8. В. Тшецяковский. Модель текущей оптимизации внешней торговли и ее применение. Внешняя торговля, 1964, № 6.
9. Д. Стоянов. Възможности за приложение на някои математически методи във външнотърговските изследования. Външна търговия, 1964, № 10.
10. G. Grote, D. Schulmeister. Probleme der Planung des Aussenhandels im Sozialismus. Aussenhandel, 1967, N 11.

Поступила в редакцию
10 I 1969

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В. М. ЕФИМОВ

(Москва)

Заметка посвящена изучению свойств оптимальных оценок двухэтапной задачи линейного стохастического программирования [1, 2]. Результаты изучения позволяют назвать эти оценки ценами оптимального плана.

1. ТЕОРЕМА РАВНОВЕСИЯ

Пусть отрасль, состоящая из N предприятий, выпускает m видов продукции; b — m-мерный вектор, характеризующий спрос на продукцию, выпускаемую отраслью; j-е предприятие выпускает продукцию (необязательно всех m видов) при помощи r_j технологических способов, которые собраны в матрицу A_j размерности $m \times r_j$; x_j — r_j-мерный вектор интенсивностей использования технологических способов на j-м предприятии; c_j — r_j-мерный вектор, компоненты которого характеризуют издержки от эксплуатации технологических способов с единичной интенсивностью; X_j — множество допустимых интенсивностей (оно предполагается выпуклым, замкнутым) на j-м предприятии (ограниченность основных фондов и т. д.). Элементы матрицы A_j и векторов b и c_j нам заранее точно не известны (действительно, нормы потребления и выпуска (элементы матриц A_j) подвержены стохастическим колебаниям, издержки от эксплуатации технологических способов в связи с этим также стохастически колеблются, а спрос на продукцию такой отрасли, как швейная, да и многих других также случаен). Предполагается, что вероятностное распределение этих случайных параметров объективно существует.

Отраслевой план $x = (x_1, \ldots, x_N)$, его размерность равна $n = \sum_{j=1}^{N} r_j$, приходится принимать до реализации случайных величин. Поэтому после того, как допустимый план $x_j \in X_j$ принят и случайные параметры реализовались, мы, вообще говоря, получим дисбаланс $z = b - \sum_{j=1}^{N} A_j x_j$. По одним продуктам, выпускаемым отраслью, будет дефицит ($z_i > 0$), по другим — перепроизводство ($z_i < 0$). Перепроизводство влечет за собой дополнительные потери от хранения нереализованной продукции или ее продажи по сниженным ценам, недопроизводство также нежелательно для отрасли, так как влечет за собой снижение ее реализованной продукции и, следовательно, уменьшение отчислений во всевозможные поощрительные фонды *. Пусть потери от недопроизводства единиц продукции характеризуются m-мерным вектором q^1, а от перепроизводства — m-мерным вектором q^2. После того как план $x = (x_1, \ldots, x_N)$ принят и случайные параметры реализовались, отрасль минимизирует свои потери по ликвидации невязки. Решаем следующую задачу линейного программирования

$$(q^1, y^1) + (q^2, y^2) \to \min, \tag{1}$$

$$y^1 - y^2 = b - \sum_{j=1}^{N} A_j x_j, \tag{2}$$

$$y^1 \geqslant 0; \quad y^2 \geqslant 0. \tag{3}$$

---

* Предполагается, что отраслевое министерство работает на хозрасчете.

Если критерием оптимальности для отрасли будет минимизация математического ожидания общеотраслевых издержек, то отраслевая задача примет вид

$$M\sum_{j=1}^{N}(c_j,\ x_j)+M\,\{\min[(q^1,\ y^1)+(q^2,\ y^2)]\}\to\min, \tag{4}$$

$$y^1-y^2=b-\sum_{j=1}^{N}A_jx_j, \tag{5}$$

$$y^1\geqslant 0;\qquad y^2\geqslant 0, \tag{6}$$

$$x_j\in X_j,\quad j=1,\ldots,N. \tag{7}$$

Во второй части выражения (4) под знаком математического ожидания M стоит оптимальное значение целевого функционала задачи (1) — (3) при фиксированных b, A_j и x_j.

Сведем (4) — (7) к детерминированной задаче. Двойственная задача к (1) — (3) имеет вид

$$\left(\pi,\ b-\sum_{j=1}^{N}A_jx_j\right)\to\max, \tag{8}$$

$$-q^2\leqslant\pi\leqslant q^1. \tag{9}$$

Обозначим матрицу $[A_1,\ldots,A_N]$ через A. Оптимальное решение (8), (9), зависящее от случайных b, A и x при фиксированных b, A и x, обозначим через $\pi(x,\ A,\ b)$. Тогда по теореме двойственности линейного программирования $\pi(x,\ A,\ b)\left(b-\sum_{j=1}^{N}A_jx_j\right)$ есть оптимальное значение целевого функционала задачи (1) — (3) при фиксированных x, A, b и (4) — (7) имеет в качестве эквивалентной детерминированной задачу

$$M\sum_{j=1}^{N}(c_j,\ x_j)+M\left[\pi(x,\ A,\ b)\left(b-\sum_{j=1}^{N}A_jx_j\right)\right]\to\min, \tag{10}$$

$$x_j\in X_j,\qquad j=1,\ldots,N. \tag{11}$$

Функционал (10) является выпуклым вниз (см. [2]) и, следовательно, (10), (11) есть задача выпуклого программирования. Если вероятностная мера абсолютно непрерывна *, то (см. [2]) (10) — непрерывно дифференцируемый по x функционал и его градиент в точке x имеет вид

$$(M(c_1-\pi(x,\ A,\ b)A_1),\ldots,\ M(c_N-\pi(x,\ A,\ b)A_N)). \tag{12}$$

Пусть $x^*=(x_1^*,\ldots,\ x_N^*)$ — оптимальный план отрасли. В задаче выпуклого программирования целевой выпуклый функционал можно заменить линейным, направляющий вектор которого совпадает с градиентом целевого функционала в точке оптимума, при этом по крайней мере одно из решений задачи с линейным целевым функционалом будет совпадать с решением первоначальной задачи, т. е. задача (10), (11) эквивалентна в указанном выше смысле следующей:

$$\sum_{j=1}^{N}(M(c_j-\pi(x^*,\ A,\ b)A_j),\ x_j)\to\min, \tag{13}$$

$$x_j\in X_j,\qquad j=1,\ldots,N. \tag{14}$$

---

* Это предположение не очень обременительно, так как этому условию удовлетворяют вероятностные меры, введенные дифференцируемыми функциями распределения.

Перепишем (13)

$$\sum_{j=1}^{N}[((M\pi(x^*, A, b)A^j - b_j), x_j)] \to \max. \qquad (13')$$

Задача (13′), (14) разбивается на N независимых задач

$$(M(\pi(x^*, A, b)A_j - c_j), x_j) \to \max, \qquad (15)$$

$$x_j \in X_j, \quad j = 1, \ldots, N. \qquad (16)$$

Теорема 1. Если критерием оптимальности для предприятий отрасли, описываемой моделью (4) — (7), будет максимизация математического ожидания прибыли, то существуют такие цены $\pi(x^*, A, b)$ * на продукцию, выпускаемую отраслью, что план, оптимальный с точки зрения предприятий (оптимальное решение задач (15), (16)), автоматически является оптимальным для отрасли (минимизирует математическое ожидание общеотраслевых издержек) **.

Теорему 1 можно назвать теоремой равновесия, она является стохастическим обобщением аналогичной теоремы для детерминированной отраслевой модели [3, гл. III, § 5].

Основной вывод из теоремы 1 следующий: в условиях неопределенности существует принципиальная возможность децентрализованного управления, при этом роль равновесных цен играют компоненты вектора $\pi(x^*, A, b)$, что является решением (8), (9) при $x = x^*$.

Если статистические характеристики случайных величин отраслевому руководству известны и известно x^*, то направляющий вектор линейного целевого функционала (15) можно приближенно подсчитать, используя метод Монте-Карло. i-я компонента этого вектора показывает среднюю прибыльность или среднюю убыточность (в зависимости от знака) эксплуатации i-го технологического способа с единичной интенсивностью.

Если x^* и статистические характеристики случайных величин отраслевому руководству неизвестны, то для децентрализованного управления отраслью можно применить адаптивный подход, используя метод из [4]. В этом случае оптимизация происходит так же, как и при декомпозиционных методах для детерминированных задач, только в детерминированном случае прибыльность способа является детерминированной величиной и зависит исключительно от оценки. В стохастическом случае прибыльность — случайная величина и зависит как от случайной оценки, так и от реализации случайных параметров задачи. По-видимому, из-за недостаточно быстрой сходимости итеративных методов оптимизация модели (4) — (7) по методу [4] в реальном масштабе времени не будет эффективной. Если распределение случайных величин задачи известно, то оптимизацию можно производить проигрыванием на ЭВМ, используя метод из [4].

2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОЦЕНОК ДВУХЭТАПНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим более общую стохастическую модель производственного планирования

$$M(c, x) + M\{\min (q, q)\} \to \min, \qquad (17)$$

$$Wy = b - Ax, \qquad (18)$$

$$y \geqslant 0, \qquad (19)$$

$$x \in X. \qquad (20)$$

Как и прежде, c, b, A случайны, а q и W детерминированы. Экономический смысл их тот же, что и раньше, только W необязательно имеет вид, как в разд. 1 $(I, -I)$, где I — единичная матрица $m \times m$, а может быть произвольной полной (см. [2]) матрицей размерности $m \times l$. Неувязка ликвидируется при помощи аварийных технологических способов, которые собраны в матрицу W, y — интенсивности использования этих аварийных технологических способов ***.

Для (17) — (20) задача (8), (9) имеет вид

$$(\pi, b - Ax) \to \max, \qquad (21)$$

$$\pi W \leqslant q. \qquad (22)$$

Пусть случайные колебания спроса несколько изменились, а именно балансовое уравнение (18) заменяем на

$$Wy = b + \Delta b - Ax, \qquad (23)$$

---

* Оптимальное решение (8), (9) при $x = x^*$.

** Строго говоря, это так, если решение (15), (16) единственно; если оно неединственно, то среди оптимальных планов предприятий найдется оптимальный план отрасли.

*** В разд. 1 для наглядности рассматривался более частный случай.

где $\Delta b = (\Delta b_1, \ldots, \Delta b_m)$ — вектор случайных величин. Например, если Δb_i не зависит ни от каких случайных параметров задачи (17) — (20), то спрос на i-й продукт в задаче (17), (23), (19), (20) будет иметь математическое ожидание $Mb_i + M\Delta b_i$ и дисперсию $Db_i + D\Delta b_i$, где D — знак дисперсии. Обозначим оптимальное значение функционала в задаче (17), (23), (19), (20) через $\rho(\Delta b)$, тогда оптимальное значение функционала задачи (17) — (20) будет $\rho(0)$.

Теорема 2.

$$\rho(\Delta b) = \rho(0) + M(\pi(x^*, A, b), \Delta b) + \varepsilon(\Delta b), \tag{24}$$

$$\frac{|\varepsilon(\Delta b)|}{\sqrt{M\left(\sum_{i=1}^{m} \Delta b_i^2\right)}} \to 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{M\left(\sum_{i=1}^{m} \Delta b_i^2\right)} \to 0, \tag{25}$$

где x^* — оптимальное решение (17) — (20), а $\pi(x^*, A, b)$ — оптимальное решение (21), (22) при $x = x^*$ *.

Выражение (24) показывает, что $\pi(x^*, A, b)$ является мерой приращения оптимального значения функционала (17) при малом изменении правых частей в (18). Если $\Delta b = (0, \ldots, \Delta b_i, \ldots, 0)$ и Δb_i стохастически не зависит от c, A, b, то приближенно оптимальное значение функционала изменится на $M\Delta b_i \cdot M\pi_i(x^*, A, b)$.

В общем случае $M(\pi(x^*, A, b), \Delta b)$ можно подсчитать методом Монте-Карло. В случае, если $W = (I, -I)$ (I — единичная матрица $m \times m$), на каждое испытание тратится, благодаря простоте решения задачи (21), (22), мало времени, и $M(\pi(x^*, A, b), \Delta b)$ может быть подсчитано с достаточной точностью за короткое время. $M\pi_i(x^*, A, b)$ совпадает по смыслу с обычными детерминированными оценками. Действительно, если $\Delta b_i = 1$, то по (24) оптимальное значение целевого функционала изменится приближенно на $M\pi_i(x^*, A, b)$.

Из теорем 1 и 2 следует, что $\pi(x^*, A, b)$ (решение (21), (22) при $x = x^*$) обладают свойствами, аналогичными свойствам двойственных оценок задач выпуклого и линейного программирования.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2, докажем две леммы. Пусть случайные параметры задачи (17) — (20) являются функциями на вероятностном пространстве (Ω, F, P), Ω — пространство элементарных исходов, F — σ — алгебра на Ω и P — вероятностная мера. Случайные величины с ограниченными математическими ожиданиями и дисперсиями образуют гильбертово пространство случайных величин $L_2(\Omega, F, P)$ (см. [6, стр. 236, 237]). Без ограничения общности будем считать, что Δb_i имеют конечные математические ожидания и конечные дисперсии, тогда $\rho(\Delta b)$ является функционалом на гильбертовом пространстве

$$\underbrace{L_2(\Omega, F, P) \times \ldots \times L_2(\Omega, F, P)}_{m}$$

$\Delta b_i \in L_2(\Omega, F, P)$.

Лемма 1. Функционал $\rho(\Delta b)$ — выпуклый функционал.

Доказательство. Рассмотрим значение $\rho(\Delta b)$ в точках Δb_1 и Δb_2. Решение задачи (17), (23), (19), (20) обозначим через $x_{\Delta b}$. Заметим, что $\alpha x_{\Delta b_1} + (1-\alpha) x_{\Delta b_2}$, $\alpha \in [0; 1]$ является допустимым для задачи (17), (23), (19), (20) при $\Delta b = \alpha\Delta b_1 + (1-\alpha)\Delta b_2$. Ниже выписанная цепочка неравенств следует из определения $\pi(x, A, b)$ и $\rho(\Delta b)$:

$$\rho(\alpha\Delta b_1 + (1-\alpha)\Delta b_2) = \int_\Omega \{(c, x_{\alpha\Delta b_1+(1-\alpha)\Delta b_2}) + [\pi(x_{\alpha\Delta b_1+(1-\alpha)\Delta b_2}, A, b + \alpha\Delta b_1 +$$

$$+ (1-\alpha)\Delta b_2), (b + \alpha\Delta b_1 + (1-\alpha)\Delta b_2 - Ax_{\alpha\Delta b_1+(1-\alpha)\Delta b_2})]\}\, dP \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega \{(c, \alpha x_{\Delta b_1} + (1-\alpha) x_{\Delta b_2}) + \alpha [\pi((\alpha x_{\Delta b_1} + (1-\alpha) x_{\Delta b_2}), A, b +$$

$$+ \alpha\Delta b_1 + (1-\alpha)\Delta b_2), (b + \Delta b_1 - Ax_{\Delta b_1})] + (1-\alpha)[\pi(\alpha x_{\Delta b_1} + (1-\alpha) x_{\Delta b_2}, A, b +$$

$$+ \alpha\Delta b_1 + (1-\alpha)\Delta b_2), (b + \Delta b_2 - Ax_{\Delta b_2})]\}\, dP \leqslant \alpha \int_\Omega \{(c, x_{\Delta b_1}) +$$

$$+ [\pi(x_{\Delta b_1}, A, b + \Delta b_1), (b + \Delta b_1 - Ax_{\Delta b_1})]\}\, dP + (1-\alpha) \int_\Omega \{(c, x_{\Delta b_2}) +$$

$$+ [\pi(x_{\Delta b_2}, A, b + \Delta b_2), (b + \Delta b_2 - Ax_{\Delta b_2})]\}\, dP = \alpha\rho(\Delta b_1) + (1-\alpha)\rho(\Delta b_2).$$

* Теорема 2 утверждает, что $\pi(x^*, A, b)$ — производная Фреше (см. [5]) функционала $\rho(\Delta b)$ в точке 0.

Лемма 2.

$$\rho(\Delta b)-\rho(0)\geqslant\int\limits_{\Omega}(\pi(x^*,A,b),\Delta b)\,dP^{\star}.$$

Доказательство.

$$\rho(\Delta b)-\rho(0)=\int\limits_{\Omega}[(c,x_{\Delta b})+\pi(x_{\Delta b},A,b+\Delta b)(b+\Delta b-Ax_{\Delta b})]\,dP-\int\limits_{\Omega}[(c,x^*)+$$

$$+\pi(x^*,A,b)(b-Ax^*)]\,dP\geqslant\int\limits_{\Omega}[(c,x_{\Delta b})+\pi(x^*,A,b)(b-Ax_{\Delta b})]\,dP-$$

$$-\int\limits_{\Omega}[(c,x^*)+\pi(x^*,A,b)(b-Ax^*)]\,dP+\int\limits_{\Omega}(\pi(x^*,A,b),\Delta b)\,dP\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{\Omega}(\pi(x^*,A,b),\Delta b)\,dP.$$

$$\left(\int\limits_{\Omega}(c-\pi(x^*)+\pi(x^*,A,b)A)\,dP,x_{\Delta b}\right)\geqslant\left(\int\limits_{\Omega}(c-\pi(x^*,A,b)A)\,dP,x^*\right),$$

так как x^* — оптимальное решение (17) — (20), а $\int\limits_{\Omega}(c-\pi(x^*,A,b)A)\,dP$ — градиент целевого функционала (17) в точке x^*.

Доказательство теоремы 2. Нужно показать, что $\rho(\Delta b)-\rho(0)-$ $-\int\limits_{\Omega}(\pi(x^*,A,b),\Delta b)\,dP$ является бесконечно малой высшего порядка малости по сравнению с нормой Δb

$$0\overset{(1)}{\leqslant}\rho(\Delta b)-\rho(0)-\int\limits_{\Omega}(\pi(x^*,A,b),\Delta b)\,dP\overset{(2)}{=}\int\limits_{\Omega}[(c,x_{\Delta b})+\pi(x_{\Delta b},A,b+\Delta b)\times$$

$$\times(b+\Delta b-Ax_{\Delta b})]\,dP-\int\limits_{\Omega}[(c,x^*)+\pi(x^*,A,b)(b-Ax^*)]\,dP-$$

$$-\int\limits_{\Omega}(\pi(x^*,A,b),\Delta b)\,dP\overset{(3)}{\leqslant}\int\limits_{\Omega}[(c,x^*)+\pi(x^*,A,b)(b-Ax^*)]\,dP+$$

$$+\int\limits_{\Omega}[\pi(x^*,A,b+\Delta b)-\pi(x^*,A,b),\Delta b]-\int\limits_{\Omega}[(c,x^*)+\pi(x^*,A,b)(b-Ax^*)]\,dP\overset{(4)}{\leqslant}$$

$$\leqslant\sqrt{\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}(\pi_i(x^*,A,b)-\pi_i(x^*,A,b+\Delta b))^2\,dP}\cdot\sqrt{\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}(\Delta b_i^2)\,dP}$$

(1) следует из леммы 2, (2) — из определения $\rho(\Delta b)$, (3) — из определения $x_{\Delta b}$, (4) — из неравенства Коши — Буняковского (см. [5]).

Теорема полностью доказана.

Автор благодарен В. З. Беленькому, В. А. Волконскому и Н. Я. Петракову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. Новые направления в линейном программировании. М., «Сов. радио», 1966.
2. Н. И. Арбузова, А. И. Вересков, Н. Д. Николаева. Некоторые задачи стохастического программирования (обзор). Экономика и матем. методы, 1969, т. V, вып. 2.
3. Д. Гейл. Теория линейных экономических моделей, М., Изд-во иностр. лит., 1963

* Иначе говоря, $\pi(x^*,A,b)$ является опорным функционалом к $\rho(\Delta b)$ в точке 0.

4. Ю. М. Ермольев, Н. З. Шор. Метод случайного поиска для двухэтапной задачи стохастического программирования и его обобщение. Кибернетика, 1968, № 1.
5. А. Н. Колмогоров, С. Ф. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1968.
6. И. И. Гихман, А. В. Скороход. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию
2 XII 1968

К ВОПРОСУ О СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ СЕТЕВОГО ГРАФИКА

Г. П. МИРОШНИЧЕНКО

(Москва)

Статьей [1] начато обсуждение «языка работ» и «языка событий». Полностью соглашаясь с аргументами авторов в пользу «языка работ», добавим следующее.

1. С целью сравнения применения «языков» для построения сетевых графиков 13 инженерам, знакомым с основами СПУ, были даны 8 примеров в виде записей последовательности работ (часть примеров взята из [2]). По каждой записи следовало построить фрагмент графика на каждом из «языков». Сеть должна была соответство-

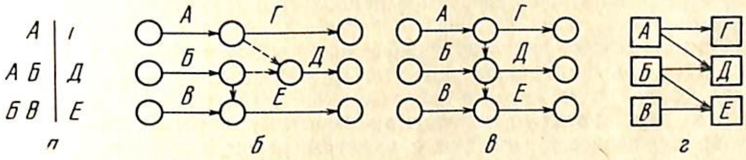

Рис. 1

вать логике записи, а при использовании «языка событий», кроме того, быть рациональной, т. е. содержать минимальное число фиктивных работ. Каждый пример содержал от 5 до 16 работ. Определялось время построения и ошибки в логике и рационализации. На рис. 1 показан пример задания (*а*), правильного построения на «языке событий» (б) и «языке работ» (*г*). Построение (*в*) содержит одну логическую ошибку (работа Е следует, кроме работ Б и В, за работой А, что противоречит условиям) и одну по рационализации (недостает одного события и одной фиктивной работы). Результаты эксперимента приведены в таблице.

Таблица

Язык	Количество ошибок логических		Количество ошибок по рационализации		Время построения, мин.	
	в примере	в среднем на человека	в примере	в среднем на человека	в примере	в среднем на человека
Событий	0÷8	1,2	0÷5	0,4	1÷30	4,6
Работ	0÷3	0,15	—	—	0,5÷10	1,7

Из таблицы следует, что в среднем на человека при использовании «языка событий» приходится в 8 раз больше логических ошибок и в 2,7 раза больше затрачиваемого времени. Ни один не сделал всех примеров на «языке событий» без ошибок; на «языке работ» девять человек сделали все примеры без ошибок.

2. Мы считаем не совсем точными наименования способов построения графиков. В обоих «языках» для целей планирования необходима формулировка работ, поэтому, на наш взгляд, более правильно называть «языки» следующим образом: «работы, события» и «работы, связи».

3. Так как в формулировке работы необходимо указывать, чем она должна окончиться, то событие, если оно относится к одной работе, имеет тот же смысл; если оно относится к нескольким работам — объединяет смысл окончаний нескольких работ.