

МЕТОД ТРАНСПОРТНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Б. Т. ДОВГАЛЬ, К. В. КИМ, В. А. МАШ

(Москва)

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптимизация хозяйственных комплексов с многоступенчатой блочной структурой, для которых глобальная целевая функция не обязательно формализована в явном виде, может осуществляться с помощью итеративного метода специального типа.

Метод состоит из следующих операций:

а) связи между хозяйственным комплексом и его локальными блоками отображаются с помощью сравнительно небольшого числа управляющих переменных, для каждой из которых установлен диапазон возможных значений (неотрицательных);

б) на каждой крупной итерации центральный планирующий орган комплекса сообщает блокам желательный план их деятельности, т. е. желательные значения управляющих переменных (выпуск продукции блоком в целом или отдельными его предприятиями, затраты ресурсов);

в) на основании полученного плана и некоторой (не обязательно оптимальной) системы цен каждый из блоков разрабатывает линейную систему оценок для ограничений по связям с остальной частью комплекса, как бы заменяющую влияние этой части;

г) на основе этой информации, включающей линейную систему оценок, блок определяет свое оптимальное поведение при поочередном варьировании каждой из управляющих переменных по всему диапазону возможных ее значений. Это варьирование рассматривается как возмущение, которое гасится изменением остальных управляющих переменных в условиях действия упомянутой системы оценок и некоторых дополнительно порождаемых ограничений, также имитирующих влияние остальной части комплекса;

д) при таком варьировании определяются значения целевой функции экстремальной задачи блока, что позволяет блоку построить уточненную систему оценок, нелинейно зависящих от значений управляющих переменных, иными словами, аппроксимирующие по координатным срезам. Эти оценки сообщаются в центр;

е) руководствуясь неформализованными соображениями и формализованной целевой функцией, если такая имеется, а также используя полученные нелинейные оценки и агрегированную координирующую систему ограничений, центральный планирующий орган принимает очередное решение о желательном плане блоков. Это является окончанием крупной итерации — переходом к следующей итерации или завершением вычислительного процесса.

В рассматриваемом методе оптимизационные расчеты сосредоточены главным образом в блоках, обмен информацией между блоками разных ступеней невелик. Метод естественно назвать крупношаговым двойственным методом декомпозиции.

Из известных методов блочной оптимизации к рассматриваемому методу примыкает подход, изложенный в [1]. Задача линейного программирования

о распределении централизованных ресурсов между отдельными звеньями для максимизации общего выпуска продукции этими звеньями решается в [1] путем применения метода возможных направлений в пространстве переменных, характеризующих распределение централизованных ресурсов. В неявном виде используется заменяющая задача выпуклого программирования, где выпуклая целевая функция состоит из частей, соответствующих максимальному выпуску каждого звена при фиксированных объемах выделяемых ему ресурсов. Покоординатная оптимизация частей этой функции позволяет определить возможное направление дальнейшего движения в окрестности точки плана.

Метод, предлагаемый в настоящей статье, в отличие от [1], основан (если говорить о задаче такого типа) на аппроксимации аналогичной выпуклой целевой функции с помощью ее покоординатных срезов, рассчитанных в специальных условиях для больших диапазонов изменения параметров распределения ресурсов.

По существу, совокупность покоординатных срезов образует аппроксимационный многогранник в пространстве двойственных переменных. Таким образом, предлагаемый подход является «двойственным аналогом» по отношению к подходу В. Ф. Пугачева, при котором многогранники строятся в пространстве прямых переменных.

Предлагаемый метод транспортных разностей реализует изложенные принципы для решения производственно-транспортных задач оптимального развития и размещения производства (производственно-транспортными задачами, в соответствии с обычно применяемой классификацией, здесь называются задачи, в которых затраты на перевозку сырья и продукции могут влиять на выбор оптимального плана).

Применительно к решению производственно-транспортных задач в предлагаемом методе используются идеи агрегирования переменных и ограничений, разработанные в 1963 г. и описанные в [2] и в других работах Д. М. Казакевича. Однако в [2] роль специально рассчитанных нелинейных покоординатных срезов выполняют гиперплоскости, построенные на основе предельных оценок (потенциалов) пунктов производства в некоторой вспомогательной транспортной задаче линейного программирования.

«Метод транспортных разностей» разработан авторами настоящей статьи в 1966 г. и впервые кратко описан в [3]. Программа на языке АЛГОЛ для ЭВМ БЭСМ-3М и БЭСМ-4, составленная И. А. Выцех и реализующая предложенный алгоритм, регулярно применяется, начиная с 1967 г. для решения ряда задач, в т. ч., многопродуктовых динамических задач большей размерности и сложной структуры.

2. МЕТОД ТРАНСПОРТНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Метод транспортных разностей применим к самым разнообразным задачам — статическим и динамическим, однопродуктовым и многопродуктовым, на минимум затрат и максимум прибыли, с дискретными и с непрерывными переменными и т. д. Достаточно его продемонстрировать применительно к задаче простого типа — однопродуктовой статической производственно-транспортной задаче с дискретными переменными в сетевой поставке на минимум затрат.

Экономико-математическая модель этой задачи формулируется следующим образом: найти план, т. е. набор значений переменных X_r , X_r^q и X_{rs} , минимизирующий величину суммарных затрат производства и транспортировки Z ,

$$Z = \sum_{r=1}^m \sum_{q=1}^{Q_r} Z_{r^q} X_{r^q} + \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m Z_{rs} X_{rs} \quad (1)$$

и удовлетворяющий условиям (2) — (6)

$$X_r \leq \sum_{q=1}^{Q_r} M_r^q \underline{X}_r^q, \quad r = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$\sum_{q=1}^{Q_r} \underline{X}_r^q = 1, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

$$\sum_{s=1}^m X_{rs} - \sum_{s=1}^m X_{sr} = X_r - D_r, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

$$X_r, X_{rs} = \geq 0, \quad r, s = 1, 2, \dots, m, \quad (5)$$

$$\underline{X}_r^q = 0 \text{ или } 1, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad q = 1, 2, \dots, Q_r' \quad (6)$$

В модели (2) — (6) приняты следующие обозначения параметров: r — индекс вершины сети; m — количество вершин сети; q — индекс варианта развития (типовой мощности) предприятия; Q_r — количество рассматриваемых вариантов развития предприятия в r -й вершине сети; M_r^q — выпуск продукта в r -й вершине при q -м варианте развития предприятия; D_r — потребность в продукте в r -й вершине, Z_r^q — производственные затраты в r -й вершине при q -м варианте типовой мощности и выпуске в нем M_r^q единиц продукта; Z_{rs} — затраты на перевозку единицы продукта по дуге (r, s) из r -й вершины в s -ю.

Приняты следующие обозначения переменных: X_r — выпуск продукта в r -й вершине; X_{rs} — объем перевозок продукта по дуге (r, s) из r -й вершины в s -ю; $\underline{X}_r^q$ — целочисленная переменная, показывающая, входит ли в план q -й вариант типовой мощности в r -м пункте.

Необходимо отметить два дополнительных правила построения модели (1) — (6):

а) если предприятие в r -й вершине не обязательно должно выпускать продукцию, в Q_r включается нулевой вариант, для которого $M_r^q = 0$. При этом для тех вершин, где выпуск продукции невозможен, нулевой вариант является единственным ($Q_r = 1$ и $M_r^1 = 0$);

б) переменная X_{rs} не рассматривается и не включается в модель, если в транспортной сети нет дуги (r, s) , т. е. коммуникации, ведущей из r -й вершины в s -ю.

Будем считать, что блок транспортных ограничений и переменных является локальным, и в качестве его управляющих переменных выберем X_r .

При этом задача (1) — (6) на каждой крупной l -й итерации сводится к задаче (7) — (10): найти набор значений $\underline{X}_r^q$, минимизирующий величину суммарных затрат Z ,

$$Z = \sum_{r=1}^m \sum_{q=1}^{Q_r} (Z_r^q + \Delta_r^{qt}) \underline{X}_r^q \quad (7)$$

и удовлетворяющий условиям (8) — (10)

$$\sum_{r=1}^m \sum_{q=1}^{Q_r} M_r^q \underline{X}_r^q \geq D, \quad (8)$$

$$\sum_{q=1}^{Q_r} \underline{X}_r^q = 1, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

$$\underline{X}_r^q = 0 \text{ или } 1, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad q = 1, 2, \dots, Q_r. \quad (10)$$

Здесь D — совокупный спрос, т. е. $D = \sum_{r=1}^m D_r$; Δ_r^{qt} — показатели «по-

координатного среза» для переменной X_r , когда она принимает значение M_r^q , исчисленные на t -й итерации с помощью специально построенных вспомогательных транспортных задач.

Показатель Δ_r^{qt} будем называть транспортной разностью t -й итерации для M_r^q . Если обозначить оптимальное значение целевой функции вспомогательной задачи, построенной на t -й итерации, через F^t , а аналогичное значение при дополнительном ограничении $X_r = M_r^q$ через F_r^{qt} , значение Δ_r^{qt} вычисляется по формуле

$$\Delta_r^{qt} = F_r^{qt} - F^t. \quad (11)$$

Алгоритм построения транспортных задач, пере-

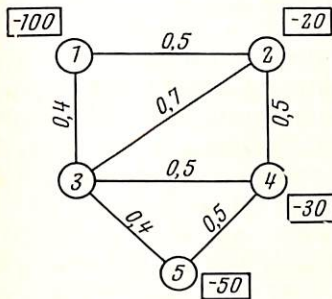


Рис. 1. Исходная транспортная сеть

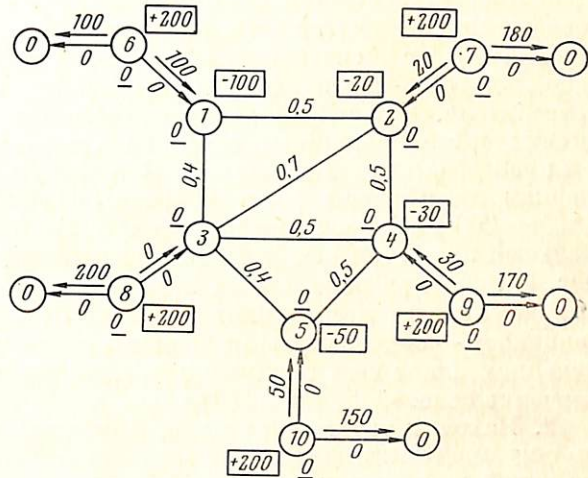


Рис. 2. Оптимальный план открытой транспортной задачи

бора типовых мощностей и исчисления транспортных разностей для большей конкретности будем описывать, демонстрируя его правила на простом условном примере, соответствующем модели (1) — (6).

Пусть имеется транспортная сеть, изображенная на рис. 1 и состоящая из 5 вершин и 7 ребер (ребром считается пара противоположно направленных дуг, т. е. транспортная коммуникация, перевозки по которой возможны в обоих направлениях). На ребрах проставлены транспортные расценки (в рублях на единицу продукта). В прямоугольниках у r -х вершин проставлены ненулевые D_r ; общая потребность $D = 200$ ед.

В любой из 5 вершин возможно строительство предприятия. Для каждого предприятия предусмотрены типовые мощности 0, 40, 50, 100 и 200 единиц. Издержки производства Z_r^q (руб.) приведены в табл. 1. Для вершин 1, 2, 4 и 5 они одинаковы.

При методе транспортных разностей можно выделить нулевую итерацию, правила которой отличаются от правил всех последующих итераций. В зависимости от характера конкретной задачи ее решение в одних случаях может быть закончено уже на нулевой итерации; в других случаях

Таблица 1

Пункт производства r	Типовая мощность M_r^q , ед.				
	0	40	50	100	200
	q				
	1	2	3	4	5
1, 2, 4, 5	0	20	20	30	40
3	0	18	18	25	30

(см. раздел 3) процесс решения начинается непосредственно с итерации 1, минуя нулевую итерацию.

Метод транспортных разностей разработан в двух модификациях, различия между которыми начинаются с $t = 1$ (правила нулевой итерации для обеих модификаций одинаковы). Подходу, описанному во введении, в большей мере соответствует вторая модификация метода. Экспериментальные и практические расчеты с использованием этой модификации в ряде случаев дали лучшие результаты. С другой стороны, первая модификация более проста и менее трудоемка.

Нулевая итерация. 1. Решаем открытую транспортную задачу на сети, изображенной на рис. 2. Здесь к транспортной сети рис. 1 добавлено 5 «производственных» вершин 6—10. Каждая из этих вершин соединена «производственной» дугой (в отличие от ребер дуги обозначены стрелками) с соответствующей вершиной транспортной сети, и одной дугой — с нулевой вершиной, отображающей фиктивного потребителя. Производственную вершину расширенной сети, соединенную с r -й вершиной исходной транспортной сети, будем называть r -й производственной вершиной. В прямоугольниках у производственных вершин проставлены ресурсы, равные наибольшей типовой мощности ($M_r^5 = 200$ ед.). Расценки на дугах (6,1), (6,0) и т. д. равны нулю. Оптимальный план этой исходной задачи нулевой итерации также приведен на рис. 2. Значения переменных характеризуются потоками на сети (потоки обозначены стрелками рядом с соответствующими ребрами и дугами), потенциалов — подчеркнутыми числами рядом с вершинами. Поскольку в полученном плане весь продукт потребляется в пунктах его производства, значение целевой функции $F^0 = 0$.

2. Находим оптимальные планы открытых задач, в каждой из которых по r -му предприятию объем производства поочередно фиксируется на уровне одной из типовых мощностей, включая нулевую, а по всем остальным предприятиям оставлена свобода варьирования объема производства в пределах от нуля до максимума, т. е. до $M_r^5 = 200$ ед.

Для того чтобы при нахождении этих планов не решать каждый раз транспортную задачу заново, а использовать ранее полученные оптимальные планы (план открытой задачи или открытой задачи с объемом производства, зафиксированным на уровне другой типовой мощности), применяется следующий прием. Если в некотором плане открытой задачи объем производства в r -м пункте равен X_r^* , а необходимо зафиксировать его на уровне M_r^q , отличающемся от X_r^* , то:

а) при $M_r^q < X_r^*$ ликвидируется дуга, ведущая от r -й производственной вершины к нулю, и проходящий по этой дуге поток. Вводится дуга от нулевой вершины в r -ю производственную вершину с достаточно высокой ценой N . По этой дуге направляется поток, равный $(X_r^* - M_r^q)$;

б) при $X_r^* < M_r^q$ на дуге, ведущей от r -й производственной вершины к нулю, устанавливается цена N , а поток принимается равным $(M_r^q - X_r^*)$.

Поскольку цена N высока, то на соответствующей дуге в оптимальном плане никогда не будет потока. Соответственно изменяется (в случае «а» — уменьшается, а «б» — увеличивается) и количество продукции, вывозимой реальным потребителям из r -й производственной вершины.

Так, пусть в оптимальном плане открытой задачи $X_1^* = 100$ ед. и требуется: в случае «а» — уменьшить объем производства до 50 ед.; в случае «б» — увеличить этот же объем до 200 ед. Исходная ситуация изображена на рис. 3, а, преобразования для случаев «а» и «б» — на рис. 3, б и 3, г, а окончательные результаты преобразований — на рис. 3, в и 3, д.

На рис. 4 приведен, например, оптимальный план всей задачи, в котором после указанного преобразования объем производства в пункте 6 зафиксир-

рован на уровне 200 ед. Здесь принято $N = 20,0$ руб./ед.

3. Для всех полученных планов вычисляем значения целевой функции F_r^{q0} и транспортных разностей Δ_r^{q0} , $r = 1, 2, \dots, m$; $q = 1, 2, \dots, Q_r$, по формуле (11).

Так, для плана на рис. 4 $F_1^{50} = 80 \times 0,4 + 50 \times 0,4 + 20 \times 0,5 + 30 \times 0,5 = 77$ руб., а поскольку в данном примере $F^0 = 0$, то $\Delta_1^{50} = 77$ руб.

Приведем Δ_1^{q0} для всех r и q (руб.) (см. табл. 2).

4. Для всех r и q исчисляем по формуле (12) суммы производственных затрат и транспортных разностей, которые обозначим $Z_r^{qt} = Z_r^q + \Delta_r^{qt}$. (12)

Понятно, что для «нулевых» вариантов, т. е. для $q = 1$, $Z_r^{q1} = \Delta_r^{q1}$.

Для нулевой итерации Z_r^{q0} приведены в табл. 3 (при этом Z_r^q взяты из табл. 1, а Δ_r^{q0} — из табл. 2).

5. По данным табл. 3 строим производственную задачу (7) — (10); напомним, что $D = 200$ ед. Найдем оптимальный план этой задачи, точный или приближенный, используя любой известный нам алгоритм. Поскольку выбор такого алгоритма не имеет непосредственного отношения к методу транспортных разностей, рассматривать алгоритм оптимизации здесь не будем. Укажем лишь, что в оптимальном плане приняты следующие значения X_r^0 : $X_1^0 = 100$ ед., $X_2^0 = X_3^0 = 0$, $X_4^0 = X_5^0 = 50$ ед. (Здесь X_r^0 — значения X_r в плане итерации 0). Общая сумма затрат, исчисленных согласно табл. 3, для этого плана составляет $30 + 10 + 0 + 30 + 20 = 90$ руб.

Следует подчеркнуть, что при минимизации учитываются и Z_r^{10} для нулевых вариантов, например $Z_2^{10} = 10$ руб.

Отметим также, что если полученные значения переменных подставить в задачу (1) — (6) и решить возникающую транспортную задачу, производственные затраты составят $30 + 2 \times 20,0 = 70$ руб., а транспортные (перевозка 20 единиц продукта из вершины 4 в вершину 2) — $20 \times 0,5 = 10$ руб. Таким образом, общая сумма затрат (80 руб.) не совпадает с затратами, исчисленными по табл. 3.

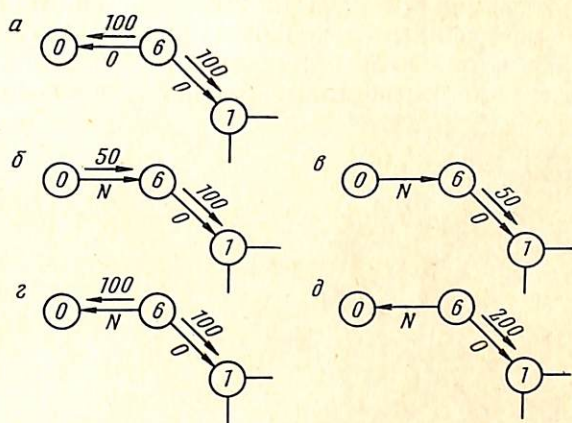


Рис. 3. Преобразования для производственной вершины 1

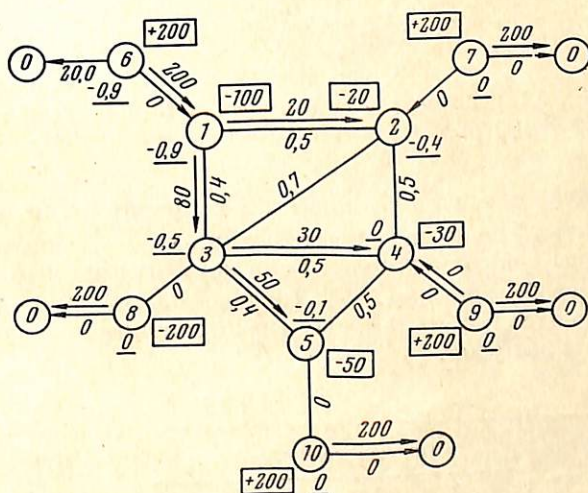


Рис. 4. Оптимальный план открытой транспортной задачи при $X_1 = 200$ ед.

Итерация t . В качестве t -й итерации, где $t \geq 1$, рассмотрим итерацию 1. В ее начале известны объемы производства X_r^0 .

Цель этой итерации состоит в том, чтобы вычислить транспортные разности «в окрестности» полученного плана производства, т. е. учесть влияние производственных факторов на план перевозок продукта. Для этого, как и на нулевой итерации, поочередно варьируем объем производства на одном из предприятий, например r -м, фиксируя этот объем на уровнях типовых мощностей.

Однако в отличие от нулевой итерации свобода варьирования объемов производства на остальных s -х предприятиях является односторонней. Если по рассматриваемому r -му предприятию необходимо фиксировать некоторый объем производства, меньший чем X_r^{t-1} (где X_r^{t-1} — объем производства, принятый в начале t -й итерации), для всех остальных s -х предприятий объемы производства должны быть не меньше соответствующих X_s^{t-1} . Такое изменение назовем «убывающим для r -го пункта». Если же фиксируемый в r -м пункте объем производства больше чем X_r^{t-1} (назовем такое изменение «возрастающим для r -го пункта»), по остальным предприятиям оставляется лишь свобода уменьшения выпуска.

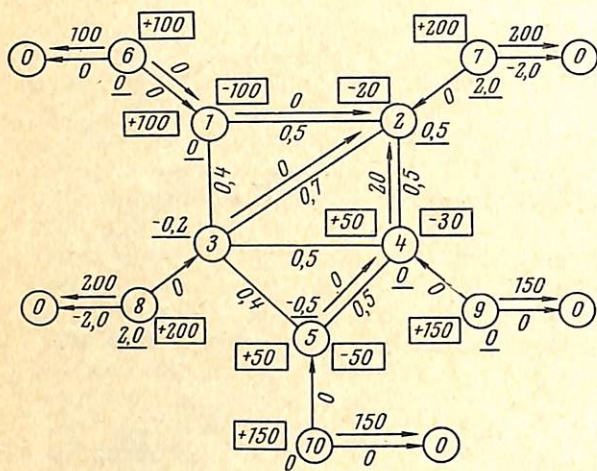


Рис. 5. Транспортная сеть итерации 1 (при убывающем переборе) и оптимальный план закрытой задачи

ци), для всех остальных s -х предприятий объемы производства должны быть не меньше соответствующих X_s^{t-1} . Такое изменение назовем «убывающим для r -го пункта». Если же фиксируемый в r -м пункте объем производства больше чем X_r^{t-1} (назовем такое изменение «возрастающим для r -го пункта»), по остальным предприятиям оставляется лишь свобода уменьшения выпуска.

Таблица 2

Пункт производства, r	Типовая мощность, ед.				
	0	40	50	100	200
1	40	24	20	0	77
2	10	10	15	40	115
3	0	16	20	40	89
4	15	5	10	35	125
5	20	4	0	31	115

Таблица 3

Пункт производства, r	Типовая мощность, ед.				
	0	40	50	100	200
1	40	44	40	30	117
2	10	30	35	70	155
3	0	34	38	65	119
4	15	25	30	65	165
5	20	24	20	61	155

При исчислении транспортных разностей желательно учесть и то обстоятельство, что транспортные затраты, а следовательно, и их приращения тем выше, чем меньше число входящих в план предприятий. Для того чтобы не занижать влияние транспортного фактора, необходимо сохранить общее число включенных в план предприятий приблизительно на том уровне, который достигнут при решении производственной задачи (особенно при целочисленном ее решении). Поэтому необходимо обеспечить первоочередную загрузку в транспортной задаче тех предприятий, для которых $X_r^{t-1} > 0$. Особенно это относится к полностью загруженным предприятиям ($X_r^{t-1} = M_r^{\text{ог}}$). Предприятия, для которых $X_r^{t-1} = 0$, должны использоваться в последнюю очередь, только в случае крайней необходимости.

Алгоритм исчисления транспортных разностей. С учетом указанных обстоятельств алгоритм на итерации 1 включает следующие операции.

1. Строим сеть, аналогичную изображенной на рис. 2, со следующими изменениями (см. рис. 5):

а) для полностью загруженных предприятий цены дуг к нулевой вершине приняты равными $+N_1$, где N_1 — число, достаточно большое по сравнению с используемыми ценами, но достаточно малое по сравнению с N . Здесь принято $N_1 = 2,0$ руб./ед.;

б) для предприятий, полностью не вошедших в план ($X_r^{t-1} = 0$), цены дуг к нулевой вершине приняты равными $-N_1$ (т. е. $-2,0$);

в) при $0 < X_r^{t-1} < M_r^q$ цены дуг к нулевой вершине равны нулю.

Предприятий, соответствующих условию «а», на нулевой итерации не было. Полностью не загружены пункты 2 и 3; соответственно $Z_{70} = Z_{80} = -2,0$. Наконец, $Z_{60} = Z_{90} = Z_{100} = 0$.

2. Выполним операции, аналогичные описанным в п. 2 нулевой итерации. Однако перебор фиксированных типовых мощностей осуществляется («убывающий перебор») и $M_r^q > X_r^{t-1}$ по разному для $M_r^q < X_r^{t-1}$ («возрастающий перебор»). Для $M_r^q = X_r^{t-1}$ перебор не нужен, так как транспортные разности заведомо равны нулю.

Для «убывающего перебора»* в вершинах 1—5 проставим (см. рис. 5) в качестве ресурсов соответствующие X_r^{t-1} , а в производственных вершинах 6—10 — неиспользованные остатки ($M_r^q - X_r^{t-1}$). Так, для пункта 4 $X_4^0 = 50$ ед.; следовательно, в вершине 4 проставляем ресурсы 50 ед., а в вершине 9 — 150 ед. В вершинах 2 и 7 ресурсы равны 0 и 200 ед., так как $X_2^0 = 0$.

Для «возрастающего перебора» ресурсы, равные X_r^{t-1} , проставляются в вершинах 6—10 (см. рис. 6).

Задачи, изображенные на рис. 5 и 6, являются исходными транспортными задачами первой итерации. Одинаковы их оптимальные планы на собственной транспортной сети, а также значения целевой функции $F^1 = 10$ руб.

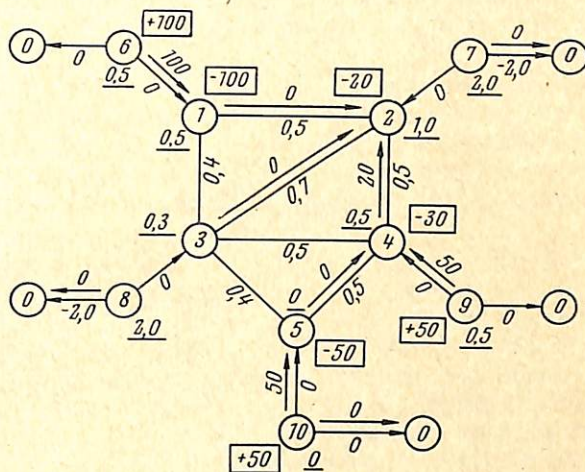


Рис. 6. Транспортная сеть итерации 1 (при возрастающем переборе) и оптимальный план закрытой задачи

* Если общая сумма X_r^{t-1} превышает D , сеть для убывающего перебора дополняется еще одним фиктивным потребителем, потребность которого равна избытку производимого продукта. К вершине, соответствующей этому потребителю, направляются дуги с нулевой ценой из тех r -х вершин транспортной сети, где $X_r^{t-1} > 0$. Так, если бы $D = 180$ единицам, после нулевой итерации следовало бы дополнить сеть вершиной 11, потребность в которой равна 20 единицам, и дугами (1,11), (4,11) и (5,11) с нулевыми ценами.

Алгоритм получения оптимального плана с использованием ранее полученных планов при возрастающем переборе полностью совпадает с описанным в п. 2 для нулевой итерации.

При убывающем переборе аналогичные по смыслу операции выполняются относительно не производственных, а r -х вершин транспортной сети, т. е. вершин 1—5, а не 6—10. В r -й транспортной вершине, например в вер-

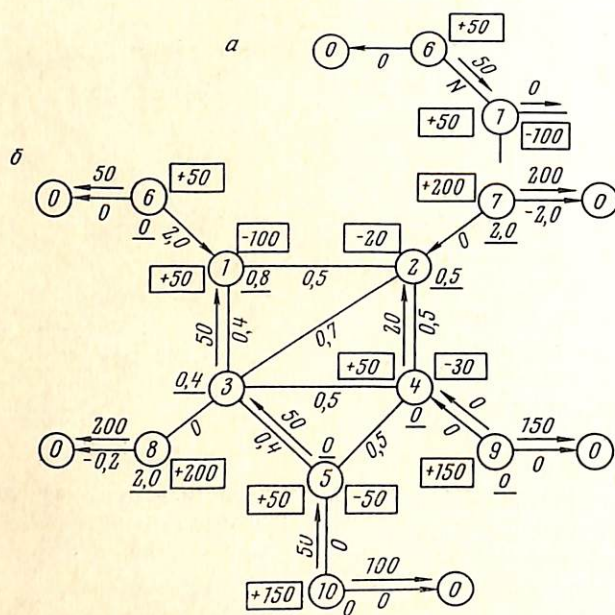


Рис. 7. Преобразования для вершины 1 при убывающем переборе

шине 1, в качестве ресурсов оставляется требуемая M_r^q . «Вычитаемый» поток, т. е. $(X_r^* - M_r^q)$, направляется к перебираемой r -й вершине по производственной дуге типа (6,1), где вместо нулевой цены проставляется запретительная цена N . На рис. 7, а изображены преобразования верхней левой части рис. 5, необходимые для уменьшения объема производства в вершине 1 на 50 единиц, а на рис. 7, б — план, полученный в результате такого преобразования.

Таблица 4

Пункт производства, r	Типовая мощность, ед.				
	0	40	50	100	200
1	80	48	40	0	67
2	0	0	5	30	105
3	0	12	16	36	79
4	15	0	0	25	115
5	25	5	0	25	105

Таблица 5

Пункт производства, r	Типовая мощность, ед.				
	0	40	50	100	200
1	80	68	60	30	107
2	0	20	25	60	145
3	0	30	34	61	109
4	15	20	20	55	155
5	25	25	20	55	145

3. Для всех полученных планов вычисляем значения F_r^{qt} , Δ_r^{qt} и Z_r^{qt} , $r = 1, 2, \dots, m$; $q = 1, 2, \dots, Q_r$, по формулам (11) и (12). При этом значения F_r^{qt} исчисляются только по системе потоков на дугах собственно транспортной сети (потоки на дугах с ценами $+N_1$ и $-N_1$, которые иногда могут остаться в плане, при вычислении целевой функции не учитывают-

ся). При исчислении $\Delta_r^{q^t}$ следует помнить, что $F^t = 10$ руб. Транспортные разности первой итерации $\Delta_r^{q^1}$ и $Z_r^{q^1}$ (руб.) приведем в табл. 4 и 5.

4. Находим оптимальный план производственной задачи, построенной по данным табл. 5. Этот план приводит к тому же выбору вариантов, что и задача, построенная после нулевой итерации. Задача считается решенной. Общая сумма затрат производственно-транспортной задачи составляет 80 руб.; нетрудно убедиться в том, что это действительно оптимальный план задачи.

Если бы X_r^1 отличились от X_r^0 , эти X_r^1 можно было бы использовать для перехода к итерации 2, и т. д. Вычислительный процесс желательно (но не обязательно) продолжать до тех пор, пока не повторится какой-либо из ранее полученных наборов X_r . В качестве решения задачи принимается тот из поитерационных планов, который минимизирует общую сумму затрат в исходной производственно-транспортной задаче.

Итерация t (вторая модификация метода). При первой модификации метода транспортных разностей план производства, задаваемый в начале каждой t -й итерации ($t \geq 1$), использовался главным образом для построения односторонних ограничений на величину объемов производства при переборе типовых мощностей. Содержащаяся в нем информация лишь частично использовалась для определения цен на дугах сети (формирование дуг с ценами $+N_1$, $-N_1$ и 0). В остальном экономическое влияние на последующий выбор пунктов производства оказывали только транспортные цены.

Для того чтобы отобразить влияние производственной части задачи, используем некоторую систему цен на дополняющих транспортную сеть дугах, при которой полученный ранее план производства был бы оптимальным и для задачи, построенной на сети.

Цены на дополняющих сеть дугах следует строить на основе потенциалов пунктов производства в закрытой транспортной задаче, где ресурсы поставщиков приняты в соответствии с полученным ранее планом. В любой производственной вершине должно быть равновесие: безразлично, направлять ли очередную единицу продукта реальным потребителям или фиктивному потребителю. Это становится возможным в том случае, когда цена на дуге от производственной к нулевой вершине равна потенциалу, взятому с обратным знаком.

Однако, если строго придерживаться этого правила, оптимизируемая система приходит в состояние настолько полного равновесия, что изменения суммы транспортных затрат при переборе теряют устойчивость и начинают зависеть от случайных факторов. Чтобы избежать этого, необходима дифференциация пунктов производства: лучшим пунктам должно отдаваться некоторое предпочтение, достаточное для преодоления случайных факторов, но недостаточное для нарушения равновесия, т. е. изменения плана выпуска.

Кроме того, и при рассматриваемой модификации метода транспортных разностей следует сохранить то же отношение к полностью загруженным и полностью незагруженным предприятиям, что при первой модификации.

Изложенные соображения вкратце поясняют принципы построения второй модификации алгоритма.

Продemonстрируем правила этой модификации на итерации 1 для решенного выше условного примера.

1. На основе ранее полученного плана производства ($X_1^0 = 100$ ед., $X_2^0 = X_3^0 = 0$, $X_4^0 = X_5^0 = 50$ ед.) строим и решаем закрытую задачу на собственно транспортной сети (если общая сумма X_r^{t-1} превышает D , транспортная сеть дополняется одной вершиной и направленными к ней дуга-

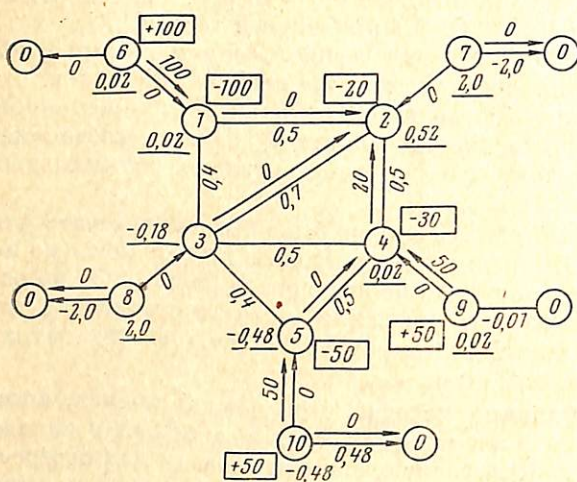


Рис. 8. Транспортная сеть при второй модификации метода

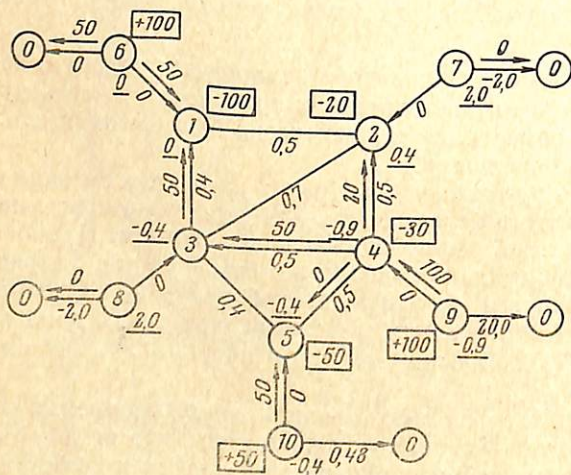


Рис. 9. Оптимальный план открытой транспортной задачи при второй модификации метода, для $X_4 = 100$ ед.

циалов становится равным нулю. В нашем примере частично загруженные пункты располагаются в порядке (1; 4; 5); нормирование потенциалов не нужно, так как $v_1 = 0$.

4. На дугах от r -х производственных вершин к нулевой вершине про- ставляем цены c_r , исчисленные по формуле (16)

$$c_r = -p_r - (n_r - 1)\varepsilon, \quad (16)$$

где p_r — нормированный потенциал r -й вершины транспортной сети; n_r — порядковый номер r -го пункта при ранжировке, описанной в п. 3; ε — достаточно малая величина, такая, что $n_{\max}\varepsilon < |p_r - p_s|$ при любых r и s ($p_r \neq p_s$).

ми, как это описано в примечании к п. 2 для итерации 1 при первой модификации). Определяем потенциалы тех пунктов, где $0 < X_r^{t-1} < M_r^Q$. Эти потенциалы можно получить и из планов, приведенных на рис. 5 или 6, где они различаются лишь на величину слагаемого, одинакового для всех рассматриваемых вершин. Обозначим потенциал r -й вершины v_r ; тогда (см. рис. 5) $v_1 = 0$, $v_4 = 0$, $v_5 = -0,5$.

2. Для предприятий, полностью вошедших или полностью не вошедших в план, цены дуг от производственной к нулевой вершине принимаются равными $+N_1$ и $-N_1$ (так же, как при первой модификации). В нашем примере это значит, что на дугах (8,0) и (9,0) проставляются цены $-2,0$.

3. Частично загруженные пункты производства располагаем в порядке убывания значений потенциалов. Если несколько вершин имеют одинаковые потенциалы, предпочтение отдается пункту с большей долей загрузки максимальной мощности M_r^Q . Нормируем потенциалы частично загруженных пунктов (прибавляем константу) таким образом, что наибольший из потен-

Примем, например, $\varepsilon = 0,01$. Тогда в соответствии с п. 4 цены на дугах (6,0), (9,0) и (10,0) равны 0, $-0,01$ и $0,48$ ($0,5 - 2 \times 0,01 = 0,48$).

5. На дугах от всех r -х производственных вершин (включая вершины, перечисленные в п. 2) к r -м вершинам транспортной сети проставляем нулевые цены. Ресурсы в вершинах при убывающем и возрастающем переборе принимаем такими же, как и в случае первой модификации. Перебор также осуществляется по алгоритму, описанному для первой модификации.

Таблица 6

Пункт произ- водст- ва, r	Типовая мощность, ед.				
	0	40	50	100	200
1	80	48	40	0	67
2	0	0	5	30	105
3	0	12	16	36	79
4	15	0	0	45	115
5	25	5	0	25	105

Сеть, построенная согласно правилам второй модификации алгоритма для возрастающего перебора, а также оптимальный план на этой сети приведены на рис. 8. На рис. 9 изображен оптимальный план при фиксированном в вершине 4 объеме производства, равном 100 ед. ($q = 4$); план получен в процессе возрастающего перебора для вершины 4.

Как и при первой модификации (см. п. 3 алгоритма), F_r^{qt} исчисляются только по системе потоков на дугах собственно транспортной сети. Для плана, приведенного на рис. 9, $F_4^{41} = 20 \times 0,5 + 50 \times 0,5 + 50 \times 0,4 = 55$ руб.

Поскольку $F^1 = 10$ руб., $\Delta_4^{41} = 45$ руб.

Транспортные разности для всех r и q приведем в табл. 6.

Все Δ_r^{q1} совпадают со значениями, полученными при первой модификации, кроме $\Delta_4^{41} = 45$ руб. (вместо 25 руб.). Соответственно, оптимальный план итерации 1 является повторением оптимального плана нулевой итерации. Задача считается решенной.

3. ПРОВЕРКА МЕТОДА ТРАНСПОРТНЫХ РАЗНОСТЕЙ И ЕГО ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Хотя метод транспортных разностей, как отмечалось во введении, рассматривается нами в свете подхода, вовсе не требующего полной формализации глобального критерия, он проверялся и с точки зрения пригодности для приближенного решения задач с известным критерием. Экспериментальная проверка на условных статистических линейных производственно-транспортных многопродуктовых задачах показала, что метод позволяет получить планы, близкие к истинному оптимуму (значение целевой функции для приближенного плана превышало соответствующее значение для оптимального плана в пределах $0-3,1\%$). Решен ряд практических задач.

Во всех без исключения случаях, когда задача решалась и другими приближенными методами (получить точное решение было невозможно ввиду дискретности переменных), этот метод позволял найти наилучшие (по значению целевой функции) планы.

Наибольшей по размерам и сложности задач, для решения которой был использован описываемый метод, явилась задача оптимального развития и размещения производства домашних холодильников. В этой динамической (3-периодной) многопродуктовой (10 типоразмеров) задаче частично целочисленного программирования при развернутой записи содержалось бы около 2400 ограничений и более 10 000 переменных. С помощью метода транспортных разностей ее удалось свести к задаче с 23 основными ограничениями типа (8), 36 ограничениями типа (9) и 600 дискретными переменными, которая решалась методом, разработанным А. Б. Поманским и А. Д. Шапиро [4].

Накопленный опыт подтверждает очевидное предположение, что при преобладающем влиянии транспортного фактора целесообразно начинать итеративный процесс с нулевой итерации, а при незначительном — с решения «чисто производственной» задачи (не учитывающей транспорт) и с использования полученного плана для перехода к итерации 1. Возможны и другие варианты организации итеративного процесса. Например, при оптимизации размещения производства одного продукта можно вначале решить линейную открытую производственно-транспортную задачу, а полученный ее план использовать для перехода к итерации 1. Для всех исследованных случаев характерна быстрая сходимость: хороший план удавалось получить не позже второй итерации.

Программа метода транспортных разностей в незначительных деталях (связанных с особенностями машинной реализации) отличается от алгоритма, описанного в разделе 3. Вычисления не требуют много времени. Так, перебор 130 вариантов развития для 40 пунктов производства на транспортной сети 370 вершин требует 10—15 мин. машинного времени (на ЭВМ БЭСМ-3М), что примерно равно времени, необходимому для решения обычной транспортной задачи такого же размера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Н. Первозванская, А. А. Первозванский. Алгоритм поиска оптимального распределения централизованных ресурсов. Известия АН СССР, серия «Техническая кибернетика», 1965, № 3.
2. Д. М. Казакевич. Приближенный метод нахождения оптимального плана размещения и специализации производства. В сб. Модели и методы оптимального развития и размещения производства, вып. 3. Новосибирск, Изд-во НГУ, 1965.
3. Б. Т. Довгаль, К. В. Ким, В. А. Маш. Метод транспортных разностей. Докл. на Всес. конф. по применению экономико-математических методов и электронно-вычислительной техники в плановом развитии и размещении производства. Таллин, 1967.
4. А. Б. Поманский, А. Д. Шапиро. Об итеративных методах решения отраслевых задач, содержащих дискретные переменные. В сб. Модели и алгоритмы оптимального планирования, вып. 2, М., ЦЭМИ АН СССР, 1967.

Поступила в редакцию
27.VI.1969