ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1970 том VI, вып. 3

К ТЕОРИИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДЕМОЭКОНОМИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ *

В. Ф. ШУКАЙЛО

(Харьков)

Проблема прогнозирования макродвижений в таких больших системах, как область, группа областей, государство и т. д., весьма актуальна и важна практически. В данной работе предпринята попытка рассмотрения в общем виде взаимосвязанных естественного и экономического движений. Эти два движения основные. Количественные характеристики других специальных движений (потоки заболеваний, правонарушений и т. п.) могут быть функционально «привязаны» к основным параметрам естественного и экономического движений.

Рассмотрим вначале эволюционную теорию естественного движения населения в плане «чистой» демографической статистики для выявления тенденций, логически совместимых с общей структурой соответствующих уравнений.

В наиболее общем случае исторической эволюции процесс воспроизводства населения описывается интегральным уравнением [1]

$$n_{ж}(t)=\int\limits_0^\infty n_{ж}(t-y)\,r(y,t)\,dy. \tag{1}$$

Здесь $n_{ж}(t)$ — интенсивность рождения девочек, а $r(y, t)$ — переменная во времени t функция воспроизводства [1]

$$r(y, t)=\varphi(y, t)\,l_{ж}(y, 0, t-y), \tag{2}$$

где $\varphi(y, t)$ — фертильность женщин возраста y в момент t исторического времени, $l(x, y, z)$ — вероятность прожить больше x лет, имея в момент $t=z$ возраст y.

Эволюция возрастной структуры женского населения описывается плотностью распределения [1]

$$f_{ж}(y,t)=\frac{n_{ж}(t-y)\,l_{ж}(y,0,t-y)}{\int\limits_0^\infty n_{ж}(t-y)\,l_{ж}(y,0,t-y)\,dy}. \tag{3}$$

Полагая $n_{м}(t)\,/\,n_{ж}(t)$ постоянным, можно прогнозировать эволюцию возрастной структуры мужского населения

$$f_{м}(y,t)=\frac{n_{ж}(t-y)\,l_{м}(y,0,t-y)}{\int\limits_0 n_{ж}(t-y)\,l_{м}(y,0,t-y)\,dy} \tag{4}$$

* В порядке постановки вопроса.

Возникает интересный в практическом и теоретическом отношении вопрос о поведении плотностей распределения $f(y, t)$ с течением времени t. Можно ли получить какие-либо конкретные асимптотические результаты при неполной информации об изменениях в будущем функций $n(t)$ и $l(y, 0, t-y)$? Оказывается, что да. Предварительно укажем следующие из (3), (4) частные результаты.

Для стационарного населения

$$n(t)=n(0); \quad \frac{\partial}{\partial t} l(y,0,t-y)\equiv 0; \tag{5}$$

$$f(y)=\frac{l(y)}{\mu_1}. \tag{6}$$

Здесь μ_1 — средняя длительность жизни родившихся (девочек, мальчиков).

Для стабильного населения

$$n(t)=n(0)\exp(r_0 t); \quad \frac{\partial}{\partial t} l(y,0,t-y)\equiv 0; \tag{7}$$

$$f(y)=\frac{l(y)\exp(-r_0 y)}{\int\limits_0^\infty l(y)\exp(-r_0 y)\,dy}. \tag{8}$$

Стационарное население является частным случаем стабильного при равенстве нулю темпа r_0 рождаемости. Отметим, что частные результаты (6), (8) получил из несколько иных соображений М. Лопен во время второй мировой войны [2].

Для ряда вопросов важны моменты ν-го порядка c_ν для возрастов живущих в $(t, t+dt)$. Для стабильного населения c_ν от t не зависит и определяется при данной $l(y)$ темпом рождаемости r_0.

$$c_\nu(r_0)=\frac{\int\limits_0^\infty y^\nu l(y)\exp(-r_0 y)\,dy}{\int\limits_0^\infty l(y)\exp(-r_0 y)\,dy}. \tag{9}$$

Момент $c_\nu(r_0)$ можно представить в виде отношения двух абсолютно сходящихся рядов

$$c_\nu(r_0)=\left[\sum_{k=0}^\infty \beta_k(\nu) r_0^k\right] \Big/ \sum_{k=0}^\infty \beta_k(0) r_0^k=\sum_{k=0}^\infty \gamma_k(\nu) r_0^k; \tag{10}$$

$$\beta_k(\nu)=(-1)^k \frac{\mu_{k+\nu+1}}{k!\,(k+\nu+1)}; \tag{11}$$

$$\mu_s=\int\limits_0^\infty y^s[-l'(y)]\,dy=s\int\limits_0^\infty y^{s-1} l(y)\,dy. \tag{12}$$

Коэффициенты $\gamma_k(\nu)$ определяются моментами μ_s длительностей жизни родившихся из соотношений

$$\begin{aligned}
\beta_0(\nu) &= \gamma_0(\nu)\beta_0(0),\\
\beta_1(\nu) &= \gamma_0(\nu)\beta_1(0)+\gamma_1(\nu)\beta_0(0),\\
\beta_2(\nu) &= \gamma_0(\nu)\beta_2(0)+\gamma_1(\nu)\beta_1(0)+\gamma_2(\nu)\beta_0(0),
\end{aligned} \tag{13}$$

. . . .

$$\beta_k(\nu) = \gamma_0(\nu)\beta_k(0) + \gamma_1(\nu)\beta_{k-1}(0) + \ldots + \gamma_k(0)\beta_0(0).$$

В простейшем случае стационарного населения (6)

$$c_\nu(0) = \gamma_0(0) = \frac{\mu_{\nu+1}}{\mu_1(\nu+1)}. \tag{14}$$

Дифференцируя $f(y)$ (8) по r_0, получим

$$\frac{d}{dr_0} f(y|r_0) = f(y|r_0)\,[c_1(r_0) - y]. \tag{15}$$

Здесь $f(y|r_0)$ — плотность распределения возрастов стабильного населения с темпом рождаемости r_0 (8). Из (15) следует, что малое увеличение dr_0 темпа рождаемости увеличивает относительную численность населения в возрастной группе $(0, c_1(r_0))$ и уменьшает в $(c_1(r_0), \infty)$. В соответствии с (10)—(13) имеем для среднего возраста живущих $c_1(r_0)$

$$c_1(r_0) = \frac{\mu_2}{2\mu_1} + \frac{1}{\mu_1^2}\left(\frac{\mu_2^2}{4} - \frac{\mu_3\mu_1}{3}\right) r_0 + \ldots \tag{16}$$

Из неравенства Буняковского — Шварца

$$\mu_2 < \sqrt{\mu_3\mu_1} \tag{17}$$

коэффициент перед r_0 в (16) меньше нуля. Двух членов ряда (16) достаточно для оценки $c_1(r_0)$ лишь при весьма малых $|r_0|$, порядка 0,01 1/год. В общем случае характер зависимости $c_1(r_0)$ от r_0 вытекает из неравенства

$$\frac{dc_1(r_0)}{dr_0} = c_1^2(r_0) - c_2(r_0) < 0 \tag{18}$$

с увеличением r_0 уменьшается $c_1(r_0)$ («омоложение»), с уменьшением — возрастает («постарение»). Параметр r_0 точно определяется из уравнения [3, 4]

$$1 = \int_0^\infty \varphi(y)\, l_ж(y) \exp(-r_0 y)\, dy. \tag{19}$$

Перейдем к оценке возможностей эволюции $f(y, t)$ на основе общих соотношений (3), (4). Предположим вначале неуклонный прогресс в снижении смертности, т. е.

$$l(y, 0, t_2 - y) > l(y, 0, t_1 - y), \quad t_2 > t_1. \tag{20}$$

Так как $l(y, 0, t - y) < 1$, то при этом неизбежно существует предел

$$\lim_{t\to\infty} l(y, 0, t - y) = l_*(y). \tag{21}$$

Функции $l(y, 0, t - y)$ непрерывны по y при любом t. Так как $l(y, 0, t)$ — монотонно убывающая функция по y, причем $l(0, 0, t) = 1$, а $l(\infty, 0, t) = 0$, то и $l(y, 0, t - y)$ — монотонно убывающая по y функция, по крайней мере если выполняется условие (20)

$$l(y_2, 0, t - y_2) < l(y_1, 0, t - y_1), \quad y_2 > y_1. \tag{22}$$

Таким образом, функция $l(y, 0, t - y)$ обладает всеми обычными свойствами функции выживания, а ее дополнение до 1 является обычной функцией распределения длительностей жизни родившихся в момент $t - y$. Из (22) следует, что предельная функция выживания $l_*(y)$ монотонно убывает по y, т. е.

$$l_*(y_2) < l_*(y_1), \quad y_2 > y_1, \tag{23}$$

причем $l_*(0) = 1$ и $l_*(\infty) = 0$.

Относительно характера приближения $l(y, 0, t)$ к $l_*(y)$ можно предполагать равномерную сходимость. Действительно, исключая по физическим соображениям скачки-разрывы в $l_*(y)$, т. е. полагая $l_*(y)$ непрерывной, можно доказать равномерную сходимость $l(y, 0, t)$ к $l_*(y)$ на бесконечном интервале $(0, \infty)$. Пусть задано любое $\varepsilon > 0$. Выберем такое $\tilde{y}$, что при $y > \tilde{y}$ $l_*(y) < \varepsilon$. В конечном интервале $[0, \tilde{y}]$ в соответствии с теоремой Дини из непрерывности $l_*(y)$ и $l(y, 0, t)$ и положительности $l(y, 0, t_2) - l(y, 0, t_1)$ при $t_2 > t_1$ следует равномерная сходимость $l(y, 0, t)$ к $l_*(y)$. Значит, при $t > t_0(\varepsilon)$ $l_*(y) - l(y, 0, t) < \varepsilon$ в $[0, \tilde{y}]$, а следовательно, и в $(0, \infty)$.

Наиболее сложен вопрос об интегрируемости $l(y, 0, t-y)$ и вообще $y^\nu l(y, 0, t-y)$ при $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ в бесконечном интервале $(0, \infty)$. Существования μ_ν в настоящее время и непрерывности $l(y, 0, t)$ по y и t недостаточно для обоснования конечности μ_ν в будущем (при условии прогресса (20)). Поэтому мы просто постулируем естественное условие

$$\int_0^\infty y^\nu l(y, 0, t-y)\, dy = \frac{1}{\nu+1} \mu_{\nu+1}(t) < \infty. \tag{24}$$

В силу (20) $\mu_{\nu+1}(t)$ является монотонно возрастающей функцией t. Вопрос о конечности или бесконечности предела $\mu_{\nu+1}(t)$ при $t \to \infty$ остается, строго говоря, открытым.

Рассмотренные выше модели стабильного и стационарного населения чрезмерно идеализированы. Более реальной (20) — (24) для целей прогноза демографических движений может быть модель квазистационарного населения, которую мы определим условиями

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n(t-y)}{n(t)} = 1, \tag{25}$$

$$\lim_{t\to\infty} l(y, 0, t) = l_*(y). \tag{26}$$

Условию (25) удовлетворяет широкий класс кривых со степенным и логарифмическим ростом (убыванием) и тем более кривые с «насыщением» типа «логистической» кривой Ферхюльста — Пирла. С учетом (3), (4), (20), (26) и (24), (25) имеем асимптотики при $t \to \infty$

$$f(y, t) \sim \frac{l_*(y)}{\mu_1(t)}, \tag{27}$$

$$c_\nu(t) \sim \frac{\mu_{\nu+1}(t)}{(\nu+1)\mu_1(t)}. \tag{28}$$

Структура формул (27), (28) аналогична структуре формул (6), (14) для стационарного населения, что оправдывает термин «квазистационарное население» (к.с.н.). В соответствии с (28) имеем для среднего возраста $c_1(t)$ и коэффициента вариации $\delta_f(t)$ возрастов живущих в $(t, t+dt)$ будущего асимптотики

$$c_1(t) \sim \frac{\mu_2(t)}{2\mu_1(t)} = \frac{1}{2} \mu_1(t) \left[1 + \delta_l^2(t)\right], \tag{29}$$

$$\delta_f(t) \sim \left[\frac{4\mu_3(t)\mu_1(t)}{3\mu_2^2(t)} - 1\right]^{1/2}. \tag{30}$$

Здесь $\delta_l(t)$ — коэффициент вариации длительностей жизни родившихся раньше момента t

$$\delta_l(t)=\left[\frac{\mu_2(t)}{\mu_1^2(t)}-1\right]^{1/2}. \tag{31}$$

Учитывая (17), можно утверждать, что всегда для к.с.н. в будущем

$$\delta_f(t)>\frac{1}{\sqrt{3}}=0{,}577, \tag{32}$$

а средний возраст живущих несколько больше половины средней длительности жизни (29). Таким образом, независимо от частных и трудно предсказуемых деталей поведения $n(t)$ и $l(y,\,0,\,t)$ в будущем модель к.с.н. (25), (26) дает довольно устойчивую в целом форму «возрастной пирамиды» $f(y,t)$.

Аналогично плотности распределения $f(y,\,t)$ возрастов живущих в $(t,\,t+dt)$ можно рассмотреть плотность распределения $g(y,\,t)$ возрастов умерших в $[t,\,t+dt]$. Полагая для упрощения аналитической техники дифференцируемость по y $l(y,\,0,\,t-y)$, можно записать

$$g(y,t)=\frac{n(t-y)\dfrac{\partial}{\partial y}l(y,0,t-y)}{\displaystyle\int\limits_0^\infty n(t-y)\frac{\partial}{\partial y}l(y,0,t-y)\,dy}. \tag{33}$$

Для к.с.н. в соответствии с (25) имеем асимптотику при $t\to\infty$

$$g(y,t)\sim-\frac{\partial}{\partial y}l(y,0,t-y). \tag{34}$$

Таким образом, для к.с.н. плотность распределения $g(y,\,t)$ возрастов умерших все точнее с течением времени t определяет плотность распределения длительностей жизни родившихся в $t-y$. Общий коэффициент смертности $k(t)$ можно определить наиболее строго как отношение числа умерших в $[t,\,t+1]$ к числу живших в $[t,\,t+1]$

$$k(t)=\frac{\displaystyle\int\limits_t^{t+1}d\xi\int\limits_0^\infty n_{\text{ж}}(\xi-y)\frac{\partial}{\partial y}\bar{l}(y,0,\xi-y)\,dy}{\displaystyle\int\limits_0^\infty n_{\text{ж}}(t-y)\,\bar{l}(y,0,t-y)\,dy+\int\limits_t^{t+1}n_{\text{ж}}(\xi)\,d\xi}. \tag{35}$$

Здесь $\bar{l}(y,\,0,\,\xi-y)$ — средневзвешенное из функций выживания $l_{\text{ж}}(y,0,\xi-y)$ и $l_{\text{м}}(y,0,\xi-y)$:

$$\bar{l}(y,\,0,\,\xi-y)=(1+k_1)^{-1}[l_{\text{ж}}(y,\,0,\,\xi-y)+k_1l_{\text{м}}(y,\,0,\,\xi-y)], \tag{36}$$

где k_1 — отношение числа рождений мальчиков к числу рождений девочек.

Для к.с.н. в соответствии с (25) имеем асимптотику при $t\to\infty$

$$k(t)\sim\frac{1}{1+\bar{\mu}_1(t)}. \tag{37}$$

Так, при $\bar{\mu}_1(t)=80$ лет будем иметь $k(t)\simeq0{,}0123$, или 12,3 смертей в $[t,\,t+1]$ на 1000 живших в $[t,\,t+1]$.

По данным 1958 г. [5], общий коэффициент смертности $k(t)$, исчисленный как отношение числа умерших в (1958, 1959) к средней численности населения в (1958, 1959), имел значения: СССР — 7,2, Канада — 7,9, США — 9,5, ФРГ — 10,8, Швеция — 9,6, Япония — 7,5, Франция — 8,9, Австралия — 8,4. При этом средняя длительность жизни мужчин $\mu_1 = 63—70$ и женщин $\mu_1 = 68—73$, что соответствует в среднем $\bar{\mu} = 69—70$. Это говорит о том, что указанные страны находятся в разных стадиях переходного процесса и весьма различно удалены по $k(t)$ от асимптотического состояния в модели к.с.н. (37). В ближайший период следует ожидать повышения $k(t)$.

Весьма важное значение для целей планирования снабжения людских контингентов разными «благами» и оценки потенциальных трудовых ресурсов имеет величина $\tau(y_1, y_2, t_1, t_2)$ суммарного времени жизни людей возраста $[y_1, y_2]$ в $[t_1, t_2]$:

$$\tau(y_1, y_2, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} d\xi \int_{y_1}^{y_2} n(\xi - y)\, l(y, 0, \xi - y)\, dy. \tag{38}$$

Общее количество умерших в возрасте $[y_1, y_2]$ в $[t_1, t_2]$ определится выражением

$$m(y_1, y_2, t_1, t_2) = -\int_{t_1}^{t_2} d\xi \int_{y_1}^{y_2} n(\xi - y)\, \frac{\partial}{\partial y}\, l(y, 0, \xi - y)\, dy. \tag{39}$$

Для целей судебно-демографической статистики важен прогноз общего числа правонарушений в интервале $[t_1, t_2]$ будущего в возрастной группе $[y_1, y_2]$. Соответствующее число $M(y_1, y_2, t_1, t_2)$ определяется выражением

$$M(y_1, y_2, t_1, t_2,) = \int_{t_1}^{t_2} [N_{ж}(t) \int_{y_1}^{y_2} f_{ж}(y, t)\, h_{ж}(y, t)\, dy +$$

$$+ N_{м}(t) \int_{y_1}^{y_2} f_{м}(y, t)\, h_{м}(y, t)\, dy]\, dt. \tag{40}$$

Здесь $h(y, t)\,dydt$ — среднее количество правонарушений, совершаемое определенным полом (м, ж) возраста $(y, y + dy)$ в интервале времени $(t, t + dt)$, а $N(t)$ — общая численность населения данного пола

$$N_{ж}(t) = \int_0^{\infty} n_{ж}(t - y)\, l_{ж}(y, 0, t - y)\, dy; \tag{41}$$

$$N_{м}(t) = \int_0^{\infty} n_{ж}(t - y)\, k_1(t - y)\, l_{м}(y, 0, t - y)\, dy. \tag{42}$$

Здесь $k_1(t - y)$ — отношение числа рождений мальчиков к числу рождений девочек в интервале $(t - y, t + dt - y)$. С учетом (3), (4), (41), (42) выражение (39) можно представить и в виде

$$M(y_1, y_2, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{y_1}^{y_2} n_{ж}(t - y)\, [l_{ж}(y, 0, t - y)\, h_{ж}(y, t) +$$

$$+ k_1(t - y)\, l_{м}(y, 0, t - y)\, h_{м}(y, t)]\, dy. \tag{43}$$

Для $M(y_1, y_2, t_1, t_2)$ можно получить асимптотику (в рамках модели к.с.н.) и ввести ряд упрощений, таких, как

$$k_1(t-y)=k_1; \quad \frac{h_{ж}(y,t)}{h_{м}(y,t)}=k_2. \tag{44}$$

Здесь k_1 и k_2 — усредняющие константы. Можно принять, например, $k_1 = 1{,}06$ и $k_2 = 0{,}20$. Интересно, что в целом параметр k_2 обнаруживает довольно четкую историческую устойчивость. Так, еще Кетле [6] указывал на среднее значение $k_2 = 0{,}20$. Для одной большой индустриальной области за период 1961—1966 гг. было $k_2 = 0{,}21$. (Колебания по годам от 0,25 до 0,15 с тенденцией снижения к настоящему времени.) С учетом упрощений (44) для модели к.с.н. имеем асимптотику

$$M(y_1, y_2, t_1, t_2) \sim (k_2 + k_1) \int_{t_1}^{t_2} n_{ж}(t)\,dt \int_{y_1}^{y_2} \bar{l}(y)\,h_{м}(y,t)\,dy, \tag{45}$$

где $\bar{l}(y)$ — средневзвешенное из предельных функций выживания $l_{ж}(y)$ и $l_{м}(y)$:

$$\bar{l}(y)=\frac{k_2 l_{ж}(y)+k_1 l_{м}(y)}{k_2+k_1}; \tag{46}$$

$\bar{l}(y)$ обладает всеми обычными свойствами функции выживания: $\bar{l}(0) = 1$; $\bar{l}(\infty) = 0$ и т. д. Весьма показательным следует считать отношение числа правонарушений $M(y_1, y_2, t_1, t_2)$ к суммарному времени жизни «потенциальных правонарушителей» $\bar{\tau}(y_1, y_2, t_1, t_2)$

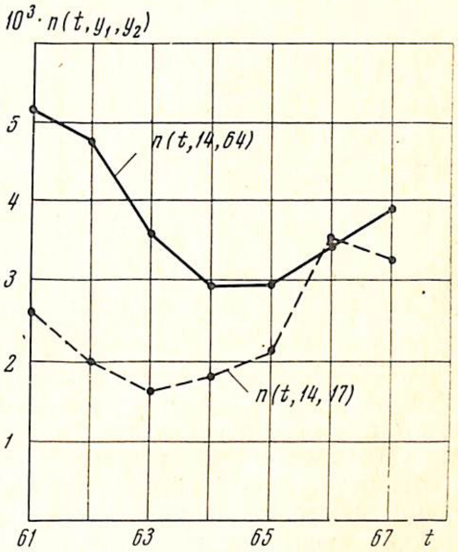

Рис. 1. Выборочные реализации нестационарной случайной функции $\Pi(t, y_1, y_2)$

$$k_3(t_1,t_2,y_1,y_2)=\frac{(k_2+k_1)\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{y_1}^{y_2} n_{ж}(t-y)\,h_{м}(y,t)\,\bar{l}(y,0,t-y)\,dy}{(1+k_1)\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{y_1}^{y_2} n_{ж}(t-y)\,\bar{l}(y,0,t-y)\,dy}. \tag{47}$$

Для модели к.с.н. при $t_1 \to \infty$ $(t_2 - t_1 = \mathrm{const})$ имеем асимптотику

$$k_3(t_1,t_2,y_1,y_2) \sim \frac{k_2+k_1 \int_{t_1}^{t_2} n_{ж}(t)\,dt \int_{y_1}^{y_2} \bar{l}(y)\,h_{м}(y\ ,t)\,dy}{1+k_1 \quad \left[\int_{t_1}^{t_2} n_{ж}(t)\,dt\right]\left[\int_{y_1}^{y_2} \bar{l}(y)\,dy\right]}. \tag{48}$$

На рис. 1 представлена эволюция функции $n(t, y_1, y_2) = k_3(t, t+1, y_1, y_2)$ по одной большой области для всех возрастов в целом (практически 14—64) и группы 14—17 лет за период 1961—1967 гг. Удельный вес в населении возрастной группы 14—17 лет определялся методом передвижек из данных переписи 1959 г. Почти весь период 1961—1967 гг. характерен существенным повышением удельного веса возрастной группы 14—17 лет (в %: 4,06; 4,86; 5,75; 6,20; 6,38; 6,40; 6,30), что, естественно, сказалось на динамике удельного веса этой группы правонарушителей (в %: 3; 3; 3,8; 5,4; 6,3; 9,0; 7,3). Анализ графиков на рис. 1 убедительно свидетельствует о значительно бóльших неравномерностях, чем это наблюдали более 100 лет назад Кетле [6], Майр [7]. Социальные ритмы ускорились, в процессе коллективной адаптации видоизменяются правовые нормы, что в больших системах вызывает процессы «перерегулирования». Этим объясняются «пики» в 1961 и 1966 гг. (рис. 1). Тем более актуальны задачи прогнозирования и управления соответствующих нестационарных (в обычном смысле теории случайных процессов) моральных движений.

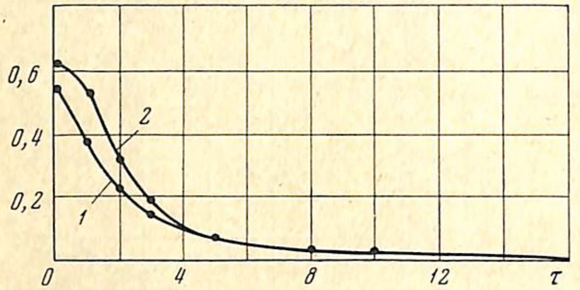

Рис. 2. Выборочные функции распределения $\overline{Q}(\tau)$ длительностей τ времени изоляции: *1* — 1961 г., *2* — 1965 г.

«Железные частоты», восхитившие в свое время Кетле, в настоящее время наблюдаются лишь в частных деталях [8]. Несомненно, что устойчивость измеримых параметров моральных движений в быстро развивающихся больших системах имеет место, однако количественные характеристики этой устойчивости должны выражаться более сложными функционалами, чем традиционные «дроби». Несомненно, что даже чисто внешнее описание наблюдаемых фактов с помощью современных математических методов может быть проведено на более высоком уровне, чем во времена Кетле. Однако решающим продвижением должно быть создание теоретических моделей, объясняющих сам тип статистики определенного явления. В технической теории надежности такой подход уже намечен [9—13]. В качестве актуальной задачи укажем на необходимость построения модели распределения правонарушений по их тяжести. Так, из данных судебной статистики по одной области обнаружилось, что распределение времени изоляции $Q(\tau)$ (в среднем пропорциональных тяжести правонарушения) довольно точно подчиняется экспоненциальному распределению (рис. 2). Лишь для малых сроков, порядка 1—3 лет, «λ-характеристика» имеет горб, высота которого примерно в 2 раза выше основного постоянного уровня. Можно в первом приближении принять

$$\overline{Q}(\tau) = 1 - Q(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 0, \\ (1 - \xi_0) \exp\left(-\frac{\tau}{\langle\tau\rangle}\right), & \tau > 0. \end{cases} \tag{49}$$

Здесь ξ_0 — доля осужденных к иным мерам наказания. Этот эмпирический факт может быть объяснен теоретически. Особое внимание мы уделяем моделям естественного выживания для людей [1, 11], полагая, что из великого опыта смерти можно извлечь важную информацию и о глубинных и непосредственно неизмеримых процессах, определяющих общую «напряженность» существования людей в больших системах, которая в свою очередь не может не влиять на ряд моральных и вообще демоэкономических движений. Известно, что тип функции выживания $l(x,\ 0,\ t)$ людей в процессе исторической эволюции почти не меняется. Существенно изменяются лишь численные значения параметров в $l(x,\ 0,\ t)$. В [11, 12] построена следующая модель выживания физического элемента, подверженного процессу старения: «прочность» $R(x)$ с возрастом x монотонно убывает; «нагрузка» $S(x)$ представляет собой дискретную последовательность случайных импульсов. Смерть наступает в момент первого превышения «нагрузкой» $S(x)$ «прочности» $R(x)$. Для этой модели составлено точное дифференциальное уравнение, решение которого [11] определяет $l(x)$ в следующем общем виде

$$l(x)=\exp\left\{-\int\limits_0^x\left[\int\limits_0^\infty \bar{P}_s(\eta,z)\,p_r(\eta,z)\,d\eta\right]h(z)\,dz.\right. \tag{50}$$

Здесь $p_s(\eta,\ x)$, $p_r(\eta,\ x)$ — плотности распределения $S(x)$ и $R(x)$ в возрасте x. Соответственно.

$$\bar{P}_s(\eta,x)=\int\limits_\eta^\infty p_s(\xi,x)\,d\xi. \tag{51}$$

$h(x)$ — плотность потока импульсов, в общем случае зависящая от возраста x и в математическом плане совпадающая с плотностью восстановления в теории восстановления. Из (50) сразу следует выражение для интенсивности отказов («силы смерти») $\lambda(x)$

$$\lambda(x)=h(x)\int\limits_0^\infty \bar{P}_s(\eta,x)\,p_r(\eta,x)\,d\eta. \tag{52}$$

Для людей ($x>30$ л) можно принять

$$\begin{gathered} h(x)=f_0=\text{const},\\ \bar{P}_s(\eta,\ x)=\exp(-\alpha\eta),\\ p_r(\eta,\ x)=\delta[\eta-R(x)],\\ R(x)=\beta(1-Bx). \end{gathered} \tag{53}$$

Условия (53) предполагают независимость распределений $p_r(\eta,\ x)$, $p_s(\eta,\ x)$ от возраста x и, кроме того, линейное убывание физических сил с возрастом, что в общем соответствует физиологическим фактам [14]. С учетом (53) имеем для $\lambda(x)$

$$\lambda(x)=a\exp(bx), \tag{54}$$

$$a=f_0\exp(-\gamma), \tag{55}$$

$$b=\gamma B, \tag{56}$$

$$\gamma=\alpha\beta. \tag{57}$$

Такой вид $\lambda(x)$ в (54) хорошо подтверждается опытом со времен Гомпертца (1825 г.) [1, 14]. Важно здесь то, что параметры a и b получили физическую расшифровку. Отметим, что связь между a и b (55), (56) согласуется с данными ООН [14] по $\lambda(x)$ для стран разного уровня развития. Важным «скрытым» в населении параметром является частота f_0 «нагрузок», влияющая на общую «напряженность» существования масс людей. Зарегистрированные серьезные заболевания определяют только часть от f_0.

Бóльшая часть f_0, по-видимому, может быть отнесена к «стрессам» [15, 16]. Определяя из опыта a и b [1] и принимая снижение «жизненных сил» равным 0,85% за год от 30-летнего уровня [14], можно найти «запас прочности» γ ($\gamma = 10{,}5$ для мужчин, $\gamma = 11{,}8$ для женщин, СССР, 1959 г.) и оценить «скрытые» частоты f_0. Так, для СССР оказалось, что

$$f_0 = \begin{cases} 11,7\ 1/\text{год (мужчины)}, \\ 14,4\ 1/\text{год (женщины)}. \end{cases}$$

Таким образом, частота нагрузок, воспринимаемых женщинами, в среднем на 23% выше, чем у мужчин. Качественно это согласуется с приводимыми в литературе данными о бóльшей подверженности женщин «стрессам» по сравнению с мужчинами. Так, указывается [17], что в заболеваниях (очевидно, регистрируемых) процент «стрессов» у мужчин 33%, а у женщин — 50%. Ближайшая перепись (1970 г.) позволит вскрыть динамику $f_0(t)$ и проверить ряд корреляционных гипотез, в частности о факторах моральных движений.

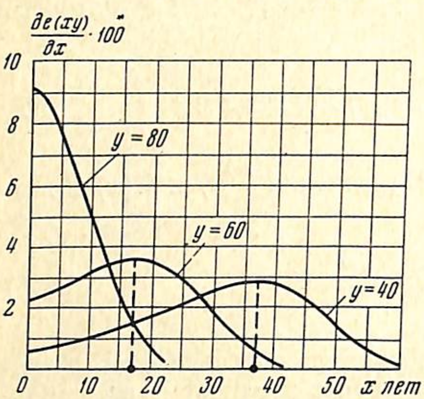

Рис. 3. Плотности распределения времени дожития мужского населения СССР: $a = 3{,}22 \cdot 10^{-4}$, $в = 7{,}06 \cdot 10^{-2}$ 1/год

Внедрение аналитических методов дает возможность охватить более широкий диапазон демографических явлений и обнаружить ряд существенных фактов, трудно выделяемых методами непосредственного счета. Приведем несколько аналитических результатов для области статистики смертности. С учетом (54) $l(x)$ описывается двойным экспоненциальным распределением

$$l(x) = \exp\left\{-\frac{a}{b}\Big[\exp(bx) - 1\Big]\right\}. \tag{58}$$

В соответствии с (58) функция дожития $l(x, y)$ в возрасте y определяется как [1]

$$l(x, y) = \frac{l(x+y)}{l(y)} = \exp\left\{-\frac{a}{b}\exp(by)\Big[\exp(bx) - 1\Big]\right\}. \tag{59}$$

Графики $-\frac{\partial}{\partial x} l(x, y)$ для $y = 40$, 60, 80 лет представлены на рис. 3 (СССР, 1959 г.). Плотности распределения времени дожития имеют довольно своеобразный вид, почти линейно возрастая до модального времени дожития и далее довольно круто убывая до нуля. Модальное время дожития $x_{\text{mod}}(y)$ оказывается линейно убывающим с возрастом y

$$x_{\text{mod}}(y) = y_* - y \qquad (y < y_*). \tag{60}$$

При этом $x_{\text{mod}}(y)$ существует лишь при $y < y_*$, где

$$y_* = \frac{1}{b}\ln\frac{b}{a} = \frac{1}{B}\left[1 + \frac{1}{\gamma}\ln\frac{\gamma B}{f_0}\right]. \tag{61}$$

Беря a и b из [1], получим для мужчин $y_* = 76{,}5$, а для женщин — 83,3 года (СССР, 1959 г.). Математическое ожидание остатка жизни в возрасте y получено в [1] и имеет вид

$$\langle x(y)\rangle = -\frac{1}{b}\exp\left[\frac{a}{b}\exp(by)\right] Ei\left[-\frac{a}{b}\exp(by)\right]. \tag{62}$$

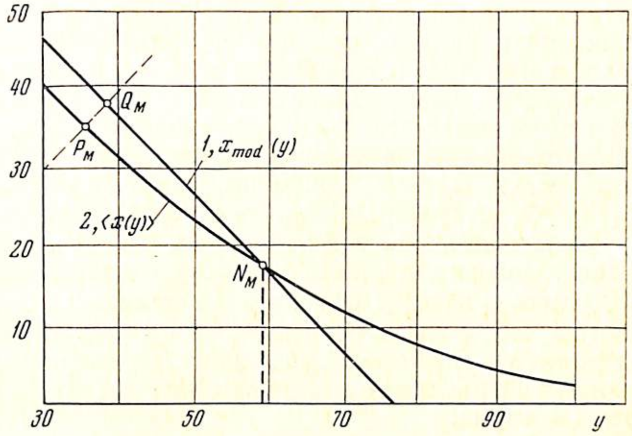

Рис. 4. *1* — зависимость модального времени дожития мужчин от возраста y; *2* — зависимость математического ожидания времени дожития мужчин от возраста y: $a = 3{,}22\cdot 10^{-4}$, $b = 7{,}06\cdot 10^{-2}$ 1/год

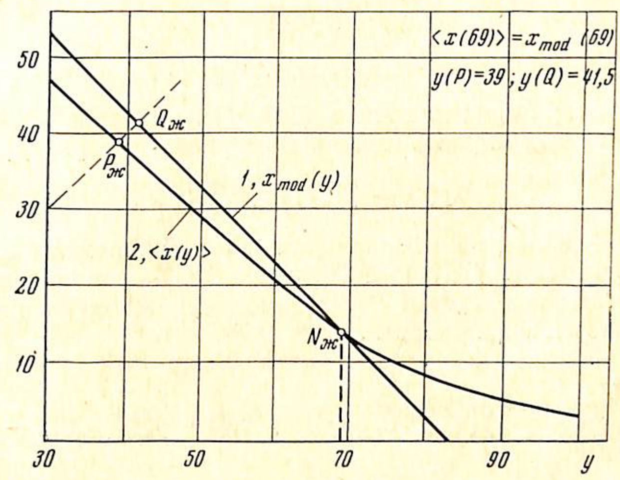

Рис. 5. *1* — зависимость модального времени дожития женщин от возраста y; *2* — зависимость математического ожидания времени дожития от возраста y: $a = 1{,}08\cdot 10^{-4}$, $b = 7{,}95\cdot 10^{-2}$ 1/год

Здесь $Ei(-x)$ — табличная интегральная показательная функция. Наиболее простой вид (62) принимает при $y = y_*$

$$\langle x(y_*)\rangle = \frac{0,595}{b}. \tag{63}$$

Для мужчин $\langle (y_*)\rangle = 8{,}3$, а для женщин — 7,5 года (СССР, 1959 г.). Вероятность позднего дожития $x(y_*) > \langle x(y_*)\rangle$ универсальна и равна 0,44. На рис. 4, 5 представлены графики $x_{\text{mod}}(y)$ и $\langle x(y)\rangle$, построенные по аналитическим формулам (60), (62). Точки P и Q — своеобразные меридианы, в которых $x_{\text{mod}}(y) = y$ и $\langle x(y)\rangle = y$. Отметим еще, что начиная с точки N (59 лет для мужчин, 69 — для женщин) $\langle x(y)\rangle > x_{\text{mod}}(y)$.

Информационный анализ характеристик смертности намечен в [11]. Изложенное дает, по нашему мнению, достаточно полное представление об аналитических возможностях прогноза демографических движений, анализа существующих закономерностей, демографической увязки ряда моральных движений в рамках «чистой» демографической статистики, сочетаемой с биофизическими и социальными моделями. Однако рассмотренные уравнения естественного движения не полны (не замкнуты) без учета уравнений экономического движения, один из измеримых и важных параметров которого душевой национальный доход.

Анализ фактических данных о динамике душевого национального дохода в СССР [18] $j(t)$ позволяет положить в основу сглаженных тенденций роста $j(t)$ (исключаются внутренние циклы с периодом порядка 4—5 лет, по-видимому, инвестиционного типа [3]) однопродуктовую модель типа Кобба — Дугласа [19, 20]. Однако мы постараемся детализировать ее в такой степени, чтобы иметь возможность: 1) прогнозировать ряд закономерностей демоэкономического движения; 2) выявлять оптимальные внутренние взаимозависимости такого движения в соответствии с тем или иным критерием оптимума.

Итак, введем «мгновенный» национальный душевой доход $j(t)$, равный отношению созданного в $[t, t+dt]$ дохода $Q(t)\,dt$ к суммарному времени жизни населения в $[t, t+dt]$, т. е. к $P(t)\,dt$,

$$j(t)=\frac{Q(t)}{P(t)}, \tag{64}$$

$$P(t)=N_{ж}(t)+N_{м}(t), \tag{65}$$

где $N_{ж}(t)$ и $N_{м}(t)$ определяются в (41), (42). Введем часовую производительность $q(t)$ для «производительного» населения $[T(t)]$. Тогда

$$Q(t)=[T(t)]\,q(t)\,\eta(t). \tag{66}$$

Здесь $\eta(t)$ — доля рабочего времени в общем времени жизни. Производительное население $[T(t)]<T(t)$, где $T(t)$ — контингент всех трудящихся, существенно меньший $P(t)$. Демографическая расшифровка $P(t)$, $T(t)$, $[T(t)]$ дается выражениями

$$P(t)=\int_0^\infty n_{ж}(t-y)\,[l_{ж}(y,0,t-y)+k_1(t-y)\,l_{м}(y,0,t-y)]\,dy, \tag{67}$$

$$T(t)=\int_0^\infty n_{ж}(t-y)\,[l_{ж}(y,0,t-y)\,\xi_{ж}(t,y)+$$
$$+k_1(t-y)\,l_{м}(y,0,t-y)\,\xi_{м}(t,y)]\,dy, \tag{68}$$

$$[T(t)]=\int_0^\infty n_{ж}(t-y)\,[l_{ж}(y,0,t-y)\,\xi_{ж}(t,y)\,\zeta_{ж}(t,y)+$$
$$+k_1(t-y)\,l_{м}(y,0,t-y)\,\xi_{м}(t,y)\,\zeta_{м}(t,y)]\,dy. \tag{69}$$

Здесь $\xi(t,y)$ — доля трудящихся возраста $[y, y+dy)$ ко всему населению этого возраста (для каждого пола), а $\zeta(t, y)$ — доля производительных работников возраста $(y, y+dy)$ ко всем работникам этого возраста (для каждого пола). Основные значимые величины $\xi(t, y)$ падают на существующие в момент t юридические трудовые интервалы (16—55 или 16—60 лет).

Введем функцию $\rho(t)$, определяющую долю производительного населения во всем населении

$$\rho(t)=\frac{[T(t)]}{P(t)}. \tag{70}$$

С учетом (67), (68) имеем для к.с.н. следующую асимптотику $\rho(t)$:

$$\rho(t)\sim(\mu_{1ж}+k_1\mu_{1м})^{-1}\left\{\int_0^\infty[l_ж(y)\xi_ж(t,y)\zeta_ж(t,y)+\right.$$
$$\left.+k_1l_м(y)\xi_м(t,y)\zeta_м(t,y)]\,dy\right\}. \tag{71}$$

В отношении функций $\xi(t,y)$ и $\zeta(t,y)$ мы воздержимся от гипотез. Тем не менее из (71) можно получить ряд двухсторонних оценок для $\rho(t)$, если задаться самыми общими границами для $\xi(t,y)$ и $\zeta(t,y)$.

Положим производительность $q(t)$ пропорциональной некоторой степени фондовооруженности $g(t)$

$$q(t)=a(t)g^\beta(t)=a(0)\alpha(t)g^\beta(t), \tag{72}$$

$$\alpha(t)=\frac{a(t)}{a(0)},\quad \alpha(0)=1, \tag{73}$$

$$g(t)=\frac{G(t)}{[T(t)]}, \tag{74}$$

где $G(t)$ — общий объем производственных фондов в момент t. Подставляя (72) в (66), найдем

$$Q(t)=a(0)\alpha(t)\eta(t)[T(t)]^{1-\beta}G^\beta(t). \tag{75}$$

Получили однородную функцию 1-го измерения по T и G, типа известной производственной функции Кобба — Дугласа.

Будем полагать, следуя Л. П. Горькову [21], приращение основных фондов $dG(t)$ в $[t,t+dt]$ пропорциональным национальному доходу $Q(t)dt$, причем коэффициент пропорциональности $\gamma(t)$ будем считать функцией времени t, что расширяет возможность управления процессом

$$dG(t)=\gamma(t)Q(t)\,dt,\qquad 0<\gamma(t)<1. \tag{76}$$

С учетом (75) получаем следующее дифференциальное уравнение динамики основных фондов

$$\frac{dG(t)}{dt}=a(0)\gamma(t)\alpha(t)\eta(t)[T(t)]^{1-\beta}G^\beta(t);\ G(0)=G_0>0. \tag{77}$$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем

$$G(t)=\begin{cases}G_0\exp\left[a(0)\int_0^t\alpha(x)\gamma(x)\eta(x)\,dx\right], & \beta=1,\\[2ex] \left[G_0^{1-\beta}+a(0)(1-\beta)\int_0^t\alpha(x)\gamma(x)\eta(x)[T(x)]^{1-\beta}dx\right]^{\frac{1}{1-\beta}}, & \beta\neq1.\end{cases} \tag{78}$$

Для развитых стран типично $\beta<1$, т. е. возрастание $G(t)$. Подставляя $G(t)$ в (75), находим скорость $Q(t)$ роста национального дохода и, следовательно, «мгновенный» душевой национальный доход $j(t)$ (64)

$$j(t)=a(0)\alpha(t)\eta(t)\rho(t)[T(t)]^{-\beta}\times$$
$$\times\left[G_0^{1-\beta}+a(0)(1-\beta)\int_0^t\alpha(x)\gamma(x)\eta(x)[T(x)]^{1-\beta}dx\right]^{\frac{\beta}{1-\beta}}. \tag{79}$$

Исследование динамики $j(t)$ данного выражения (не содержащего, правда, $\eta(t)$), дается в [22]. Здесь мы лишь затронем кратко очень трудный вопрос о критерии оптимума демоэкономического развития. Этот вопрос неизбежен, так как даже при фиксированных β динамика $j(t)$ неоднозначна ввиду возможности разного выбора «управляющих» функций $\gamma(t)$ (экономическая политика), $\rho(t)$ (демографическая и экономическая политика).

Представляется возможным в качестве первого приближения следующее построение целевой функции демоэкономического развития.

В интервале $(t, t+dt)$ «среднее благо» dC естественно полагать пропорциональным некоторой степени национального душевого дохода $[j(t)\,dt]^{\varepsilon_1}$ и некоторой степени $\{[\tilde{\eta}-\eta(t)]\,dt\}^{\varepsilon_2}$ не рабочего времени, содержащего в себе «свободное время»

$$dC = j(t)^{\varepsilon_1}[\tilde{\eta}-\eta(t)]^{\varepsilon_2}(dt)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}. \tag{80}$$

Здесь $\tilde{\eta}$ — доля суток за вычетом физиологической нормы (сон, еда и т. д.). $\tilde{\eta}$ близка к $^1/_2$.

Естественно полагать $0<\varepsilon_1<1$ и $0<\varepsilon_2<1$, так как ценность благ имеет даже тенденцию к насыщению с их увеличением. Формально наиболее целесообразно считать, что благо dC пропорционально отрезку времени жизни dt, что сразу дает $\varepsilon_1+\varepsilon_2=1$. Следовательно, окончательно

$$dC = j(t)^{\varepsilon}(\eta-\tilde{\eta}(t))^{1-\varepsilon}dt. \tag{81}$$

Суммарное благо в интервале $[t_1, t_2]$ представляется интегралом

$$C(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2} j(t)^{\varepsilon}[\tilde{\eta}-\eta(t)]^{1-\varepsilon}\,dt. \tag{82}$$

Интервал $[t_1, t_2]$ может выбираться, например, равным среднему времени дожития живущих в данный момент t_1.

Данная целевая функция $C(t_1, t_2)$ более общая и, по-видимому, более целесообразная, чем предлагаемая в [23] целевая функция, учитывающая только потребление. Важно также отметить, что $C(t_1, t_2)$ всегда максимизируется при тех или иных ограничениях. Например, можно полагать $\gamma(t)$ заданной, $\rho(t)$ — заданной и варьировать только $\eta(t)$. В общем случае возникают довольно сложные вариационные задачи, требующие применения ЭВМ или тех или иных приближенных методов. Однако это уже чисто техническая часть. Для наглядности полученного критерия оптимума найдем оптимальное η_0 в классе простейших кривых $\eta(t)=\mathrm{const}$ и весьма узкого интервала $[t_1, t_2]$, такого, что интеграл в (79) мал по сравнению с $G_0^{1-\beta}$. В этом случае оптимальное η_0 является точкой экстремума простой функции

$$\varphi(\eta) = \eta^{\varepsilon}(\tilde{\eta}-\eta)^{1-\varepsilon}. \tag{83}$$

Дифференцируя, находим оптимальное η_0

$$\eta_0 = \varepsilon\tilde{\eta}. \tag{84}$$

Можно показать, что это число $\varepsilon\tilde{\eta}$ в общем случае большого интервала $[t_1, t_2]$ является нижней границей оптимального η_0. Например, для $\varepsilon = {}^1/_2$ и $\tilde{\eta} = {}^1/_2$ имеем $\eta_0 \geqslant {}^1/_4$. Наибольшие трудности заключены в оценке «скрытого» в населении параметра ε. Для оценки ε требуются конкретно-социологические исследования в духе классической теории риска [24] и ее модификации [25]. Итак, демоэкономическая система описывается совместной системой уравнений (1), (2), (67) — (69) и (79) с обязательной детализацией функций выживания $l(x, 0, t)$ и фертильности $\varphi(y, t)$. По крайней мере эти функции зависят от двух параметров: душевого дохода $j(t)$ и территориальной плотности населения $p(t) = P(t)/S$, причем

$$\varphi(y,t) = \Phi[y, j(t), p(t)], \tag{85}$$

$$l(x, 0, t) = L[x, j(t), p(t)]. \tag{86}$$

Последние соотношения являются корреляционными и не отражают годичных случайных колебаний. Например, темп изменения общей рождаемости* в СССР (1951—1966 гг.) представляет реализацию случайного процесса (—7,5%, +6%) со смещением в область отрицательных значений (рис. 6).

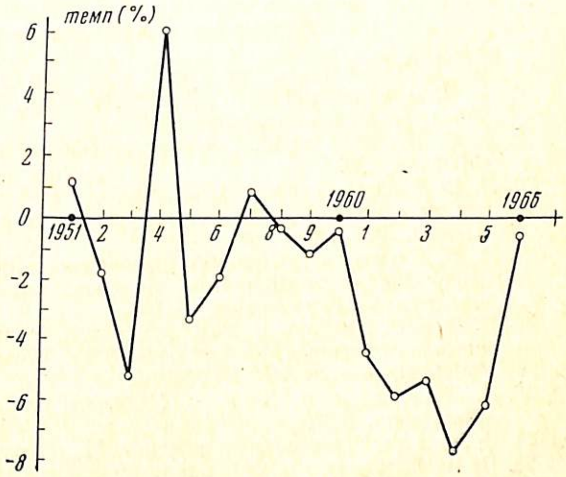

Рис. 6. Темпы изменения общей рождаемости (1951—1966 гг., СССР)

Специализация корреляционных соотношений (85), (86) очень трудна, хотя это уже «внутренние» трудности «замыкания» системы уравнений демоэкономической системы. В отношении влияния $j(t)$ известна гипотеза акад. С.Г. Струмилина, влияние $p(t)$, по-видимому, качественно согласуется с основаниями «логистической» кривой Ферхюльста — Пирла, но, конечно, динамика популяции $P(t)$, вытекающая из совместной системы демоэкономических уравнений, неизмеримо более сложна. Система демоэкономических уравнений допускает, по крайней мере, частичную оптимизацию (например, по критерию (82)), прогнозирование демоструктуры, включая медицинские и правовые аспекты существования населения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Шукайло. О некоторых общих математических вопросах теории надежности и демографической статистики. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 4.
2. M. Lopin. Note sur L'étude théorique de la population adulte. В кн. L. Buquet. L'optimum de population, 1956.
3. О. Ланге. Теория воспроизводства и накопления, М., Изд. иностр. лит., 1963.
4. Курс демографии под ред. А. Я. Боярского. М., «Статистика», 1967.
5. Р. Пресса. Народонаселение и его изучение. М., «Статистика», 1966.
6. А. Кесле. Социальная система и законы, ею управляющие. СПб., 1866.
7. Г. Майр. Законосообразности в общественной жизни. Тамбов, 1884.
8. Н. Н. Кондрашков. Природа и характер статистических закономерностей, изучаемых в криминологии. Сов. государство и право, 1966, № 11.
9. И. Б. Герцбах, Х. Б. Кордонский. Модели отказов. М., «Сов. радио», 1966.
10. Б. С. Сотсков. Физика отказов и определение интенсивности отказов. М., «Сов. радио», 1966.
11. В. Ф. Шукайло. О вероятностной модели одного класса отказов элементов технико-демографических систем. В сб. Материалы VIII конференции УЗПИ, Изд-во Харьковского гос. ун-та, 1968.

* $[n_ж(t) + n_м(t)]/P(t)$.

12. В. Ф. Шукайло. Классификация моделей «нагрузка — прочность» и обоснование типов функций распределения ресурса механических элементов. В сб. Проблемы надежности в строительной механике. Вильнюс, 1968.
13. В. Ф. Шукайло. О физическом обосновании и конструировании типов функций распределения в теории надежности. В сб. Труды семинара секции надежности совета по кибернетике АН СССР. М., «Сов. радио», 1970.
14. Б. Стреллер. Время, клетки, старение. М., «Мир», 1964.
15. Г. Селье. Очерки об адаптационном синдроме. М., Медгиз, 1960.
16. Н. Харват. Адаптация и стресс. Чехословацкое медицинское обозрение, 1964, XV.
17. Ю. П. Лисицын. Современные теории медицины. М., «Медицина», 1968.
18. А. И. Анчишкин, Ю. В. Яременко. Темпы и пропорции экономического развития. М., «Экономика», 1967.
19. В. Э. Шляпентох. Эконометрика и проблемы экономического роста. М., «Мысль», 1966.
20. Л. В. Канторович, А. Л. Вайнштейн. Об исчислении нормы эффективности на основе однопродуктовой модели развития хозяйства. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 5.
21. Л. И. Горьков. Однопродуктовая экономическая модель и анализ экономической эффективности капитальных вложений. В сб. Математический анализ расширенного воспроизводства, 1962.
22. В. Ф. Шукайло. О математических закономерностях взаимосвязи экономического и демографического роста. В сб. Демографические исследования. К., Изд-во Ин-та экономики АН УССР, 1970.
23. Я. Тинбэрхэн, Х. Бос. Математические модели экономического роста. М., «Прогресс», 1967.
24. О. Ланге. Оптимальные решения. М., «Прогресс», 1967.
25. В. Ф. Шукайло. К теории индивидуального и коллективного риска. В сб. Материалы VIII конференции УЗПИ. Изд-во Харьковск. гос. ун-та, 1968.

Поступила в редакцию
5.VIII.1968