ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1970 том VI, вып. 4

ФАКТОР ВРЕМЕНИ В НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННОМ КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Ю. П. ФЕДОРОВСКИЙ

(*Москва*)

Одной из основных теоретических проблем оптимизации экономики является проблема построения народнохозяйственного критерия оптимальности. Среди всех возможных вариантов развития народного хозяйства социалистического общества нужно уметь реализовать наилучший, оптимальный вариант. А для этого необходим *народнохозяйственный критерий оптимальности.*

Проблема построения критерия чрезвычайно сложна. Можно выделить два основных направления, по которым проводятся исследования этой проблемы:

1) создание упрощенных схем оптимального планирования;

2) конструктивное построение общей математической формы критерия.

Работы первого направления, основанные на априорном задании структуры потребления, позволяют решать задачи оптимального планирования уже сегодня, однако они не исчерпывают полностью проблемы, так как большинство важнейших аспектов развития народного хозяйства решаются за рамками этих упрощенных критериев.

Очевидно, что в основе построения общей математической формы народнохозяйственного критерия оптимальности должна быть цель социалистической экономики — максимальное удовлетворение потребностей общества. Причем сюда необходимо включать не только потребности населения, но и нужды обороны, помощь дружественным странам, развитие науки и др.

Народнохозяйственный критерий оптимальности должен представлять собой единую количественную характеристику уровня удовлетворения потребностей общества в настоящем и будущем. Для построения такой характеристики необходимо правильно соизмерять различные виды потребностей общества в границах каждого раздела (например, всевозможные виды потребностей населения), различные разделы потребностей общества между собой (например, нужды обороны и личные потребности населения), а также уметь сопоставлять важность удовлетворения потребностей общества в разные моменты времени.

Соизмерение всех видов потребностей общества для одного момента времени возможно с помощью так называемой целевой функции потребления (см., например, [1, 2]). В принципе эта функция может учитывать не только личные нужды населения, но и другие разделы потребностей общества.

Очень сложной проблемой является учет фактора времени при построении народнохозяйственного критерия оптимальности, так как целевая функция потребления не может использоваться непосредственно в качестве критерия оптимальности при достаточно длительном плановом периоде. Необходимо «взвесить» целевые функции для разных моментов времени с помощью правильно подобранной взвешивающей функции. На этой основе и может быть построена динамическая модель народнохозяйственного критерия оптимальности социалистической экономики [3, 4].

Вопросы построения народнохозяйственного критерия оптимальности привлекают внимание и западных экономистов. В послевоенные годы в западной экономической литературе появилось большое число исследований, посвященных государственному планированию (программированию). Появление интереса к планированию не является просто определенной данью моде. Общественный характер процесса производства в развитых капиталистических странах достиг в послевоенные годы такого уровня, который объективно требует научного регулирования всего общественного производства. «Формулирование целей политики, — пишет Я. Тинберген, — стало более необходимым после того, как была потеряна вера в laisser faire. До этого момента не было нужды в планировании, так как верилось, что свободные экономические силы должны привести к лучшему результату» [5]. С развитием государственно-монополистического капитализма появилась возможность регулирования производства не только внутри фирмы, но и в более широких масштабах с помощью использования государственного аппарата.

Но между социалистическим планированием и капиталистическим программированием существует принципиальная разница. Из-за частной собственности на средства производства капиталистическое программирование не может охватить все звенья экономики и носит рекомендательный характер. Таким образом, существует противоречие между необходимостью программирования экономики развитых стран Запада и его практической невозможностью в условиях частной собственности на средства производства.

Однако западные экономисты не всегда отдают себе отчет в действительном характере исследуемой ими капиталистической экономики. Они часто пользуются весьма идеализированными моделями и представлениями, далекими от объективных экономических условий капиталистического общества.

Так, в качестве народнохозяйственного критерия оптимальности часто выдвигается требование максимума целевой функции потребления. В условиях капиталистического хозяйства, когда реальным стимулом развития является достижение максимума прибыли отдельным собственником, такой критерий может рассматриваться лишь как теоретическое построение. Этот критерий плодотворно может быть использован только в условиях социалистической экономики.

Цель данной статьи — систематизированный обзор работ по народнохозяйственному критерию без взвешивания во времени и при использовании взвешивающей функции.

КРИТЕРИИ БЕЗ ВЗВЕШИВАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

В [6] автор пытается дать ответ на вопрос: какую часть дохода должна сберегать нация. Он рассматривает однопродуктовую модель, не учитывающую технический прогресс, с постоянным размером населения и с распределением дохода только между потреблением и накоплением

$$Q(t) = F[K(t), L(t)], \tag{1}$$

где L — трудовые ресурсы, K — производственный капитал, Q — функция производства, F — некоторая производственная функция.

Но трудовые ресурсы постоянны

$$L(t) = L_0, \quad L_0 > 0. \tag{2}$$

Следовательно,

$$Q(t) = G[K(t)], \quad G(K) > 0 \text{ для } K > 0. \tag{3}$$

Так как весь полученный доход распределяется только между потреблением и накоплением, то справедливо соотношение

$$X(t) + \dot{K}(t) = Q(t), \quad X(t) \geqslant 0, \tag{4}$$

$$K(0) = K_0, \quad K_0 > 0, \tag{5}$$

где $X(t)$ — потребление, $\dot{K}(t) = dK(t)/dt$ — новые капиталовложения, K_0 — начальный капитал.

Равенства (4) и (5) образуют производственные и потребительские ограничения в проблеме оптимизации.

В качестве критерия оптимальности выбирается функционал

$$U = \int_0^\infty u[X(t)]\,dt, \tag{6}$$

где u — целевая функция потребления, зависящая от потребления X.

Оптимальной является экономика с таким потреблением, для которого (6) достигает максимального значения. Но в (6) интеграл рассматривается для бесконечного времени и естественно возникает проблема сходимости. Ф. Рамзи [6] обходит эту проблему, предполагая либо $G(K) \leqslant \hat{G}$ для всех K, либо $u(X) \leqslant \bar{u}$ для всех X.

Таким образом, в первом случае постулируется, что весь новый выпуск ограничен сверху, т. е. существует максимально возможный уровень целевой функции потребления, равный $\hat{u} = u(\hat{X}) = u(\hat{G})$, где $\hat{X} = \hat{G}$. Аналогично, во втором случае существует такой уровень потребления, для которого целевая функция потребления ограничена сверху для всех X.

Если одно из этих предположений выполняется, то существует максимальный уровень целевой функции потребления $\hat{u} = u(\hat{G})$ или $\bar{u}$ (если выполняются оба условия, то берется $\min[\hat{u}, \bar{u}]$).

Далее утверждается, что при его предположениях существует по крайней мере одна возможная программа потребления, для которой

$$U = \int_0^\infty [u(X(t)) - \hat{u}]\,dt \tag{7}$$

сходится, и что оптимальной программой потребления является программа, для которой (7) принимает максимальное значение (последнее справедливо в случае сходимости (7) для нескольких программ потребления).

В действительности эти условия не являются достаточными для существования оптимальной программы в сформулированном смысле, так как сходимость (7) зависит от быстроты асимптотического приближения $G(K)$ и $u(X)$ к соответствующим верхним уровням.

И П. Самуэльсон и Р. Солоу [7] сделали очень сильные предположения

а) $G(K) = \hat{G}$ для $K \geqslant \hat{K}$, $\quad 0 < \hat{K} < \infty$,

б) $u(X) = \bar{u}$ для $X \geqslant \bar{X}$, $\quad 0 < X < \infty$

(для конечных $\hat{K}, \bar{X}$ существуют соответствующие уровни насыщения). При этих предположениях интеграл (7) существует, и если $K_0 < \hat{K}$, то обязательно в течение конечного времени K достигнет $\hat{K}$. Следовательно, всегда возможно найти оптимальную программу (в указанном смысле).

Математическая форма (7) критерия оптимальности используется в [8]. Величина $\hat{u}$ трактуется авторами как значение целевой функции при стационарном режиме оптимального функционирования экономики. Общей тенденцией развития считается стремление к достижению стационарного режима, который практически может никогда не реализоваться, так как научно-технический прогресс совершается непрерывно.

Подход, аналогичный принятому Рамзи, на первой стадии исследования проблемы был использован американским экономистом Т. Купмансом в [9], где он рассматривает однопродуктовую модель экономики с вогнутой однородной функцией производства первой степени $F(K, L)$. Весь полученный доход распределяется только между потреблением и накоплением. Следовательно,

$$X(t) + \dot{K}(t) = F(K, L). \tag{8}$$

Предполагается, что трудовые ресурсы растут по экспоненте

$$L_t = L_0 e^{\lambda t}, \quad \lambda > 0. \tag{9}$$

Задача рассматривается при отсутствии технического прогресса, что естественно ограничивает ценность полученных результатов. Используя однородность функции производства, уравнение (8) записывается в форме

$$x_t + \dot{k}_t = f(k_t) - \lambda k_t, \tag{10}$$

$$x_t > 0, \quad k_t > 0, \tag{11}$$

где k_0 дано; x_t — потребление на единицу рабочей силы; k_t — производственный капитал на единицу рабочей силы; $\dot{k}_t = dk_{(t)}/dt$ — новые капиталовложения на единицу рабочей силы; $f(k_t)$ — выпуск продукции на единицу рабочей силы.

Уравнение (10) может быть интерпретировано следующим образом: из выпуска продукции $f(k)$ вычитается член λk — капиталовложения, необходимые для снабжения растущей рабочей силы производственным капиталом в существующей пропорции; оставшаяся часть распределяется между потреблением и накоплением. Вследствие строгой вогнутости $f(k)$ можно найти такое гипотетическое значение $\bar{k}$ производственного капитала k, при котором правая часть (10) обращается в нуль (рис. 1). Очевидно, что как текущее значение начального производственного капитала k, так и его начальное значение k_0 должны лежать в пределах от 0 до $\bar{k}$.

В качестве критерия оптимальности рассматривается функционал

$$U = \int_0^\infty u(x_t)\, dt. \tag{12}$$

Чтобы избежать решения проблемы сходимости интеграла, Т. Купманс неявно использует следующий метод.

Пусть существует класс возможных потреблений $x(t) \in F$, среди которых экономика должна выбрать одно. Считается, что программа $x_1(t)$ лучше, чем $x_2(t)$, если существует T_0 такое, что для всех $T \geqslant T_0$

$$\int_0^T [u(x_1(t)) - u(x_2(t))]\, dt \geqslant 0.$$

В соответствии с этим определением программа $x_1(t)$ в F будет оптимальной, если для каждой программы $x(t)$ в F существует T_0 такое, что для всех $T \geqslant T_0$

$$\int_0^T [u(x_1(t)) - u(x(t))]\, dt \geqslant 0.$$

Если для каждой программы $x_1(t)$ в F существует программа $x_2(t)$ в F такая, что для некоторого T_0 и всех $T \geqslant T_0$

$$\int_0^T [u(x_1(t)) - u(x_2(t))]\, dt < 0,$$

то задача оптимизации не имеет решения.

Подобно Ф. Рамзи, критерием оптимальности которого являлась скорость приближения к тому, что он назвал «состоянием блаженства» (т. е.

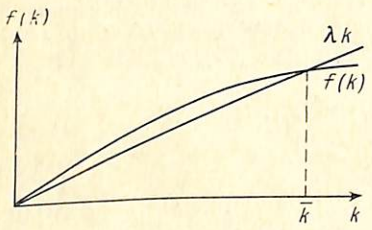

Рис. 1

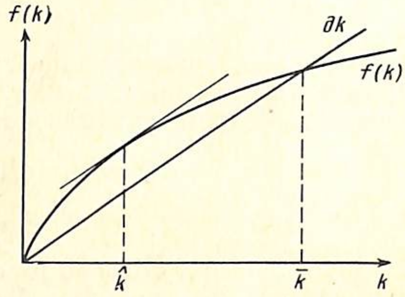

Рис. 2

к состоянию насыщения потребителей потребительскими товарами или производственной системы — производственным капиталом), Т. Купманс пытается найти такое асимптотическое свойство развивающейся экономики, которое можно было бы использовать вместо «состояния блаженства» Ф. Рамзи. В качестве подобного асимптотического свойства Купманс использует так называемое «золотое правило», найденное Е. Фелпсом [10], Дж. Робинсон [11] и др., которое определяется следующим образом.

Ставится задача выявления асимптотического поведения при условии, что начальный капитал k_0 является свободной величиной; одновременно предполагается, что потребление и производственный капитал на одного рабочего не меняются во времени

$$x_t = x, \quad k_t = k.$$

Тогда уравнение (10) примет вид

$$x = f(k) - \lambda k, \quad x > 0, \quad k > 0. \tag{12a}$$

Отсюда k выбирается таким образом, чтобы максимизировать x — постоянный уровень потребления на одного рабочего. Это ведет к такому выбору $k = \hat{k}$, для которого (рис. 2)

$$\frac{df}{dk} = \lambda \text{ и } \hat{x} = f(\hat{k}) - \lambda\hat{k}. \tag{13}$$

Таким образом, $\hat{k}$ — такой уровень производственного капитала на одного рабочего, для которого наклон касательной к графику производственной функции $f(k)$ равен λ.

Поскольку

$$\frac{df}{dk}=\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}=\lambda,$$

первая из формул (13) выражает для любого момента времени t равенство дифференциальной оценки капитала темпу роста населения λ. В этом и состоит «золотое правило» Е. Фелпса, Дж. Робинсон, Т. Купманса и др.

Если $\hat{u}$ — значение u, соответствующее «золотому правилу», то может быть доказана следующая интегральная оценка

$$U_T=\int\limits_0^T (u(x_t)-\hat{u})\,dt\leqslant\overline{U}, \tag{14}$$

где $\overline{U}$ — конечное число. Экономический смысл этой оценки состоит в том, что уровень удовлетворения потребностей общества за плановый период произвольной продолжительности T может превосходить уровень удовлетворения потребностей общества, полученный из «золотого правила», только на конечную величину.

При переходе к бесконечному времени $\lim\limits_{T\to\infty} U_T$ может либо существовать (являться конечным числом), либо нет. Рассмотрение проблемы допустимо ограничить траекториями, при которых этот предел существует. Подобные траектории называют желательными.

На множестве желательных траекторий критерием оптимальности может служить функционал

$$U=\int\limits_0^\infty (u(x_t)-\hat{u})\,dt. \tag{15}$$

Окончательно доказывается теорема: для любого начального капитала k_0 с $0<k_0\leqq\bar{k}$ существует единственная оптимальная траектория $(\hat{x}_t,\hat{k}_t)$ на множестве желательных и допустимых траекторий; для $k_0\neq\hat{k}$ оба $\hat{x}_t,\hat{k}_t$ показывают строго монотонное приближение к $\hat{x}$ и $\hat{k}$: а) если $0<k_0<\hat{k}$, то $\hat{x}_t$ и $\hat{k}_t$ строго монотонно приближаются к $\hat{x}$ и $\hat{k}$ снизу; б) если $\hat{k}<k_0<\bar{k}$, то $\hat{x}_t$ и $\hat{k}_t$ строго монотонно приближаются к $\hat{x}$ и $\hat{k}$ сверху.

Для $k_0=\hat{k}$ оптимальная траектория есть $\hat{x}_t=\hat{x}$, $\hat{k}_t=\hat{k}$ для всех t (траектория «золотого правила»).

Таким образом, основным результатом 1-й части работы Т. Купманса является нахождение оптимальной асимптотической траектории $\hat{x}$, $\hat{k}$ — траектории «золотого правила». Очевидна практическая неполноценность этого результата. В частности, при $\lambda=0$

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}=0, \tag{16}$$

т. е. дифференциальная оценка капитала равна нулю. Экономический смысл этого условия, отвергающего необходимость любых капиталовложений, не требует дальнейших комментарий. При $\lambda>0$ дифференциальная оценка капитала хотя и не равна нулю, но все же крайне незначительна (1 — 3%). При этом условии «насыщение» реальной экономики капиталом возможно лишь в течение весьма длительного промежутка времени (только при отсутствии технического прогресса).

Между тем реальное развитие экономики — это постоянно изменяющийся переходный процесс, ведущий ее ко все более высокому техническому уровню. Поэтому главный практический интерес представляет изучение переходных процессов, а исследование асимптотических режимов с этой точки зрения ничего не дает.

В [6] и [9] критерий оптимальности был использован для изучения однофакторной модели экономики. Несмотря на очевидную пользу макроэкономических исследований понятно и стремление к рассмотрению сложных многофакторных моделей. В [7] обобщена задача Рамзи на случай целевой функции потребления, зависящей от n аргументов.

В [12] рассматривается многофакторная модель типа Неймана. Основной результат исследования — доказательство существования оптимальной траектории с использованием критерия оптимальности без взвешивающей функции.

КРИТЕРИЙ СО ВЗВЕШИВАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ

Во введении говорилось о необходимости взвешивающей функции при построении народнохозяйственного критерия оптимальности. Частные виды взвешивающей функции рассмотрены в работах [5, 6, 9, 13—21]. В [16] критерий оптимальности приведен в форме

$$U({}_1x)=\sum_{t=1}^{\infty}\alpha^{t-1}u(x_t),$$

где $$\alpha — \mathrm{const}, \quad 0<\alpha<1;$$

${}_1x$ — вектор-функция скорости потребления для всех $t\geqslant 0$; x_t — вектор-функция скорости потребления в момент времени t; $u(x_t)$ — немедленная или однопериодная целевая функция потребления; $U({}_1x)$ — перспективная

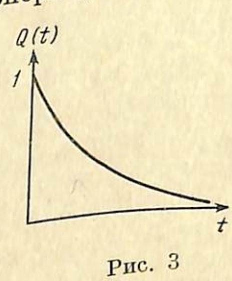

Рис. 3

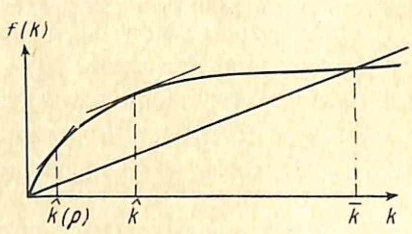

Рис. 4

целевая функция потребления для всего будущего времени; α^{t-1} — взвешивающая функция.

Проблема взвешивания во времени в общем виде была поставлена В. Ф. Пугачевым [3, 4]. Критерий оптимальности народного хозяйства было предложено брать в виде функционала

$$U=\int_0^{\infty}Q(t)u[x(t),t]\,dt, \tag{17}$$

где u — целевая функция потребления; Q — некоторая взвешивающая функция, соизмеряющая целевые функции во времени (рис. 3); $x(t)$ — вектор-функция скорости потребления благ для всех $t\geqslant 0$.

В работах [3, 4] большое внимание уделено проблеме обоснования необходимости взвешивающей функции и разработки методики вариантного выбора взвешивающей функции. Показывается, что взвешивающая функция является объективно необходимым элементом народнохозяйственного критерия оптимальности и параметры ее могут варьироваться в весьма узких и строго определенных пределах, при выходе из которых возникают неприемлемые варианты развития экономики.

Частный вид взвешивающей функции $Q(t)=e^{-\rho t}$ использован в [9], также в более поздних публикациях [13].

Первым результатом, полученным с помощью введения взвешивающей функции, является доказательство сходимости интеграла *

$$U=\int\limits_0^\infty e^{-\rho t}\,u(x_t)\,dt, \tag{18}$$

где $\rho>0$ для всех возможных траекторий потребления $x_t>0$.

Рассматривается система уравнений

$$\frac{d}{dk}f(k)=\lambda+\rho,\quad f(k)-\lambda k=x, \tag{19}$$

где $0<\lambda\leqq\lambda+\rho<f'(0)$. Величины $\hat{k}(\rho)$ и $x(\rho)$, найденные из этой системы уравнений, определяют «модифицированное золотое правило» экономики. Доказывается, что если $k_0=k(\rho)$, то единственной оптимальной траекторией является $\hat{x}_t=\hat{x}(\rho)$, $\hat{k}_t=\hat{k}(\rho)$ для всех $t\geqslant 0$ (определение $\hat{k}(\rho)$ показано на рис. 4). Для случая произвольного начального капитала доказывается следующая теорема.

Теорема. *На единственной оптимальной траектории* $(\hat{x}_t, \hat{k}_t)$ *для любого первоначального капитала* k_0 *с* $0<k_0\leqslant\bar{k}$, $k_0\neq\hat{k}(\rho)$, *оба* $\hat{x}_t$, $\hat{k}_t$ *показывают монотонное и асимптотическое приближение к* $\hat{x}(\rho)$ *и* $\hat{k}(\rho)$ *соответственно*: а) *сверху, если* $k_0>\hat{k}(\rho)$; б) *снизу, если* $k_0<\hat{k}(\rho)$.

Можно заметить, что асимптотический уровень потребления $\hat{x}(\rho)$, будучи независим от первоначального капитала k_0, понижается, когда ρ увеличивается. Максимальное значение $\hat{x}(\rho)$ имеет при $\rho=0$.

С траекторией потребления x_t, для которой интеграл (18) существует, связывается дифференциальная оценка потребления P_t и дифференциальная оценка использования основных фондов $q(t)$, определяемые формулами

$$P_t=e^{-\rho t}\frac{d}{dx_t}u(x_t),\quad q_t=P_t\frac{d}{dk_t}g(k_t), \tag{20}$$

где $g(k_t)=f(k_t)-\lambda k_t$.

Доказывается теорема о необходимых и достаточных условиях оптимальности траектории развития экономики $(\hat{x}_t, \hat{k}_t)$.

Теорема. *Для всех* k_0 *с* $0<k_0\leqslant\bar{k}$ *единственная оптимальная траектория* $(\hat{x}_t, \hat{k}_t)$ *однозначно характеризуется двумя условиями*: 1) $\lim\limits_{T\to\infty}\hat{k}_T=\hat{k}(\rho)$, 2) *дифференциальные оценки* q_t, p_t *удовлетворяют дифференциальному уравнению* $q_t+(d/dt)p_t=0$ *для всех* $t\geqslant 0$.

---

* Для удобства изложения функционал критерия оптимальности берется в виде

$$U(\rho)=\int\limits_0^\infty e^{-\rho t}(u(x_t)-\hat{u})\,dt,\qquad \rho>0,$$

что, разумеется, несущественно.

Подводя итог результатам Т. Купманса в области исследования критерия со взвешивающей функцией, можно заметить, что он и здесь ограничивается анализом асимптотических режимов, т. е. режимов, никогда не достигаемых в условиях технического прогресса. Главная же ценность взвешивающей функции заключается в возможности конструктивного построения такого народнохозяйственного критерия оптимальности, который применим и для анализа переходных режимов. Эту возможность Т. Купманс не реализовал. Вполне понятно, почему конструктивный подход к проблеме критерия появился именно в советской экономической литературе.

Рассмотрим далее работы [14, 15], в которых предложена такая формулировка критерия оптимальности: существенную роль в развитии экономики играет максимизация интеграла от целевой функции потребления только до некоторого конечного предела T. Развитие экономики за пределом планового периода принимается во внимание посредством назначения нижней границы для производственных фондов в конце планового периода.

Рассматривается следующая модель экономики

$$x_t + z_t = f(k_t), \quad x_t \geqslant 0, \quad z_t \geqslant 0, \tag{21}$$

$$\dot{k}_t = z_t - nk_t, \quad \text{с} \quad k(0) = k_0, \quad n = \lambda + \mu > 0, \quad k_0 > 0, \tag{22}$$

где z_t — валовые вложения в производственные фонды, $\dot{k}_t$ — новые капиталовложения на душу населения, λ — положительная норма роста населения, μ — положительная норма уменьшения капитала.

Функционал критерия оптимальности берется в виде

$$U = \int_0^T u(x_t)\, e^{-\rho t}\, dt. \tag{23}$$

Кроме того, добавляется граничное условие, учитывающее интересы развития экономики за пределами планового периода

$$k(T) \geqslant k_T, \tag{24}$$

где k_T дано.

Окончательно проблема формулируется следующим образом.

Определить траекторию роста (x_t, z_t, k_t), которая максимизирует

$\int_0^T u(x_t)\, e^{-\rho t}\, dt$ при условии

$$\left.\begin{aligned} &x_t + z_t = f(k_t), \quad x_t \geqslant 0, \quad z_t \geqslant 0,\\ &\dot{k}_t = +z_t - nk_t, \quad \text{с} \quad k(0) = k_0, \quad k(T) \geqslant k_T. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Используя принцип максимума Понтрягина, доказывается следующая теорема.

Теорема. *Необходимыми и достаточными условиями существования оптимальной траектории являются:*

1) существование оценки валовых капитальных вложений на душу населения $q(t)$, *удовлетворяющей*

$$\frac{dq(t)}{dt} = (\rho + n)\, q_t - u'(x_t)\, f'(k_t) = \frac{d}{dt} \int_t^T \frac{\partial}{\partial k_t} [\psi - q_t n k_t]\, e^{-\rho(\tau - t)}\, d\tau$$

и $q(T) \geqslant 0$ *с равенством для* $k(T) > k_T$, где $\psi = u(x_t) + q_t z_t$;

2) $x_t + z_t = f(k_t)$, $x_t \geqslant 0$, $z_t \geqslant 0$, и $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z_t}\right)_{x_t = f(k_t) - z_t} = -u'(x_t) +$ $+ q_t \leqslant 0$ *с равенством для* $z_t > 0$;

3) $\dot{k}_t = z_t - nk_t$, *с* $k(0) = k_0$ *и* $k(T) \geqslant k_T$.

Центральным пунктом исследования Д. Гасса является доказательство «магистральной теоремы». (См. [22, 23].)

Теорема. *Для любого положительного* $\varepsilon > 0$ *определим замкнутую, прямоугольную* ε — *окрестность «модифицированного золотого правила» роста* $N(\varepsilon) = \{(k, q): |k - k^*| \leqslant \varepsilon; |q - q^*| \leqslant \varepsilon\}$. *Тогда для единственной оптимальной траектории* $\{k_t, q_t : 0 \leqslant t \leqslant T\}$, *определенной начальными и конечными параметрами* (k_0, k_t, T), *существуют два конечных момента времени* $T_1 = T_1(\varepsilon, k_0)$; $T_2 = T_2(\varepsilon, k_T)$ *таких, что* $[k_t, q_t] \in N(\varepsilon)$ *всякий раз, когда* $T_1 \leqslant t \leqslant T - T_2$. k^*, q^*, упомянутые в настоящей теореме, и x^*, z^* определяются из следующей системы уравнений:

$$f'(k^*) = \rho + n, \quad z^* = nk^*; \quad x^* = f(x^*) - z^*, \quad q^* = u'(x^*).$$

Таким образом, теорема доказывает, что если $T > T_1 + T_2$, то траектория $[k_t, q_t]$ находится в произвольно малой окрестности траектории роста «модифицированного золотого правила», за исключением некоторой окрестности начального и конечного момента времени.

Относительно упомянутой траектории (x^*, k^*, z^*) доказывается следующая теорема.

Теорема. *Для любого начального капитала* k_0 *начальная величина оценки* $q(0)$ *может быть выбрана так, что траектория, начинающаяся с этих значений и удовлетворяющая условиям оптимальности, асимптотически приближается к траектории «модифицированного золотого правила»* (k^*, x^*, z^*).

Эта траектория является единственной траекторией. Более того, на этой единственной траектории или k_t и x_t оба строго возрастающие, если $k(0) < k^*$, или оба они строго убывающие, если $k(0) > k^*$.

В последнее время в работах зарубежных экономистов сделаны попытки учесть наличие технического прогресса при рассмотрении задач оптимизации экономики. Рассматриваются три вида технического прогресса [24] *.

1. Технический прогресс, «увеличивающий» трудовые ресурсы (labour augmenting progress). Функция производства имеет в этом случае вид $L_t A_t f(K_t / L_t A_t)$. Здесь A_t — только функция времени.

2. Технический прогресс, «увеличивающий» основной капитал (capital augmenting progress), с функцией производства вида $L_t f(B_t K_t / L_t)$, где B_t — только функция времени.

3. Технический прогресс, при котором капитал и трудовые ресурсы растут в одинаковой норме (product augmenting progress), с функцией производства вида $L_t A_t f(K_t / L_t)$.

В [25] рассматривается задача оптимизации, принимающая во внимание labour augmenting технический прогресс. Функция производства, использованная автором, имеет вид $F(K_t, L_t, t) = L_t A_t f(K_t / L_t A_t)$, где A_t — возрастающая функция времени, показывающая достигнутый уровень технического прогресса.

Единственный производимый товар или потребляется, или сберегается, т. е. справедливо

$$X_t = F(K_t, L_t, t) - \dot{K}_t, \tag{26}$$

где K_0 дано.

* См. также [26].

Функционал критерия оптимальности берется в виде

$$U_t = \int_0^T L_t u(X_t/L_t) e^{-\rho t}\, dt. \tag{27}$$

Если мы, следуя автору, обозначим $k_t = K_t / L_t A_t$ — капитал на единицу труда, $x_t = X_t / L_t A_t$ — потребление на единицу труда, то уравнение (26) можно записать в виде

$$x_t = f(k_t) - (\alpha + \lambda) k_t - \dot{k}_t, \tag{28}$$

где $A = \dot{A} / A$ — норма технического прогресса, $\lambda = \dot{L}_t / L_t$ — норма роста населения.

Далее в работе [25] вводятся следующие обозначения: $\bar{X}_t \bar{K}_t$, $\bar{k}_t \bar{x}_t$ — некоторая траектория развития экономики, $p_t = e^{-\rho t} u'(\bar{X}_t / L_t)$ — дифференциальная оценка основного капитала. Доказывается следующая теорема существования оптимальной траектории развития экономики.

Теорема. *Траектория развития экономики* $\bar{X}_t$, $\bar{K}_t \cdot \bar{k}_t$, $\bar{x}_t$ *является оптимальной, если* $(dp / dt) + pf'(\bar{k}) = 0$ *для всех* $t > 0$, $p\bar{K} \to d < \infty$, *когда* $t \to \infty$, *или* $i / d = 0$, *или* $ii / \bar{k}_t$, $\bar{x}_t$ *ограничены.*

Автор получил также более простые условия существования оптимальной траектории для целевой функции потребления вида $u(c_t) = -c_t^{-n}$, $n > 0$ и $\rho = 0$. Здесь $c_t = X_t / L_t$. Для этого случая доказывается теорема.

Теорема. *Если* $f'(0) < \alpha + \lambda$;

$$f'(0) > (n+1)\alpha > \lim_{k \to \infty} f'(k); \quad u(c_t) = -c_t^{-n},$$

то оптимальная траектория существует, если (и только если) $n\alpha \geqq \lambda$.

Выводится уравнение для нахождения оптимального потребления как функции капитала

$$[f(k) - (\alpha + \lambda) k - x] \frac{dx}{dk} = x \left[\frac{1}{n+1} f'(k) - \alpha \right]$$

с начальным условием $x(\bar{k}) = f(\bar{k}) - (\alpha + \lambda)\bar{k}$, где k определяется из уравнения $f'(\bar{k}) = (n + 1)\alpha$.

В случае взвешивающей функции вида $e^{-\rho t}$ условие существования оптимальной траектории имеет вид $n\alpha \geqq \lambda + \rho$.

ВЫВОДЫ

1) Основное внимание в большинстве рассмотренных работ обращено на получение качественных результатов, например, условия существования оптимальной траектории и асимптотических свойств таких траекторий. Основной же интерес, как подчеркивалось выше, представляет изучение переходных режимов, из которых складывается реальное развитие экономики в условиях непрерывного технического прогресса.

2) Очень важным является вопрос о взвешивающей функции. Главная ценность взвешивающей функции заключается в возможности конструктивного подхода к построению народнохозяйственного критерия оптимальности для анализа переходных режимов. Вполне понятно, почему такой практический подход к проблеме построения народнохозяйственного критерия появился именно в советской экономической литературе, а не у зарубежных авторов.

3) Для получения дальнейших результатов в этой области необходимо исследовать реальные многоразмерные модели народнохозяйственной оп-

тимизации с критерием (17), особенно модели непрерывного типа, адекватно описывающие процесс экономического развития и представляющие некоторые вычислительные преимущества.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Волконский. Об объективной математической характеристике народного потребления. В сб. Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления. М., Изд-во АН СССР, 1963.
2. В. А. Волконский. Модель оптимального планирования и взаимосвязи экономических показателей. М., «Наука», 1967.
3. В. Ф. Пугачев. О критерии оптимальности экономики. В сб. [1].
4. В. Ф. Пугачев. Оптимизация планирования (Теорет. проблемы). М., «Экономика», 1968.
5. J. Tinbergen. Central Planning. New Haven — London, 1964.
6. F. P. Ramsey. A Mathematical Theory of Saving. Econ. J., 1928, v. XXXVIII, N 152.
7. P. A. Samuelson, R. M. Solow. A Complete Capital Model Involving Heterogeneous Capital Goods. Quart. J. Econ., 1956, v. LXX, N 4.
8. А. И. Каценелинбойген, Ю. В. Овсиенко, Е. Ю. Фаерман. Методологические вопросы оптимального планирования социалистической экономики. М., 1966 (ЦЭМИ АН СССР).
9. T. C. Koopmans. On the Concept of Optimal Economic Growth. Pontifiral academial Scientiarum Scripta Varia, 1965.
10. E. S. Phelps. The Golden Rule of Accumulation. Amer. Econ. Rev., 1961, v. 51, N 4.
11. J. Robinson. A Neo-classical Theorem. Rev. Econ. Stud., 1962, v. XXIX (3), N 80.
12. D. Gale. On Optimal Development in a Multi — Sector Economy. Rev. Econ. Stud., 1967, v., 34, N 1.
13. T. C. Koopmans. Objective, Constraints and Outcomes in Optimal Growth Models. Econometrica, 1967, v. 35, N 1.
14. D. Gass. Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation. Rev. Econ. Stud., 1965, v. 32, № 3.
15. D. Gass. Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation. Econometrica, 1966, v. 34, N 4.
16. T. C. Koopmans. Stationary Ordinal Utility and Impatience. Econometrica, 1960, v. 28, N 2.
17. D. Mc Fadden. The Evaluation of Development Programs. Rev. Econ. Stud., 1967, v. 34, № 1.
18. R. Radner. Dynamic Programming of Economic Growth. Activity Analysis in the Theory of Growth and Planning, 1967.
19. T. N. Srinivasan. Optimal Savings in a Two — Sector Model of Growth. Econometrica, 1964, v. 32, N 3.
20. J. Tinbergen. Optimum Savings and Utility Maximization Over Time. Econometrica, 1960, v. 28, N 2.
21. C. C. Von Weizsäcker. Existence of Optimal Programs of Accumulation for an Infinite Time Horizont. Rev. Econ. Stud., 1965, v. XXXII (2), N 90.
22. R. Dorfman, P. A. Samuelson, R. A. Solow. Linear Programming and Economic Analysis. N. Y., 1958.
23. P. A. Samuelson. A Catenary Turnpike Theorem Involving Consumption and the Golden Rule. Amer. Econ. Rey., 1965, v. LV, N 3.
24. E. S. Phelps. Golden Rule of Economic Growth. Norton, 1967.
25. J. A. Mirrlees. Optimum Growth when Technology is Changing. Rev. Econ. Stud., 1967, v. 24, № 1.
26. J. Robinson. The Accumulation of Capital. London, 1956.

Поступила в редакцию
20 VI 1969