ЭКОНОМИКА 1970
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ том VI, вып. 3

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАЗМЕРОВ ЗАКАЗОВ ТОРГУЮЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Д. И. ГОЛЕНКО, П. П. ВАСИЛЬЕВ, С. Е. КЛИМЕНКО

(Москва)

При управлении производственными процессами, процессами распределения запасов товаров на складах, а также процессами реализации товаров при розничной торговле необходимо принимать решения, обоснованные как качественными соображениями, так и количественными расчетами. Ставя перед собой задачу обоснования решений при управлении универсальным магазином, мы дадим качественное и количественное обоснование политике выбора размера заказываемой партии товаров.

Рассмотрим несколько задач, стоящих перед торгующей организацией — универсальным магазином.

1. Пусть универсальный магазин планирует реализовать p видов товаров на некоторую сумму, не превышающую величины S. Предположим, что заказываемые товары в магазине отсутствуют. Наличие же заказываемых товаров в магазине несущественно, поскольку размер оптимальной партии при наших предложениях не зависит от наличия данного товара в магазине перед заказом. Введем некоторый показатель l_i (i — индекс товара), характеризующий производительность универсального магазина. Если n_i — размер заказываемой партии i-го товара, а c_i — стоимость единицы этого товара, то

$$l_i = \alpha_i c_i n_i, \quad \alpha_i > 0, \tag{1}$$

где α_i — коэффициент, который может и не зависеть от индекса товара. Предположим, что удельные издержки универсального магазина выражаются величиной q, представляющей собою размер накладных расходов, приходящихся на единицу стоимости S_1 среднего уровня товаров, содержащихся в универсальном магазине, т. е.

$$q = \frac{Q(T)}{S_1 T}, \tag{2}$$

где $Q(T)$ — стоимость хранения товаров, расходы на текущий и капитальный ремонт помещений магазина, транспортные расходы, планируемые выплаты заработной платы и другие расходы универсального магазина за время T.

Предположим, что на основании изучения сбыта за прошлые периоды нам удалось оценить предполагаемый сбыт в единицу времени на период реализации товаров, т. е. $w_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Для более четкого представления оптимальной политики заказов предположим, что прогнозируемый сбыт каждого товара не зависит от времени, т. е. $w_i(t) = w_i$. В этих предположениях время реализации каждой партии n_i товара равно

$$t_i = \frac{n_i}{w_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{3}$$

Тогда от реализации партии n_i i-го товара прибыль универсального магазина составит величину

$$I_i = I(n_i) = \alpha_i c_i n_i - q\frac{c_i n_i^2}{2w_i}. \qquad (4)$$

Нетрудно видеть, что размер партии, дающей максимальную прибыль, равен

$$n_i^0 = \left[\frac{\alpha_i w_i}{q}\right] \quad \text{единиц}, \qquad (5)$$

где выражение в квадратных скобках означает взятие целого числа.

Реализация партии товаров, объем которой превышает значение $n_i^m = 2\alpha_i w_i / q$, является убыточной.

Таким образом, если универсальный магазин предполагает заказать такие количества товаров, которые обеспечивают безубыточную для него торговлю, то следует заказывать каждого товара на сумму, не превышающую $S_i^m = c_i n_i^m$, $i = 1, 2, \ldots, p$, а всего на сумму

$$S^m = \sum_{i=1}^{p} c_i n_i^m = \sum_{i=1}^{p} \frac{2\alpha_i c_i w_i}{q}. \qquad (6)$$

Реализация p видов товаров принесет прибыль

$$I = \sum_{i=1}^{p} I_i = \sum_{i=1} \left(\alpha_i c_i n_i - q\frac{c_i n_i^2}{2w_i}\right). \qquad (7)$$

В указанных предположениях задача сводится к нахождению наибольшего значения функции (7) при ограничении

$$\sum_{i=1}^{p} c_i n_i \leqslant S \leqslant S^m. \qquad (8)$$

Используя метод Лагранжа, находим решение задачи, минимизируя функционал

$$I_\lambda = \sum_{i=1}^{p} \left(\alpha_i c_i n_i - q\frac{c_i n_i^2}{2w}\right) - \lambda\left(S - \sum_{i=1}^{p} c_i n_i\right), \qquad (9)$$

где λ — множитель Лагранжа.

При $\alpha_i + \lambda > 0$ для любого $S < S^m$ по каждому товару будем иметь безубыточную реализацию. Положим $\alpha_i = \alpha$. Это предположение естественно, поскольку доход магазина от торговли, как правило, не зависит от того, какой товар в данный момент реализуется, а определяется лишь общей суммой реализации. Если это справедливо, то получаем систему $p + 1$ линейных уравнений

$$\alpha + \lambda - \frac{q n_k}{w_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, p, \qquad (10)$$

$$\sum_{k=1}^{p} c_k n_k - S = 0. \qquad (11)$$

Из соотношений (10)

$$n_k = \frac{\alpha + \lambda}{q} w_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, p. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), имеем

$$\lambda = \frac{Sq}{\sum_{i=1}^{p} c_i w_i} - \alpha. \tag{13}$$

Видно, что при любом $S \geqslant 0$ $\alpha + \lambda \geqslant 0$. Отсюда получаем решение задачи.

Объем партии заказываемых товаров равен

$$n_k^* = \left[\frac{S w_k}{\sum_{i=1}^{p} c_i w_i} \right] \leqslant n_k^m, \tag{14}$$

а стоимость заказываемых товаров будет

$$S^* = \sum_{k=1}^{p} S_k^* = \sum_{k=1}^{p} c_k n_k^*. \tag{15}$$

Прибыль от реализации p видов товаров в этом случае составит

$$I^* = \sum_{i=1}^{p} \left(\alpha c_i n_i^* - q \frac{c_i n_i^{*2}}{2 w_i} \right) = \alpha S^* - \frac{q S^{*2}}{2 \sum_{i=1}^{p} c_i w_i} = \left(\alpha - \frac{q S^*}{2 \sum_{i=1}^{p} c_i w_i} \right) S^*, \tag{16}$$

поскольку

$$n_k^* = \frac{S^* w_k}{\sum_{i=1}^{p} c_i w_i} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{p} c_i n_i^* = S^*.$$

2. Если спрос населения превышает возможности промышленности, то по ряду дефицитных товаров для каждой торгующей организации устанавливаются ограничения — лимиты, выражаемые соотношениями

$$n_i \leqslant N_i < n_i^m, \quad i = 1, 2, \ldots, m < p \tag{17}$$

(случай $m = p$ тривиальный).

Если вести, с точки зрения магазина, только безубыточную торговлю по каждому товару, то сумма реализации товаров не должна превышать

$$\overline{S^m} = \sum_{i=1}^{m} c_i N_i + \sum_{i=m+1}^{p} c_i n_i^m. \tag{18}$$

Алгоритм решения задачи в этом случае следующий.

Этап 1. По формуле (14) определяем

$$n_i^* = \left[\frac{Sw_i}{\sum_{j=1}^{p} c_j w_j}\right] \leqslant n_i^m. \tag{19}$$

Этап 2. Оцениваем

$$n_i^* = \min(n_i^*, N_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{20}$$

Этап 3. Вычисляем

$$S' = S - \sum_{i \in I(i:\, n_i^* = N_i)} c_i n_i^*,$$

после чего повторяем этапы 1, 2 до тех пор, пока не исчерпаем все множество I $(i\colon n_i^* \leqslant N_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Этап 4. Вычисляем $S'' = S - \sum_{i=1}^{m} c_i n_i^*$ и если $S'' < \sum_{i=m+1}^{p} c_i n_i^m$, то по формуле (14) определяем n_i^* для $i = m+1, \ldots, p$,

$$n_i^* = \left[\frac{S'' w_i}{\sum_{k=1}^{p} c_k w_k}\right] \leqslant n_i^m, \qquad i = m+1, \ldots\ p. \tag{21}$$

Если же $S'' \geqslant \sum_{i=m+1}^{p} c_i n_i^m$, то

$$n_k^{**} = \min(n_k^*, n_k^m), \quad i = m+1, m+2, \ldots, p. \tag{22}$$

3. Нередко имеют место ситуации, когда ограничения по дефицитным товарам не дают возможности универсальному магазину выполнить план реализации при условии безубыточной торговли каждым товаром. С целью выполнения плана реализации можно пойти на убыточную торговлю некоторыми товарами, сохраняя общую прибыль магазина. В этом случае размеры партий дефицитных товаров равны предельным, т. е.

$$n_i^* = N_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{23}$$

а размеры партий по остальным $p - m$ товарам не превышают

$$\bar{n}_i^* = \left[\frac{S^{**} w_i}{\sum_{i=m+1}^{p} c_i w_i}\right] < \frac{S^{**} w_i}{\sum_{i=m+1}^{p} c_i w_i}, \tag{24}$$

причем величина S^{**} определяется из условия равенства нулю полного дохода

$$I = I_m + I_{p-m} = \sum_{i=1}^{m}\left(\alpha c_i N_i - q\frac{c_i N_i^2}{2w_i}\right) +$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{p}\left(\alpha c_i n_i - q\frac{c_i n_i^2}{2w_i}\right) = I_m + \left(\alpha - \frac{q\widetilde{S}}{2\sum\limits_{i=m+1}^{p} c_i w_i}\right)\widetilde{S} = 0.$$

Обозначив $\omega_{m+1}^{p} = \sum\limits_{i=m+1}^{p} c_i w_i$, получаем

$$I_m + \alpha\widetilde{S} - \frac{q}{2\omega_{m+1}^{p}}\widetilde{S}^2 = 0,$$

отсюда

$$\widetilde{S}_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + (2qI_m/\omega_{m+1}^{p})}}{q/\omega_{m+1}^{p}}, \; S^{**} \leqslant \widetilde{S} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + (2qI_m/\omega_{m+1}^{p})}}{q/\omega_{m+1}^{p}}. \quad (25)$$

Если $I_m = 0$, то

$$S^{**} \leqslant \frac{(2\alpha/q)}{\omega_{m+1}^{p}} = 2\alpha/q \sum_{i=m+1}^{p} c_i w_i = \sum_{i=m+1}^{p} c_i n_i^m.$$

Таким образом, при условии, что $I \geqslant 0$, общий фонд реализации

$$S \leqslant \sum_{i=1}^{m} c_i N_i + S^{**}. \quad (26)$$

4. Рассмотрим случай, когда $\alpha_i \neq \alpha$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Теперь $\alpha_i c_i$ можно представить как разность между закупочной ценой c_{i_0} и продажной ценой c_{i1} на i-й товар, т. е.

$$\alpha_i c_i = \Delta c_i = c_{i1} - c_{i0}. \quad (27)$$

Задача максимизации общей прибыли I_λ (9) при ограничении (8) получается как решение системы уравнений

$$I_\lambda(n_1, \ldots, n_p) = \sum_{i=1}^{p}\left(\Delta c_i n_i - q\frac{c_{i0}}{2w_i} n_i^2\right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{p} c_{i0} n_i - S\right), \quad (28)$$

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial n_k} = \Delta c_k - \frac{q c_{k0}}{w_k} n_k - \lambda c_{k0} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \quad (29)$$

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{p} c_{i0} n_i - S = 0. \quad (30)$$

Из уравнений (29) уже сейчас можно сделать вывод: так как $\lambda \geqslant 0$, то $\Delta c_k - \frac{q c_{k0}}{w_k} n_k \geqslant 0$ или $\Delta c_k w_k \geqslant q c_{k0} n_k$, т. е. прибыль от ежедневной продажи должна превышать накладные расходы в первый день продажи k-го товара. Из (29)

$$n_k = \frac{(-\lambda c_{k0} + \Delta c_k) w_k}{q c_{k0}}. \tag{31}$$

Из (30) с учетом (31) получаем

$$\lambda = \frac{-Sq + \sum_{i=1}^{p} \Delta c_i w_i}{\sum_{i=1}^{p} c_{i0} w_i}. \tag{32}$$

Тогда объем и стоимость поставки k-го товара равны

$$n_k^* = \frac{S w_k}{\sum_{i=1}^{p} c_{i0} w_i} - \frac{w_k \sum_{i=1}^{p} \Delta c_i w_i}{q \sum_{i=1}^{p} c_{i0} w_i} + \frac{\Delta c_k w_k}{q c_{k0}}, \tag{33}$$

$$S_k^* = n_k^* c_{k0}. \tag{34}$$

В данной модели нетрудно учесть наличие запасов по каждому из закупаемых товаров в размере d_i. Обозначив $V_i = n_i + d_i$ и проделав все необходимые выкладки, получим

$$n_k^* = \frac{S w_k}{\sum_{i=1}^{p} c_{i0} w_i} - \frac{w_k \sum_{i=1}^{p} \Delta c_i w_i}{q \sum_{i=1}^{p} c_{i0} w_i} + \frac{\Delta c_k w_k}{q \sum_{i=1}^{p} c_{i0} w_i} + \frac{\sum_{i=1}^{p} c_{i0} d_i}{\sum_{i=1}^{p} c_{i0} w_i} - d_k. \tag{35}$$

К сожалению, формула (33) гарантирует положительные решения лишь при достаточно больших S. Кроме того, на размеры закупаемых партий могут быть наложены ограничения. Ниже мы покажем, как пользоваться формулой (33) с учетом положительности решения. Для дальнейшего целесообразнее, сделав замену переменных, перейти от размеров партий к их стоимости. Тогда получим задачу: найти $\max I = I(s_1, \ldots$

$$\ldots, s_p) = \sum_{i=1}^{p} \left(y_i^0 s_i - \frac{y_i^1}{2} s_i^2 \right) = \sum_{i=1}^{p} I_i(s_i) \quad \text{при} \quad \text{ограничениях} \sum_{i=1}^{p} s_i \leqslant S,$$

$$0 \leqslant s_i \leqslant r_i, \quad \text{где } s_i = n_i c_{i0}, \quad y_i^0 = \frac{\Delta c_i}{c_{i0}}, \quad y_i^1 = \frac{q}{c_{i0} 2 w_i}.$$

Будем считать, что $s_i \leqslant s_i^0$, поскольку если $s_i > s_i^0$, то $I_i(s_i) < I_i(s_i^0)$; $s_i^0 = n_i^0 c_{i0}$.

Пусть $S^*(s_1^*, \ldots, s_p^*)$ — решение задачи $\max\limits_{\substack{\sum_{i=1}^{p} s_i \leqslant S \\ 0 \leqslant s_i \leqslant r_i}} I(s_1, \ldots, s_p)$,

$$I(s_1, \ldots, s_p) = \sum_{i=1}^{p} \left(y_i^0 s_i - \frac{y_i^1}{2} s_i^2 \right) = \sum_{i=1}^{p} I_i(s_i) \qquad (36)$$

и пусть также известно, что $s_i^* \geqslant \Delta s_i$. Тогда $s_i^* = \Delta s_i + s_i^{**}$, где $S^{**}(s_1^{**}, \ldots, s_p^{**})$ — решение задачи

$$\max I(s_1, s_2, \ldots, s_p) = \sum_{i=1}^{p} \left[(y_i^0 - y_i^1 \Delta s_i) s_i - \frac{y_i^1}{2} s_i^2 \right],$$

$$\sum_{i=1}^{p} s_i < S - \sum_{i=1}^{p} \Delta S_i,$$

$$0 \leqslant s_i \leqslant r_i - \Delta s_i.$$

Заметим, что если $r_i = 0$, то $s_i^* = 0$, поэтому переменные, для которых, $r_i = 0$, автоматически исключаются из (36).

Утверждение 1.

Если $y^0 = y_1^0 = y_2^0 \ldots = y_k^0 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \{y_i^0\}$,

$$\text{то } s_i^* \geqslant \frac{\Delta S}{y_i^1 \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{y_j^1}} = \Delta s_i, \quad \text{где } 1 \leqslant i \leqslant k,$$

$$0 \leqslant \Delta S \leqslant \min \left\{ S, \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \left(r_i y_i^1 \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{y_j^1} \right), \min_{i=k+1, \ldots, p} (y^0 - y_i^2) \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{y_j^0} \right\}. \qquad (37)$$

Доказательство проведем для максимального ΔS, удовлетворяющего неравенству (36).

Пусть существует такое l $(1 \leqslant l \leqslant k)$, что $s_l^* \leqslant \Delta s_l$. Тогда всегда существует такое j $(1 \leqslant j \leqslant p)$, что

$$y_j^0 - y_j^1 s_j^* < y_l^0 - y_l^1 s_l^*. \qquad (38)$$

Действительно, поскольку $y_l^0 - y_l^1 s_l^* > y_l^0 - y_l^1 \Delta s_l$, то из (37) следует, что для любого $s_i^* > 0$, $i = k+1, \ldots, p$, неравенство (38) справедливо. Пусть $s_i^* = 0$, $i = k+1, \ldots, p$. Тогда, если (38) несправедливо для всех $1 \leqslant i \leqslant k$, то

$$y^0 - y_i^1 s_i^* > y^0 - y_l^1 s_l \quad \text{или} \quad y_i^1 s_i^* \leqslant y_l^1 s_l^*,$$

$$s_i^* \leqslant \frac{y_l^1}{y_i^1} s_l^* < \frac{y_l^1}{y_i^1} \Delta s_l = \frac{y_l^1 \Delta S}{y_i^1 \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{y_i^1}} = \Delta s_i,$$

т. е.

$$s_i^* < \Delta s_i. \qquad (39)$$

Но так как $\Delta s_i \geqslant 0$, то из (37) и (39) следует, что $I_i(s_i^*) < I_i(\Delta s_i)$, т. е. $I(s_1^*, \ldots, s_p^*) < I(\Delta s_1, \ldots, \Delta s_p)$, что противоречит тому, что S^* — решение.

Итак, существование j со свойством (38) установлено.

Уменьшим s_j^* на δs, а s_l^* увеличим на δs. Тогда функционная $I(s_1, \ldots, s_p)$ увеличится. Поскольку при достаточно малых δs $\delta I_l > \delta I_j$, то $y_l^0 - y_l^1 s_l^* > y_j^0 - y_j^1 s_j^*$. Но увеличение функционала противоречит тому, что $s_1^*, \ldots, s_p^*$ — решение задачи.

Итак, мы видим, что решение задачи $S^*(s_1^*, \ldots, s_p^*)$ складывается из конечной последовательности этапов, на каждом из которых необходимо определить $\Delta s_i = \dfrac{\Delta S}{y_i^1 \sum\limits_{i=1} 1/y_i^1}$.

Переход к следующему этапу осуществляется заменой S на $S - \sum\limits_{i=1} \Delta s_i$, r_i на $r_i - \Delta s_i$, y_i^0 на $y_i^0 - y_i^1 \Delta s_i$, и тогда решение $S^*(s_1^*, \ldots, s_p^*)$ получается в процессе накопления Δs_i по всем этапам. Будем называть этот метод решения методом последовательного распределения.

Ниже приводим алгоритмическую запись решения. Исходные данные: y_i^0; y_i^1, r_i, S, $i = 1, 2, \ldots, p$. Начало

$$s_i^* = :0; \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

А) Если $r_i = 0$ для всех i, то выход

$$j \in I \text{ если } y_j^0 = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ r_i \geqslant 0}} \{y_i^0\},$$

$$\Delta S = :\min\left\{S; \min_{i \in I}\left(r_i y_i^1 \sum_{i \in I} \frac{1}{y_i^1}\right); \quad \max_{\substack{i \notin I \\ r_i \geqslant 0}} (y^0{}_j - y_i^0) \sum_{i \notin I} \frac{1}{y_i^0}\right\}.$$

Б) Если $\Delta S = 0$, выход

$$\Delta s_i = \frac{\Delta S}{y_i^1 \sum\limits_{i \in I} \dfrac{1}{y_i^1}}; \quad i \in I,$$

$$s_i^* = :s_i^* + \Delta s_i; \quad i \in I,$$
$$y_i^0 = :y_i^0 - y_i^1 \Delta s_i; \quad i \in I,$$
$$S = :S - \Delta S,$$
$$r_i = :r_i - \Delta s_i; \quad i \in I,$$

то надо перейти на A.

В дальнейшем нам понадобится следующее

Следствие: если $S^1(s_1^1, s_2^1, \ldots, s_p^1)$ — решение задачи $\max\limits_{\sum_{i=1}^{p} s_i \leqslant S,\ 0 \leqslant s_i \leqslant r_i} I(s_1, \ldots, s_p)$ при $S = S^1$, а $S^2(s_1^2, \ldots, s_p^2)$ при $S = S^2$ и $S^1 \leqslant S^2$, то $s_i^1 \leqslant s_i^2$. Будем называть задачей 2 задачу определения $\max\limits_{0 \leqslant s_i \leqslant s_i^0,\ \sum_{i=1}^{p} s_i \leqslant S} I(s_1, \ldots, s_p)$. Будем называть задачей 3 задачу определения $\max\limits_{0 \leqslant s_i \leqslant r_i\ \sum_{i=1}^{p} s_i \leqslant S.} I(s_1, \ldots, s_p)$.

Утверждение 2. Если $S^2(s_1^2, \ldots, s_p^2)$ — решение задачи 2, а $S^3(s_1^3, \ldots, s_p^3)$ — решение задачи 3 и $s_1^2 \geqslant r_1, \ldots, s_k^2 \geqslant r_k$, то $s_1^3 = r_1$, $s_2^3 = r_2, \ldots, s_k^3 = r_k$.

Пусть на некотором этапе распределения средств в первый раз достигнуто ограничение $s_k^3 = r_k$. До этого момента распределение средств в задачах 2 и 3 совпадало. Что будет после него?

Для задачи 2 возможно средства будут вкладываться и в k-ю партию, в задаче 3 в k-ю партию средства вкладываться не будут, но схема распределения средств по оставшимся партиям будет такой же, как и в задаче 2, с той лишь разницей, что в задаче 2 по этим партиям распределится меньше средств, чем во второй. Поэтому, коль скоро для задачи 2 наступит момент, когда для некоторого l $s_l^2 = r_l$, то для задачи 3 этот момент наступит еще раньше.

Проводя подобные рассуждения для оставшихся ограничений, получим требуемый результат.

Из утверждения 2 следует, что для решения задачи 3 с наиболее общими ограничениями достаточно уметь решать задачу 2. Действительно, если $s_1^2 \geqslant r_1, \ldots, s_1^k \geqslant r_k$, то $s_1^3 = r_1, \ldots, s_k^3 = r_k$, а оставшиеся неизвестные $s_{k+1}^3, \ldots, s_p^3$ определяются при решении задачи

$$\max_{\sum\limits_{i=k+1}^{p} s_i \leqslant S - \sum\limits_{i=1}^{p} r_i,\ 0 \leqslant s_i \leqslant r_i} I(s_{k+1}, \ldots, s_p).$$ Ясно, что если $s_i^2 \leqslant r_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$, то $s_i^2 = s_i^3$.

Итак, необходимо уметь решать задачу 2. Для этого понадобится следующее.

Утверждение 3.

Если $S^1(s_1^1, \ldots, s_p^1)$ — решение задачи $\max\limits_{\sum\limits_{i=1}^{p} s_i \leqslant S} I(s_1, \ldots, s_p) + I^1$, а $S^2(s_1^2, \ldots, s_p^2)$ — решение задачи $\max\limits_{\sum\limits_{i=1}^{p} s_i \leqslant S,\ 0 \leqslant s_i \leqslant s_i^0} I(s_1, \ldots, s_p) = I^2$ и $s_i^1 < 0, \ldots, s_k^1 < 0$, то $s_1^2 = s_2^2 = \cdots = s_k^2 = 0$.

Доказательство. Рассмотрим вектор $\bar{S}\{0, 0 \ldots 0, s'_{k+1}, \ldots, s_p'\}$. Докажем, что $\bar{S}$ является решением задачи

$$\max_{\sum\limits_{1}^{p} s_i \leqslant S + \sum\limits_{i=1}^{k} |s_i|,\ s_i \geqslant 0} I(s_1, \ldots, s_p) = I^0 \tag{40}$$

$$I(\bar{S}) = I^1 + |I_1(s_1')| + \ldots + |I_k(s_k')|.$$

Пусть $I^0 > I(\bar{S})$ и $S^*\{s_1^*, \ldots, s_p^*\} s_i \geqslant 0$; $I^0 = I(s^*)$,

$$\sum_{i=1}^{p} s_i^* \leqslant S - \sum_{i=1}^{k} |s_i|.$$

Рассмотрим вектор

$$S^{**}\{s_1^* - |s_1'|, \ldots, s_k^* - |s_k'|, s_{k+1}^*, \ldots, s_p^*\}, \quad \sum_{i=1}^{p} s_i^{**} \leqslant S,$$

$$I(S^{**}) = I(S^*) - I_1^1 - \ldots - I_k^1,$$

$$I_i^1 \leqslant |I_i(s_i)|, \tag{41}$$

$$I(S^*) = I^0 > I(\bar{S}), \tag{42}$$
$$I^0 = I(S^*) = I(S^{**}) + I_1{}^1 + \ldots + I_k{}^1,$$
$$I(\bar{S}) = I^1 + |I_1(s_1)| + \ldots + |I_k(s_k)|.$$

Учитывая (41), (42) и $I(S^*) > I(\bar{S})$, получим $I(S^{**}) > I^1$, что невозможно, так как I^1 — решение задачи 1.

Итак $S(0, 0 \ldots 0, s'_{k+1}, \ldots, s_p')$ — решение задачи $\max\limits_{\substack{\sum_{i=1}^{p} s_i \leqslant S + \sum_{i=1}^{k} |s_i| \\ 0 \leqslant s_i}} I(s_1, \ldots, s_p)$

так как $S \leqslant S + \sum\limits_{i=1}^{k} |s_i|$, то ввиду следствия 1 $0 \leqslant s_i{}^2 \leqslant s^0_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$; т. е. $s_i^2 = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Утверждение 3 доказано.

Итак, чтобы решить задачу 2 $\max\limits_{\sum_{i=1}^{p} s_i \leqslant S,\ s_i \geqslant 0} I(s_1, \ldots, s_p)$, необходимо получить решение $S^1(s_1{}^1, \ldots, s_p{}^1)$ задачи 1 $\max\limits_{\sum_{i=1}^{p} s_i \leqslant S} I(s_1, \ldots, s_p)$ согласно формулам (35). Если $s_i{}^1 \geqslant 0$, то принимаем $s_i{}^2 = s_i{}^1$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Если же $s_i{}^1 < 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то принимаем $s_i{}^2 = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, а остальные компоненты решения $s^2{}_{k+1}, \ldots, s_p{}^2$ находим, решая задачу $\max\limits_{\sum_{i=k+1}^{p} s_i \leqslant S,\ 0 \leqslant s_i} I(s_1, \ldots, s_p)$.

Поступила в редакцию
20 III 1968