

ОПТИМАЛЬНОЕ ДЕРЕВО ТРУБОПРОВОДНОЙ СИСТЕМЫ

О. А. НЕКРАСОВА, В. Я. ХАСИЛЕВ

(Москва)

Трубопроводные системы в городах и промышленных центрах служат для снабжения потребителей теплом, водой, газом и представляют собой сети, состоящие из множества соединенных участков и узлов. В зависимости от требуемой надежности системы сооружаются разветвленные сети, со схемой в форме дерева, и кольцевые, со схемой в форме частичного графа с циклами.

Под оптимальным деревом трубопроводной системы следует понимать ориентированный связный* граф без циклов, отвечающий оптимальному распределению потоков жидкости или газа между вершинами (потребителями и источниками), с заданными у них расходами и при их фиксированном расположении на плане. Общим критерием оптимальности здесь служит минимум суммарных приведенных затрат на сооружение и эксплуатацию системы трубопроводов, включая затраты электроэнергии на перекачку транспортируемой среды. Поскольку они зависят не только от протяженностей, но и от диаметров труб, т. е. от распределения нагрузок по отдельным потребителям, решение рассматриваемой задачи не равносильно поиску так называемого «кратчайшего дерева».

При оптимальном проектировании разветвленных сетей нахождение оптимального дерева соответствует решению задачи о наиболее выгодной трассировке сетей, которая на практике обычно решается на основе инженерного опыта и интуиции. Применение математических методов и ЭВМ для сложных систем обеспечивает заметный экономический эффект.

Для кольцевых сетей нахождение оптимального дерева соответствует решению известной задачи наиболее выгоднейшего потокораспределения.

Аналогичная задача формулировалась В. Г. Лобачевым для экономического расчета водопроводных сетей в 30-х годах [1] применительно к использованию метода Лагранжа. Однако отсутствие вычислительных средств и необходимой теории не позволило получить ее решение. Для условий ручного счета было предложено упрощение, заключающееся в выборе произвольного потокораспределения [1—4].

Пусть известна возможная схема (частичный граф) многоконтурной трубопроводной сети с нумерацией ветвей $i = 1, \dots, p$ (ребра), узлов $j = 1, \dots, q$ (вершины) и независимых контуров $c = 1, \dots, k$. Заданы длины ветвей l_i и расходы в узлах Q_j , а также необходимый набор удельных стоимостных показателей и гидравлических характеристик.

Приведенные затраты $Z = I + \sigma K$ руб/год, где K — капиталовложения в сеть и сопряженные с ней объекты; I — ежегодные издержки производства по сети и σ — нормативный коэффициент эффективности, могут быть выражены как функция искомых диаметров труб (d_i) и расхода энергии (ε) в источниках и подкачивающих подстанциях.

Предварительно принимая заданным значение расхода энергии в си-

* Условие связности соблюдается строго только при одном источнике питания.

стеме, решаем задачу на минимум капитальных вложений

$$K = F(d_1, \dots, d_p).$$

Такое предварительное предположение требует последующего выбора величины расхода энергии $\mathcal{E}$ для оптимизации параметров сети. Это условие в предлагаемом методе удовлетворяется на следующем этапе оптимизации при нахождении диаметров труб оптимального дерева [5]. Таким образом, предлагаемый метод состоит из двух этапов: выбора наимыгоднейшей конфигурации сети и определения оптимальных диаметров. Данная статья посвящена первому этапу.

Для получения целевой функции используются: а) стоимостная функция $W = f(d)$ руб/м, аппроксимирующая зависимость удельных капиталовложений от диаметров труб; б) зависимости гидравлики или газодинамики вида $\bar{d}_i = \varphi(x_i, h_i)$, где x_i — расходы в ветвях; h_i — напоры между началом и концом каждой ветви с давлениями P_j и P_{j+1} соответственно. Для несжимаемой жидкости $h_i \equiv P_j - P_{j+1}$, а для изотермических потоков сжимаемого газа $h_i \equiv P_j^2 - P_{j+1}^2$.

Таким образом, оптимальное потокораспределение отвечает минимуму нелинейного функционала

$$F(x_1, \dots, x_p, h_1, \dots, h_p) \quad (1)$$

при соблюдении первого и второго законов Кирхгофа

$$AX = Q, \quad (2)$$

$$Bh = BH, \quad (3)$$

$$x_i \geq 0, \quad h_i \geq 0.$$

Здесь X, h — искомые векторы-столбцы расхода и напора; H — вектор действующих напоров на активных ветвях (для пассивной цепи $H = 0$); Q — вектор заданных расходов потребителей и производительностей источников; $A = \{a_{ij}\}$, $a_{ij} \in \{+1, -1, 0\}$ — заданная схемой матрица инцидентий ветвей и узлов размерностью $p \times (q-1)$; $B = \{b_{ic}\}$, $b_{ic} \in \{+1, -1, 0\}$ — матрица инцидентий ветвей и независимых контуров размерностью $p \times k$ [6]. Рассмотрим свойства минимизируемого функционала. Капитальные затраты по сети представляются в виде

$$F = \sum_{i=1}^p l_i f_i(d_i),$$

где стоимостная функция для непрерывной модели выражается как обычно

$$f_i(d_i) = \begin{cases} a_i + b_i d_i^m, & d > 0, \quad m \geq 1; \\ 0, & d = 0 \end{cases}$$

Дискретность шкалы стандартных диаметров и отвечающих им показателей стоимости при необходимости может быть учтена позднее, после нахождения оптимальных расходов в ветвях дерева, при определении экономических диаметров разветвленной сети [5].

Зависимость диаметров от напоров и расходов для квадратичного закона гидравлического сопротивления ($h = sx^2$) выражается как *

$$d_i = \psi x_i^{2\alpha} h_i^{-\alpha} l_i^\alpha,$$

* Для сетей, характеризующихся течением жидкости в доквадратичной области гидравлического сопротивления ($h = sx^n$ при $n < 2$), может быть использована зависимость вида

$$d_i = \psi x_i^{n\alpha} h_i^{-n\alpha/2} l_i^\alpha,$$

что не изменит сущности предлагаемого метода оптимизации.

где ψ — параметр шероховатости труб; α — показатель, который в зависимости от принятой эмпирической формулы для коэффициента сопротивления трения имеет значение 0,18—0,2.

Рассмотрим минимизируемый функционал без учета постоянной составляющей капиталовложений. Принимая во внимание предыдущее, его можно представить в виде

$$F(X, h) = \sum_{i=1}^p \pi_i x_i^{2\alpha m} h_i^{-\alpha m}, \quad (4)$$

где $\pi_i = \psi^m b_i l_i^{1+\alpha m}$ — экономическая характеристика ветви.

Нетрудно видеть, что существует некоторое критическое значение показателя $m_{кр} = 1/2\alpha$ [2—4]. При $m > m_{кр}$ функция (4) выпукла по всем координатным направлениям, а при $m < m_{кр}$, что характерно для большинства практических случаев, функция выпукла по направлениям h_i и вогнута по направлениям x_i . В дальнейшем рассматривается именно этот случай.

Если найдены некоторые значения давлений в узлах P_j^0 (и, следовательно, h_i), соответствующие минимуму функционала (4) и ограничениям (3), то для нахождения искомых значений x_i^0 необходимо минимизировать вогнутый функционал $F(x, h^0)$ при линейных ограничениях (2).

Как известно, вогнутая функция достигает своего минимума в вершине выпуклого многогранника, определяемого системой линейных ограничений. В нашем случае вершиной многогранника является дерево графа, описываемого матрицей $A = \{a_{ij}\}$. Это видно из того, что при ранге матрицы A , равном $q - 1$, и при p неизвестных опорное решение содержит не менее $p - (q - 1)$ нулевых компонент, что равно числу хорд* избранной системы независимых контуров заданного графа. Следовательно, решение поставленной задачи должно находиться среди множества деревьев трубопроводной системы.

Далее используется свойство топологической структуры цепей как электрических, так и гидравлических, в силу которого в рассматриваемой задаче нелинейного программирования можно исключить из системы ограничений k линейных уравнений второго закона Кирхгофа и заменить их единственным уравнением (энергетического баланса) в виде билинейной формы

$$X^T h = \Theta. \quad (5)$$

Рассмотрим открытую трубопроводную систему с ненулевым вектором Q в правой части уравнения (2). Замкнем ее введением дополнительного зависимого узла и фиктивных ветвей с заданными расходами и получим активную цепь с нулевыми расходами в узлах.

Разбиение множества ветвей на два подмножества — хорды и ветви дерева — позволяет представить матрицу инцидентий ветвей и контуров в виде

$$B = \left[\begin{array}{c|c} E_x & B_d \end{array} \right],$$

где E_x — единичная матрица хорд размерностью $k \times k$; B_d — прямоугольная матрица совпадений ветвей дерева и независимых контуров размерностью $(q - 1) \times k$.

* Хорда — ветвь, принадлежащая не более чем одному независимому контуру; удалением хорды из схемы получаем дерево. Таким образом, каждому дереву отвечает своя система независимых контуров.

Соответственно этому разбиению векторы расхода, напора и действующего напора представим как

$$X = \begin{bmatrix} X_x \\ X_d \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_x \\ h_d \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_x \\ H_d \end{bmatrix}.$$

Используя приведенные обозначения, уравнение второго закона Кирхгофа (3) для активной цепи можно представить в виде

$$E_x h_x + B_d h_d = E_x H_x + B_d H_d. \quad (3')$$

Условия материального баланса, согласно первому закону Кирхгофа (2), для замкнутой цепи при $Q = 0$ выражаются уравнением [6]

$$X_d^T = X_x^T B_d. \quad (6)$$

Умножая обе части уравнения (3') на вектор-строку X_x^T слева, получим

$$X_x^T E_x h_x + X_x^T B_d h_d = X_x^T E_x H_x + X_x^T B_d H_d$$

и с учетом (6) имеем

$$X_x^T h_x + X_d^T h_d = X^T H = \Theta,$$

что совпадает с уравнением энергетического баланса (5). Следовательно, для замкнутой гидравлической цепи показано соответствие системы ограничений (2)–(3) системе ограничений (2)–(5). Таким же образом не трудно показать и обратное, т. е. эквивалентность систем (2)–(3) и (2)–(5). В основе излагаемого далее метода лежит использование системы ограничений материального и энергетического баланса (2)–(5). Задача формулируется следующим образом: найти минимум функционала (4) при ограничениях (2) и (5).

Рассмотрим задачу при $x_i = \text{const}$ и переменных напорах h_i . В этом случае перед нами задача на условный экстремум для функционала (4) и условий (5). Функция Лагранжа для нее

$$\Phi = F + \lambda \sum_{i=1}^p h_i x_i.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h_i} = \frac{\partial F}{\partial h_i} + \lambda x_i = -am \pi_i x_i^{2am} h_i^{-am-1} + \lambda x_i = 0. \quad (7)$$

Решая уравнения (7) относительно напоров, имеем

$$h_i = (am)^{\frac{1}{am+1}} \pi_i^{\frac{1}{am+1}} x_i^{\frac{2am-1}{am+1}} \lambda^{-\frac{1}{am+1}}.$$

Подставив выражение для h_i в (5), получим значение неопределенного множителя

$$\lambda^{-\frac{1}{am+1}} = \Theta (am)^{-\frac{1}{am+1}} \left[\sum_{i=1}^p \pi_i^{\frac{1}{am+1}} x_i^{\frac{3am}{am+1}} \right]^{-1}$$

и выражение для оптимальных напоров

$$h_i = \pi_i^{\frac{1}{am+1}} x_i^{\frac{2am-1}{am+1}} \Theta \left[\sum_{i=1}^p \pi_i^{\frac{1}{am+1}} x_i^{\frac{3am}{am+1}} \right]^{-1}.$$

Подставив полученное значение h_i в (4), имеем

$$F = \vartheta^{-am} \left[\sum_{i=1}^p \pi_i^{\frac{1}{am+1}} x_i^{\frac{3am}{am+1}} \right]^{1+am} \quad (8)$$

Минимум функционала (8) обеспечивается при достижении минимума выражения

$$F^* = \sum_{i=1}^p \pi_i^{\frac{1}{am+1}} x_i^{\frac{3am}{am+1}}. \quad (9)$$

Следовательно, есть возможность свести отыскание оптимального дерева трубопроводной системы к решению задачи нелинейного программирования: найти минимум F^* при ограничениях транспортного типа $AX = Q$, $x_i \geq 0$. При $0 < am < 1/2$, т. е. для характерных условий $m < m_{кр}$, эта задача имеет вогнутый функционал и является многоэкстремальной.

Когда значением постоянной составляющей капиталовложений нельзя пренебрегать, можно получить аналогичный вывод для минимизируемого функционала, рассматривая его на множестве ветвей Ω , у которых $d > 0$. В этом случае вместо функционала (4) имеем

$$F = \sum_{i \in \Omega} (a_i l_i + \pi_i x_i^{2am} h_i^{-am}) \quad (4')$$

и соответственно вместо выражения (9) минимизируемый функционал имеет вид

$$F^* = \left[\sum_{i \in \Omega} \pi_i^{\frac{1}{am+1}} x_i^{\frac{3am}{am+1}} \right]^{1+am} + \vartheta^{am} \sum_{i \in \Omega} a_i l_i. \quad (9')$$

Сравнивая выражения (9) и (9'), видим, что без учета постоянной составляющей выбор оптимального дерева инвариантен относительно энергии системы. Учет же постоянной составляющей, как следует из (9'), приводит к необходимости варьирования значения энергии системы при выборе оптимального дерева.

Для решения задачи был выбран метод перебора вершин, сходный с перебором, принятым для транспортной сетевой задачи, поскольку глобальный и все локальные минимумы вогнутого функционала находятся в вершинах выпуклого многогранника ограничений.

Алгоритм, реализованный на ЭВМ, позволяет находить несколько таких локальных минимумов. Дерево, соответствующее наименьшему из них, принимается за оптимальное.

Проведенные расчеты для многих кольцевых трубопроводных сетей показали, что значения функционала, существенно отличающиеся в пределах всего множества возможных деревьев, незначительно разнятся по абсолютной величине в точках локальных минимумов. Для просчитанных схем при 300—400 найденных локальных минимумах расхождение в значениях функционала не превышает 1,5—3%, что объясняется пологостью функционала в области глобального минимума. Это подтверждает эффективность использованного приближенного метода.

Алгоритм нахождения оптимального дерева состоит из нескольких итераций.

Каждая итерация начинается с построения дерева начального приближения (так называемый «опорный план» в транспортной задаче), удовлетворяющего заданным ограничениям материального баланса. Дерево

начального приближения находится методом, подобным построению опорного плана в сетевых транспортных задачах. Изменение нумерации вершин позволяет получать различные исходные планы. Таким образом, для решения описанной многоэкстремальной задачи используется модификация метода случайного поиска исходного приближения в сочетании с локальной оптимизацией.

Построенное дерево хранится в памяти машины в виде вектора с $q - 1$ компонентами вместе с соответствующим ему значением функционала F_0^* .

Затем выполняется процедура замены ветвей дерева хордами с целью уменьшения величины F_0^* : для каждой хорды строятся две цепочки из ветвей дерева таким образом, чтобы образовался замкнутый контур. Например, для хорды с началом и концом в узлах j_k и j_{k+1} строятся цепочки от этих узлов (пока не попадем в вершину дерева j_0) в виде последовательности $j_0j_1; j_1j_2; \dots j_kj_{k+1}; \dots; j_nj_0$. При замыкании контура одинаковые ветви отбрасываются. Далее каждая ветвь, вошедшая в этот замкнутый контур, замещается хордой j_kj_{k+1} путем вычитания расхода на этой ветви из расходов на всех прочих ветвях данного контура. Полученные расходы служат для вычисления нового значения F_1^* . Если $F_1^* < F_0^*$, переходим к этому новому дереву и процедура замены ветвей продолжается для него. Когда для одного дерева начального приближения все хорды просмотрены указанным способом, в памяти машины остается дерево с наименьшим значением F^* из всех рассмотренных вариантов.

На этом заканчивается итерация. Следующая итерация начинается построением нового дерева начального приближения и весь процесс повторяется для него.

В результате работы программы на печать выдается окончательный вариант дерева с наименьшим значением функционала из всех полученных минимумов, а также общее число всех просмотренных вариантов.

Программа, составленная для БЭСМ-2М, позволяет рассчитывать сети с числом узлов $q \leq 127$ и ветвей $p \leq 465$.

Программа на языке АЛГОЛ-60 дает возможность рассчитывать на БЭСМ-4 сети размерностью $3p + 22q \leq 2064$ [7].

Авторы выражают благодарность С. М. Мовшовичу за участие в обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Лобачев. Расчет замкнутых водопроводных сетей по экономическому принципу. М.—Л. ОНТИ. Глав. ред. строит. литературы, 1938.
2. Л. Ф. Мошин. Методы технико-экономического расчета водопроводных сетей. М., Стройиздат, 1950.
3. М. В. Кирсанов. Экономический расчет водопроводных сетей. М., Изд-во МНХ РСФСР, 1949.
4. Д. М. Минц. О технико-экономическом расчете водопроводных сетей. В сб. Академия Коммунального Хозяйства им. К. Д. Памфилова. Научные труды. Сообщения по коммунальной энергетике и водоснабжению. Вып. 5, 6. М., Изд-во МНХ РСФСР, 1951.
5. В. Я. Хасилев, А. П. Меренков, С. В. Сумароков. О выборе диаметров труб разветвленных тепловых сетей с использованием электронных вычислительных машин. Теплоэнергетика, 1966, № 6.
6. В. Я. Хасилев. Элементы теории гидравлических цепей. Изв. АН СССР, «Энергетика и транспорт», 1964, № 1.
7. О. А. Некрасова, С. В. Сумароков, В. Я. Хасилев. Выбор наивыгоднейшей трассировки трубопроводных систем. СЭИ СО АН СССР — ВИНТИ АН СССР, 1970, № 1488-70 ДЕП.

Поступила в редакцию
7 III 1969