решение начинается с задания неотрицательных векторов $q(0)$ и $x(0)$. Если, в частности, $q(0)$ и $x(0)$ равны нулю, то

$$c_j^l(0) = \sum_{i \in I_p} \beta_i a_{ij}^l - \sum_{i \in I_r} \beta_i a_{ij}^l, \quad j \in J(l).$$

Определим условно-оптимальный план отрасли $\hat{x}(t)$ [8, 11]. Для этого вычислим, используя условия (26), оценку для каждого производственного способа

$$v_j^l(t) = c_j^l(t) - \sum_{i \in I_p} q_i a_{ij}^l + \sum_{i \in I_r} q_i a_{ij}^l. \quad (28)$$

В качестве оценки предприятия берем величину

$$v^l(t) = \max_{j \in J(l)} \{v_j^l(t), 0\} = v_{j_0}^l(t). \quad (29)$$

Тогда

$$\hat{x}_i(t) = \sum_l \sum_j a_{ij}^l \hat{\xi}_j^l(t), \quad (30)$$

где

$$\hat{\xi}_j^l(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = j_0 \text{ и } v^l(t) > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Однако, как нетрудно заметить, поиск оптимального решения только на множестве условно-оптимальных планов может и не привести к желаемому результату.

Введем в рассмотрение накопленный (осредненный) план отрасли $\bar{x}(t)$ [7, 9, 11]. С целью его получения найдем выпуклую линейную комбинацию векторов $\hat{\xi}(t)$ и $\bar{\xi}(t-1)$

$$\bar{\xi}(t) = \alpha(t)\hat{\xi}(t) + (1 - \alpha(t))\bar{\xi}(t-1); \quad (31)$$

где $\alpha(t)$ — некоторая ступенчатая убывающая положительная функция [10, 12].

Тогда

$$\bar{x}_i(t) = \sum_l \sum_j a_{ij} \bar{\xi}_j^l(t). \quad (32)$$

Чтобы оценить полученный к моменту t план $\bar{x}(t)$, достаточно рассмотреть невязки неравенств (7), (8) $\hat{u}_i(t)$ и $\bar{u}_i(t)$ такие, что

$$\hat{u}_i(t) = b_i - \hat{x}_i(t), \quad i \in I_p, \quad (33)$$

$$\bar{u}_i(t) = b_i - \bar{x}_i(t),$$

$$\hat{u}_i(t) = \hat{x}_i(t) - r_i, \quad i \in I_r. \quad (34)$$

$$\bar{u}_i(t) = \bar{x}_i(t) - r_i,$$

Эти невязки определяют величину и направление изменения оценок $q_i(t)$ по следующему правилу:

$$q_i(t) = \begin{cases} q_i(t-1) \times (1 + \alpha(t)/\lambda_i(t)), & \text{если } \hat{u}_i(t) \geq 0 \text{ и } \bar{u}_i(t) \geq 0, \\ q_i(t-1)/(1 + \alpha(t)/\lambda_i(t)), & \text{если } \hat{u}_i(t) \leq 0 \text{ и } \bar{u}_i(t) \leq 0, \\ q_i(t-1) & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (35.1)$$

$$(35.2)$$

$$(35.3)$$

где $\lambda_i(t)$ — некоторая целочисленная функция [9, 10]. В случае (35.1), если $q_i(t) = 0$, то полагаем $q_i(t) = 1/t$. В случае (35.2), если $q_i(t) < \frac{1}{m \cdot t}$

где m — достаточно большое число, то полагаем $q_i(t) = 0$.

Процесс вычислений заканчивается, если выполняются неравенства

$$\max_{i \in I_p \cup I_r} \left\{ \frac{\bar{u}_i(t)}{b_i}, 0 \right\} < \varepsilon, \quad (36)$$

$$\left| \frac{f(\bar{\xi}(t)) - \varphi(q(t), v(t))}{\varphi(q(t), v(t))} \right| < \delta, \quad (37)$$

где ε и δ — малые наперед заданные величины, определяющие относительную точность счета.

В противном случае вычисления продолжаются, начиная с пересчета коэффициентов линеаризованного функционала.

С целью ускорения сходимости итерационного процесса возможно применение экстраполяции величин $q_i(t)$ и $\bar{x}_i(t)$ по следующему правилу. Если на протяжении ряда итераций σ , следующих одна за другой,

$$\rho_i = |q_i(t) - q_i(t-1)| < \gamma, \quad (38)$$

то полагаем

$$\begin{aligned} q_i(t') &= q_i(t) + (q_i(t) - q_i(t-1)) \cdot n, \\ \bar{x}_i(t') &= \bar{x}_i(t) + (\bar{x}_i(t) - \bar{x}_i(t-1)) \cdot n, \end{aligned} \quad (39)$$

где $t' = t + n$; n — фиксированное число итераций, на которое производится экстраполяция; γ — малая наперед заданная величина.

Если для момента t' неравенства (36) — (37) не выполняются, то вычисления продолжают с возможным применением экстраполяции.

Рассмотрим теперь алгоритм решения задачи III.

Аналогично вышепредставленному алгоритму будем в каждый фиксированный момент времени аппроксимировать квадратичную функцию (23) линейным функционалом (24) и решать задачу нахождения максимума (24) при условиях (3).

Решение начинается с задания для $t = 0$, $x(0) = 0$ и

$$c_j^l(0) = \sum_{i \in I_p} \beta_i a_{ij}^l - \sum_{i \in I_r} \beta_i a_{ij}^l.$$

Оценка предприятия вычисляется по формуле

$$v^l(t) = \max_{i \in J(t)} \{c_j^l(t), 0\} = c_{j_0}^l. \quad (40)$$

Будем решать задачу (24), (3) на множестве усредненных планов $\bar{\xi}(t)$ таких, что

$$\bar{\xi}(t) = \alpha(t) \hat{\xi}(t) + (1 - \alpha(t)) \bar{\xi}(t-1), \quad (41)$$

где

$$\hat{\xi}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = j_0 \text{ и } c_{j_0}^l > 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда отраслевой план

$$\bar{x}_i(t) = \sum_{l,j} a_{ij}^l \bar{\xi}_j^l(t), \quad i \in I_p \cup I_r.$$

Решение заканчивается, если

$$\left| \sum_{l,j} c_j^l(t) \bar{\xi}_j^l(t) - \sum_l v^l(t-1) \right| < \varepsilon, \quad (43)$$

где ε — величина, определяющая точность счета. Если неравенство в момент t не выполняется, то решение продолжается, начиная с пересчета коэффициентов c_j^l .

В заключение следует заметить, что применение описанных выше алгоритмов к решению задач квадратичного программирования осуществлено впервые. Автором был проведен ряд экспериментальных расчетов по реальным отраслевым задачам, размерность которых была в пределах 30 уравнений и 101 неизвестного. В среднем для решения задачи II указанной размерности с точностью 0,6% требовалось не более 200 итераций. В отдельных случаях для получения удовлетворительного решения достаточно было не более 20 итераций при чистом времени счета, не превышающем 2 минут.

Решение задачи III занимало не более 1, 2 минуты машинного времени (БЭСМ-3М), что говорит о ее численных преимуществах по сравнению с задачей II.

4. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РАСЧЕТОВ ПО ОТРАСЛЕВОЙ МОДЕЛИ В НЕФТЕПЕРЕРАБОТКЕ *

В качестве примера рассмотрим модель квартального планирования нефтеперерабатывающей промышленности Украины.

Для производства одиннадцати видов нефтепродуктов на пяти предприятиях отрасль потребляет нефть семи сортов и еще три вида ресурсов: газоконденсат, этиловую жидкость и газолин.

По сравнению с реальной номенклатура выпуска в модели укрупнена. Например, битум производится четырех марок, среди которых наибольшее значение имеет битум твердый. Вместо четырех позиций по битуму в модели сформулированы только две: битум всего и в том числе твердый. Аналогично были укрупнены различные сорта мазута, керосина, парафина и т. п.

Номенклатура сырья состоит из сортов нефти, названия которых соответствуют пунктам их добычи: долинская, надвоянская, бориславская, ахтырская, радченковская, черниговская, грозненская.

Продукты выпуска и затрачиваемые ресурсы на различных нефтеперерабатывающих заводах отличаются друг от друга. Например, бензин А-72 производится только на двух предприятиях, парафин твердый — только на двух и т. п.

Технологические аппроксимационные нормативы затрат — выпуска строились по формуле $a_{ij}^l = A_{ij}^l / A_j^l$, где A_{ij}^l — либо объем отбора i -го продукта из нефти, используемой на j -м варианте l -го завода, либо объем переработки i -го ресурса j -м способом l -го завода; A_j^l — объем переработанной нефти по j -му способу на l -м заводе.

Для каждого предприятия задано его плановое квартальное задание по выпуску и затратам. Суммирование плановых заданий по всем предприятиям дает ограничение по выпуску b и ограничение по затратам γ .

Производственные мощности каждого предприятия ограничены и определяются объемом переработанной нефти λ^l за плановый период.

Более подробное описание возможностей получения исходной информации на основе экспертных оценок и статистического анализа данных за прошлые периоды представлено в [13].

В таблице приводятся результаты поэтапного построения локального критерия народнохозяйственной эффективности в нефтепереработке.

На I этапе в качестве x^1 принималось фактическое производство нефтепродуктов в предыдущем плановом периоде, а в качестве x^2 — потребности Украины в этих продуктах в том же периоде**. Действующие цены обозначались через p^2 . Вектор p^1 рассчитывался по формуле (16).

На II этапе решение задачи I, размерность которой 26×90 , было получено за 2 минуты чистого времени (40 итераций). При этом дефицитными оказались два нефтепродукта: мазут топочный и кокс электродный. Проведенная корректировка зависимостей цен продуктов № 5 и № 11 от величины их объемов выпуска (формирование новых β_5 и β_{11}) позволяет ликвидировать дефицитность этих продуктов.

На III этапе, используя решение задачи I, строим первоначальную зависимость цен от объемов затрат. Полагаем $x_i^1 = x_i$, $i \in I_r$ и $p_i^1 = q_i$, $i \in I_r$.

* В модели использовалась условная информация о производстве и потребностях в нефтепродуктах.

** Модель текущего планирования в нефтеперерабатывающей промышленности разработана коллективом сотрудников Лаборатории автоматизированных систем планирования и управления нефтеперерабатывающей промышленности ЦЭМИ АН СССР под руководством канд. экон. наук Б. П. Суворова [13—15].

Т а б л и ц а

№ п/п	Наименование продуктов	Плановое задание в (т)	I этап				II этап		III этап		IV этап		Решение задачи III				
			x ¹	x ²	p ¹	p ²	α	β	x ¹	p ¹	c ¹	x̄	% перемены по значениям	α	p	h	
1	Бензин А-66	869,4	3237,9	6281,4	46,6	24	-0,007	69,2	887,0	69,2	-	-	884,2	+1,7	873,2	63,1	0,0002
2	Бензин А-72	77,0	270,1	933,6	114,2	33	-0,122	147,1	164,0	147,1	-	-	163,9	+112,3	142,4	130,0	0,0004
3	Керосин	41,1	154,2	1175,2	175,3	23	-0,149	199,2	54,2	199,2	-	-	54,1	+31,6	44,4	192,6	0,0007
4	Дизельное топливо	749,1	2827,2	7791,2	74,3	27	-0,009	99,7	753,0	99,7	-	-	762,3	+1,7	762,1	92,9	0,0003
5	Мазут топочный	835,7	3072,1	1889,0	54,9	19	-0,006	73,3	837,4	118,0	-	-	845,4	+1,1	831,6	115,1	0,0004
6	Моторное топливо М-3	5,0	63,3	394,1	173,8	27,5	-0,441	201,3	5,15	201,3	-	-	5,2	+4,0	17,4	193,6	0,0007
7	Битум всего	224,3	802,8	1315,8	30,9	19	-0,023	49,4	552,0	49,4	-	-	244,3	+8,9	234,7	44,0	0,0001
8	Битум твердый	92,3	337,3	335,9	20,9	21	-0,069	44,2	93,0	44,2	-	-	93,4	+1,1	95,7	37,6	0,0031
9	Парафин всего	21,2	79,4	60,4	68,4	90	-1,136	158,6	23,1	158,6	-	-	22,7	+7,0	22,2	133,5	0,0004
10	Парафин твердый	9,4	35,3	16,3	46,1	100	-2,84	146,2	10,5	146,2	-	-	10,0	+6,3	10,0	117,9	0,0004
11	Кокс электродный	17,0	56,7	105,0	128,8	70	-1,22	198,1	17,2	280,0	-	-	17,1	+0,5	16,42	630,1	0,0022
12	Нефти: долиная	481,6	-	-	-	-	-	-	-	-	474,3	49,3	0,104	-0,2	471,5	49,8	-
13	надроянская	128,5	-	-	-	-	-	-	-	-	102,4	0	0	-19,7	101,5	0,000001	-
14	бориславская	134,5	-	-	-	-	-	-	-	-	134,4	328,2	2,44	-20,0	112,6	264,8	-
15	ахтырская	437,1	-	-	-	-	-	-	-	-	440,3	3,91	0,008	-0,2	459,0	4,1	-
16	радченковская	316,1	-	-	-	-	-	-	-	-	318,4	26,9	0,034	-0,7	307,1	24,3	-
17	черниговская	1345,5	-	-	-	-	-	-	-	-	1353,8	4,7	0,003	-1,4	1336,9	59,1	-
18	грозненская	52,5	-	-	-	-	-	-	-	-	9,1	0	0	-63,3	37,6	0,000001	-
19	Газоконденсат	30,7	-	-	-	-	-	-	-	-	30,1	0,06	0,002	-9,8	22,8	0,047	-
20	Этиловая жидкость	0,46	-	-	-	-	-	-	-	-	0,4	0,39	0,97	-2,2	0,45	0,016	-
21	Газолин	8,5	-	-	-	-	-	-	-	-	7,7	0,24	0,03	-1,2	8,3	0,014	-

На IV этапе решение задачи II, размерность которой 26×90 , получено за 33 итерации. При этом черниговская нефть оказалась дефицитной. Корректировка соответствующего коэффициента c_{17} позволяет при повторном решении получить план x , удовлетворяющий как по выпуску, так и по затратам всем ограничениям задачи.

Решение задачи III, которая использует критерий W , построенный на предыдущих этапах и размерность которой 5×90 , получено за 100 итераций при чистом времени счета 0,5 мин.

В таблице представлены построенные итеративным путем цены, а также коэффициенты производственной взаимозаменяемости выпускаемых продуктов, что дает руководящим органам отрасли возможность принимать обоснованные решения по поводу различного рода изменений в объемах и структуре отраслевого выпуска.

ВЫВОДЫ

1. Проведенные исследования и расчеты свидетельствуют о больших практических преимуществах критерия народнохозяйственной эффективности по сравнению с другими формами локального критерия.

2. Экспериментальные расчеты подтверждают, что использование критерия W приводит к гораздо более простым и в то же время более совершенным частным моделям.

3. При построении и анализе моделей каждого отдельного хозяйственного объекта всегда можно найти практические пути построения приближенной формы критерия W .

4. Определение в результате решения частных задач органической связи цен с объемами выпуска и затрат, а также нахождение коэффициентов производственной взаимозаменяемости значительно упрощает принятие решений на отдельных хозяйственных уровнях.

5. Предложенные итеративные методы решения задач квадратичного программирования, как показали экспериментальные проверки, обладают высокой практической сходимостью. Специфика этих алгоритмов подкрепляет вывод о непосредственной связи проблем построения моделей с проблемами их решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Пугачев. Локальный критерий и стимулирование работников в оптимальной экономической системе. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, вып. 5.
2. В. Ф. Пугачев. Оптимизация планирования. М., «Экономика», 1968.
3. В. Ф. Пугачев. Аппроксимационная схема многоступенчатого оптимального планирования народного хозяйства. В кн. Методы оптимального планирования. Транспортные задачи. М., «Наука», 1965.
4. В. Ф. Пугачев. О критерии оптимальности экономики. В кн. Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления. М., Изд-во АН СССР, 1963.
5. В. А. Волконский. Модель оптимального планирования и взаимосвязи экономических показателей. М., «Наука», 1967.
6. В. А. Волконский. Оптимальное планирование в условиях большой размерности (итеративные методы и принцип декомпозиции). Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 2.
7. В. Г. Медницкий. Алгоритмы планирования и управления (об использовании критерия максимизации выпуска в пропорциях на промежуточных уровнях планирования). Матер. Всес. конф. по проблемам научной организации управления социалистической промышленностью. М., 1966.
8. В. Г. Медницкий. О методе решения задачи оптимального распределения плановых заданий в отрасли. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 6.
9. А. К. Пителин. Построение итеративных алгоритмов для решения задач оптимального планирования. Матер. Всес. конф. по применению экономико-математических методов в отраслевом планировании и управлении. М., 1966.

10. Г. В. Мартынов, А. К. Пителин. Экспериментальные исследования аппроксимационной схемы многоступенчатой оптимизации. Экономика и матем. методы, 1969, т. V, вып. 5.
11. В. И. Данилов-Данильян. Задачи большой размерности и итеративные методы оптимального планирования. В кн. Модели и алгоритмы оптимального планирования. М., изд. ЦЭМИ АН СССР, 1966.
12. А. Б. Поманский, А. Д. Шапиро. Об итеративных методах решения отраслевых задач, содержащих дискретные переменные. В сб. Информационные материалы (модели и алгоритмы оптимального планирования), вып. 2. М., изд. ЦЭМИ АН СССР, 1967.
13. Б. П. Суворов. Модель текущего отраслевого планирования в нефтеперерабатывающей промышленности. В сб. Оптимальное планирование и совершенствование управления народным хозяйством. М., «Наука», 1968.
14. А. Б. Мандель. Система моделей текущего планирования нефтеперерабатывающего комплекса. Матер. Всес. конф. по проблемам научной организации управления социалистической промышленностью, 1966, секция 5.
15. Основные положения системы оптимального планирования в нефтеперерабатывающей промышленности (реферат), ЦЭМИ АН СССР, Лаборатория автоматизированных систем планирования и управления нефтеперерабатывающей промышленностью. М., 1968.

Поступила в редакцию
12 V 1969