

КАЛЕНДАРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ СБОРОЧНЫХ РАБОТ В МЕЛКОСЕРИЙНОМ И ЕДИНИЧНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

С. Н. ГРИНЕВА

(Москва)

Предлагаемая модель и алгоритм могут быть использованы при календарном планировании на любых предприятиях, осуществляющих стендовую сборку изделий, например, на машиностроительных, судостроительных и судоремонтных. Такая задача может быть частью комплекса задач оперативно-производственного планирования в автоматизированной системе планирования и управления.

Экономическая модель разработана ведущим инженером института Оргстанкинпром А. Л. Марголиным.

Постановка задачи. Предполагается, что комплекс операций по сборке каждого изделия или узла в мелкосерийном производстве на машиностроительном предприятии описан сетевым графиком произвольного вида. Каждой работе сети поставлены в соответствие ее номер, трудоемкость, минимальное и максимальное количество рабочих, которые могут выполнять данную работу. В дальнейшем мы также будем ставить в соответствие каждой работе длительность ее выполнения, которая определяется как частное от деления трудоемкости на число фактически занятых рабочих. Нумерация работ в сети может быть произвольной.

Сборка узлов и изделий производится на различных производственных площадях и разными рабочими, причем рабочие, свободные от сборки изделий, могут быть заняты сборкой узлов. Работа от начала до конца должна производиться бригадой, число членов которой постоянно. Сборка каждого узла должна быть закончена к началу той операции в сетевом графике сборки изделия, которая описывает начало установки этого узла.

Сборка каждого узла или изделия продолжается до конца без прерывов.

Таким образом, рассматриваемая задача может быть представлена как задача распределения ограниченных ресурсов (людей, сборочных площадей) между комплексами операций, некоторые из которых технологически связаны между собой.

Полученный в результате решений этой задачи календарный план-график должен удовлетворять условию максимального использования ресурсов в каждый момент времени.

Алгоритм решения задачи. Условие выполнения каждого комплекса операций постоянным числом рабочих позволяет разделить решение задачи на две части: сначала для каждого комплекса определить число рабочих, которые могут его выполнить с минимальными потерями рабочего времени, и длительность выполнения комплекса этим числом рабочих, а потом составить календарный план-график начала и окончания каждого комплекса при условии минимизации пролеживания узлов и максимизации использования ресурсов в каждый момент времени.

Рассмотрим алгоритм решения первой части задачи для одного комплекса операций, описанного сетевым графиком.

Введем следующие обозначения: i — номер комплекса; $i = 1, 2, \dots, m$; t — время, измеренное в тактах. Величина такта выбирается из соображений удобства решения задачи. Все величины, имеющие размерность времени, должны выражаться целым числом тактов; n — номер работы сетевого графика; p_n — трудоемкость n -й работы; θ_n — длительность n -й работы; q_n — минимальное число рабочих, которые могут выполнять n -ю работу; κ_n — максимальное число рабочих, которые могут выполнять n -ю работу; $\tilde{z}_i(t)$ — количество рабочих, занятых на выполнении i -го комплекса в момент времени t при условии выполнения каждой работы минимальным числом рабочих и отсутствии ограничений на ресурсы (функция загрузки рабочих); k_i — постоянное число рабочих, которые могут выполнять i -й комплекс с минимальными потерями рабочего времени; $\tilde{t}_i$ — время выполнения i -го комплекса при условиях, определенных для функции $\tilde{z}_i(t)$; t_i — время выполнения i -го комплекса числом рабочих k_i ; $z_i(t)$ — количество рабочих, занятых на выполнении i -го комплекса в момент времени t при условии выполнения каждой работы $\tilde{q}_n$ рабочих ($q_n \leq \tilde{q}_n \leq \kappa_n$) и ресурсе рабочей силы, равном k_i .

Введем некоторые понятия. Работу с номером n будем называть допустимой в момент времени t , если ее выполнение не закончено и закончено выполнение всех предшествующих ей работ, т. е. таких, раньше окончания которых работа с номером n не может быть начата.

Назовем фронтом работ в момент времени t множество $\Phi(t)$, содержащее номера всех работ, которые в момент t допустимы.

Найдем кусочно-постоянную функцию времени $\tilde{z}_i(t)$.

Алгоритм отыскания $\tilde{z}_i(t)$ пошаговый. Опишем один шаг, началом которого служит момент времени t .

В момент t определим множество $\Phi(t)$. Тогда $\tilde{z}_i(t) = \sum_{\Phi(t)} q_n$. Оче-

видно, что функция $\tilde{z}_i(t)$ не изменится, пока не будет закончена хотя бы одна из работ фронта. Найдем величину $\Delta t = \min(\theta_n)$ и припишем всем работам из $\Phi(t)$ длительности $\bar{\theta}_n = \theta_n - \Delta t$. Тогда для работ, выполнение которых закончено, $\bar{\theta}_n = 0$. Остальные работы $\Phi(t)$ останутся допустимыми и войдут в множество $\Phi(t + \Delta t)$ на следующем шаге, началом которого будет служить момент времени $t + \Delta t$.

Таким образом, длительность выполнения комплекса $\tilde{t}_i$ и функция $\tilde{z}_i(t)$ загрузки рабочих на этом интервале будут определены, когда множество $\Phi(t)$ окажется пустым, т. е. будут выполнены все работы комплекса.

В качестве примера на рис. 1 приводится сетевой график выполнения комплекса работ по сборке изделия. Функция $\tilde{z}_i$ для этого графика показана на рис. 2.

Величина k_i определяется из условия

$$\left| \int_0^{t_i} (\tilde{z}_i(t) - k_i) dt \right| \rightarrow \min,$$

где k_i — целое положительное число.

Проведем теперь повторный обсчет сети с тем, чтобы получить функцию $z_i(t)$, не превышающую k_i и минимально отличающуюся от него в каждый момент времени.

Как и при первом просчете, определим $\Phi(t)$ и $z_i(t) = \sum_{\Phi(t)} q_n$ в момент

времени t . Могут представиться следующие варианты:

1) $z_i(t) = k_i$. В этом случае определяется величина Δt и начинается обсчет следующего шага;

2) $z_i(t) < k_i$. В этом случае из работ множества $\Phi(t)$ найдем такую, для которой $\theta_n = \max_{\Phi(t)}(\theta_n)$. Если для этой работы $q_n \neq \kappa_n$, положим

$q_n = q_n + 1$ и вычислим заново величины $\theta_n = p_n/q_n$ и $z_i(t)$. Будем

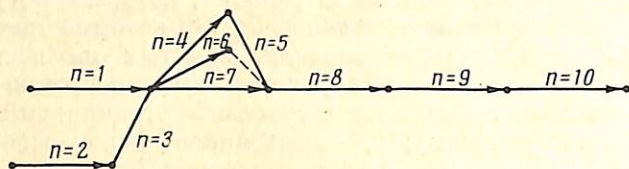


Рис. 1

n	p_n	q_n	x_n	n	p_n	q_n	x_n
1	2	1	2	6	7	1	1
2	10	1	4	7	10	1	1
3	14	1	1	8	1	1	1
4	21	1	3	9	22	2	2
5	1	1	1	10	10	1	4

повторять этот процесс до тех пор, пока $z(t)$ не станет равным k_i или не будут исчерпаны возможности увеличения числа рабочих, т. е. для всех работ из $\Phi(t)$ будет выполнено условие $\tilde{q}_n = \kappa_n$. Затем определим величину Δt и перейдем к следующему шагу;

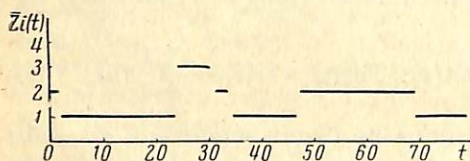


Рис. 2

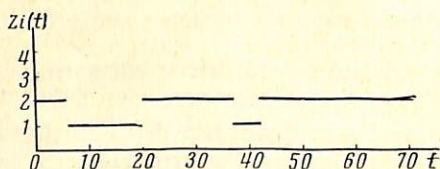


Рис. 3

3) $z_i(t) > k_i$. Очевидно, что в этом случае не могут одновременно выполняться все работы, составляющие множество $\Phi(t)$. Рассмотрим величину

$$\delta(\tilde{\Phi}) = \left(k_i - \sum_{\tilde{\Phi}(t)} q_n \right), \quad \delta \geq 0,$$

где $\tilde{\Phi}(t)$ — некоторое подмножество множества $\Phi(t)$. Среди всех подмножеств множества $\Phi(t)$ выберем такое, для которого $\delta(\tilde{\Phi})$, т. е. разница между ресурсом рабочей силы и функцией загрузки рабочих достигает минимума. В том случае, когда минимальная величина δ достигается не на одном подмножестве $\tilde{\Phi}$, следует выбрать из них то, которое получено путем исключения из $\Phi(t)$ работ, имеющих минимальную суммарную трудоемкость. Если минимальная величина δ окажется больше нуля, следует обратиться к п. 2) с целью загрузки рабочих, оказавшихся свободными.

На рис. 3 показана функция $z_i(t)$ для сетевого графика, изображенного на рис. 1.

Приведенный алгоритм позволяет приближенно заменить сетевые графики, описывающие комплексы работ по сборке узлов и изделий,

двумя величинами — величиной потребного ресурса рабочей силы k_i и длительностью выполнения комплекса при использовании такого ресурса t_i .

Заметим, что, вообще говоря, может возникнуть такая ситуация, когда для всех работ множества $\Phi(t)$ будет выполнено условие $q_n > k_i$. В этом случае следует пересмотреть выбор k_i , если протяженность по времени такого участка достаточно велика, или пренебречь временной избыточной потребностью в рабочей силе, считая, что она может быть компенсирована за счет тех участков, где ресурс k_i используется не полностью.

Теперь перейдем к рассмотрению второй части задачи. Алгоритм составления календарного плана-графика начала и окончания каждого комплекса — пошаговый и основан на применении некоторых правил предпочтения.

Введем новые обозначения: S_1 — ресурс сборочной площади, используемой для сборки изделий; S_2 — ресурс сборочной площади, используемой для сборки узлов; K_1 — ресурс рабочей силы, используемой для сборки изделий; K_2 — ресурс рабочей силы, используемой для сборки узлов; T — длительность периода планирования в тактах; i — номер изделия, $i = 1, 2, \dots, n$; ij — номер j -го узла i -го изделия, $j = 1, 2, \dots, l_i$; s_i — сборочная площадь, необходимая для сборки i -го изделия; s_{ij} — сборочная площадь, необходимая для сборки j -го узла i -го изделия; k_i — количество рабочих, используемых на сборке i -го изделия; k_{ij} — количество рабочих, используемых на сборке j -го узла i -го изделия; t_i — длительность сборки i -го изделия; t_{ij} — длительность сборки j -го узла i -го изделия; θ_{ij} — интервал времени между началом сборки i -го изделия и началом установки j -го узла; t — время в тактах, отсчитываемое от начала интервала планирования; t_{ij}^0 — время, прошедшее с начала сборки j -го узла i -го изделия.

Введем, кроме того, обозначения, связанные с новыми понятиями.

Назовем основным технологическим резервом времени для изделия с номером i величину

$$\tau_i = \begin{cases} T - t_i - t & \text{— для изделий, сборка которых не начата;} \\ 0 & \text{— для изделий, сборка которых начата.} \end{cases}$$

Ясно, что сборка i -го изделия должна быть начата не позднее, чем через τ_i тактов от момента t . В противном случае i -е изделие не может быть собрано к концу интервала планирования T .

Основным технологическим резервом времени для j -го узла i -го изделия будет величина

$$\tau_{ij}(t) = \tau_i + \theta_{ij} - t_{ij} + t_{ij}^0,$$

где τ_i имеет смысл, определенный выше. Величина τ_{ij} показывает, что если сборка узла ij начинается позднее, чем через τ_{ij} тактов от момента t , то изделие i не будет создано к моменту T .

Кроме того, введем для узлов понятие вспомогательного технологического резерва времени

$$\eta_{ij} = \theta_{ij} - t_{ij} + t_{ij}^0,$$

который определяет величину опережения или запаздывания начала сборки узла ij по отношению к началу сборки изделий i .

Обозначим через $M(t)$ множество всех значений $\tau_i(t)$ в момент t , через $m(t)$ — множество всех $\tau_{ij}(t)$ и через $\mu(t)$ — множество всех η_{ij} ; через $F(t)$ — множество номеров изделий, а через $f(t)$ — множество номеров узлов, сборка которых в момент t еще не начата.

Поставим в соответствие каждому i из $F(t)$ подмножество $f_i(t)$ множества $f(t)$, содержащее номера узлов, входящих в изделие i . Ясно, что кроме элементов, принадлежащих множеству $\bigcup_{i \in F(t)} f_i(t)$, множество $f(t)$ может содержать номера узлов, входящих в те изделия, сборка которых начата.

Далее $R(t)$ и $r(t)$ — множества номеров изделий и узлов соответственно, сборка которых происходит в момент времени t . Календарный план-график будет определен, если в каждый момент времени будут известны все элементы множеств $R(t)$ и $r(t)$.

Рассмотрим алгоритм определения элементов множества $R(t)$.

Поставим в соответствие каждому элементу $R(t)$ элемент множества $P(t)$, который представляет собой интервал времени от момента t до окончания сборки i -го изделия.

Из условия максимального использования ресурсов следует, что любое изменение $R(t)$ связано с окончанием сборки по крайней мере одного изделия. Интервал времени между двумя последовательными изменениями $R(t)$ назовем большим шагом и обозначим через ΔT .

Допустим, что в момент t шаг закончен и начинается следующий. Пусть в этот момент ресурс свободных сборочных площадей для изделий $\tilde{S}_1 \leq S_1$ и ресурс рабочей силы $\tilde{K}_1 \leq K_1$. Множество $R(t)$ в общем случае не пусто и содержит номера тех изделий, сборка которых начата и не закончена к моменту t . Следовательно, нужно определить только те элементы, которые могут быть заново включены в $R(t)$, т. е. номера изделий, сборка которых может быть начата в момент t .

Определим множество $F(t)$, а также вычислим элементы множеств $M(t)$, $m(t)$ и $\mu(t)$.

Возможны следующие варианты.

1. Все элементы множеств $M(t)$, $m(t)$ и $\mu(t)$ неотрицательны.

Определим $\tilde{\tau}_i = \min_{M(t)}(\tau_i)$ и соответствующий ему элемент $\tilde{i}$ множества $F(t)$. Пусть для данного $\tilde{i}$ выполнено $\tilde{S}_1 \geq \tilde{s}_i$ и $\tilde{K}_1 \geq \tilde{k}_i$. Тогда элемент $\tilde{i}$ должен быть исключен из $F(t)$ и включен в $R(t)$, т. е. момент времени t будет началом сборки изделия с номером $\tilde{i}$.

Для всех элементов множества $f_{\tilde{i}}(t)$ должны быть заново вычислены соответствующие им элементы множества $m(t)$ из условия $\tau_{\tilde{i}} = 0$. Ресурсы площади и рабочей силы должны быть уменьшены на $\tilde{s}_i$ и $\tilde{k}_i$ соответственно.

Если после уменьшения оба ресурса окажутся больше нуля, следует вернуться к отысканию $\tilde{\tau}_i$. Процесс включения элементов в $R(t)$ может продолжаться до тех пор, пока для очередного $\tilde{i}$ не окажется $\tilde{S}_1 < \tilde{s}_i$ или $\tilde{K}_1 < \tilde{k}_i$.

При этом могут представиться две возможности: а) в множестве $F(t)$ не найдется элемента, для которого потребные ресурсы не превышали бы наличных ресурсов $\tilde{S}_1$ и $\tilde{K}_1$; б) в множестве $F(t)$ найдется по крайней мере один такой элемент.

В случае а) формирование множества $R(t)$ следует считать законченным, а ресурсы $\tilde{S}_1$ и $\tilde{K}_1$ останутся неиспользованными. Определим длину шага ΔT как величину, совпадающую с минимальным элементом множе-

ства $P(t)$. Уменьшим все элементы $P(t)$ на ΔT . Для тех изделий, для которых соответствующий элемент $P(t)$ оказался равным 0, сборка считается законченной и освободившиеся ресурсы прибавляются к $\bar{S}_1$ и $\bar{K}_1$. Можно перейти к расчету следующего шага, началом которого будет служить момент времени $t + \Delta T$.

В случае б) нужно решить вопрос, отдать ли предпочтение изделию с наименьшим основным технологическим резервом времени и подождать пока освободятся ресурсы, необходимые для его сборки, или начать сборку изделия, имеющего больший резерв времени, и, таким образом, загрузить рабочих и сборочные площади. Поступим так: определим шаг ΔT по тем t_i , которые уже записаны в $R(t)$. Если среди элементов множества $F(t)$, удовлетворяющих условию непревышения наличных ресурсов $\bar{S}_1$ и $\bar{K}_1$, найдется такой, для которого $t_i \leq \Delta T$, включим его в $R(t)$. Если такой элемент не один, выберем те из них, которые в сумме позволят лучшим образом использовать ресурсы на интервале времени ΔT .

Рассмотрим особо тот случай, когда для всех элементов $F(t)$, удовлетворяющих условию $s_i \leq \bar{S}_1$, $k_i \leq \bar{K}_1$, t_i оказывается большим ΔT . Введем в рассмотрение величину a_i , которую назовем критическим резервом времени для изделия i . Будем считать, что предпочтение отдается изделию с наименьшим t_i тогда, когда $t_i - \Delta T \leq a_i$. Если $t_i - \Delta T > a_i$, ресурсы $\bar{S}_1$ и $\bar{K}_1$ могут быть использованы для сборки других изделий из $F(t)$.

Изучим более подробно смысл величины a_i . Пусть эта величина одинакова для всех изделий из $F(t)$. Если a будет достаточно большим положительным числом (порядка T), то основным при составлении расписания станет правило предпочтения для изделий с наименьшим t_i , если же $a = 0$, то основным станет правило максимального использования ресурсов. Изменяя величину a , можно регулировать влияние обоих правил на процесс составления расписания. Выбор a может быть алгоритмизирован и включен в программу решения задачи. В том случае, когда начальные условия (номенклатура изделий, их количество, длительность периода планирования) существенно отличаются при разных просчетах, можно воспользоваться методом распознавания образов, который позволит ввести в задачу элемент самонастройки в зависимости от начальных условий. Когда изменения начальных данных невелики, можно воспользоваться методом статистических испытаний.

Пусть теперь каждое изделие имеет свою величину a_i . Очевидно, что a_i всегда можно выбрать таким образом, чтобы дать одному изделию предпочтение перед другими. Зная конкретную ситуацию, можно с помощью a_i влиять на процесс составления расписания с целью учета различных экономических и политических факторов.

2. Все элементы множеств $M(t)$ и $m(t)$ положительны, а среди элементов $\mu(t)$ есть отрицательные. Из определения вспомогательного резерва времени следует, что сборка узлов с отрицательным η_{ij} должна быть начата раньше, чем сборка соответствующих изделий. После начала сборки узла η_{ij} будет возрастать. Сборку изделия i можно начать не ранее того момента, когда η_{ij} для всех его узлов станут неотрицательными.

Разобьем множество $F(t)$ на два подмножества. К $F_1(t)$ отнесем те элементы $F(t)$, для которых все элементы $\mu(t)$, соответствующие $f_i(t)$, неотрицательны. Остальные элементы $F(t)$ отнесем к $F_2(t)$. Применим процедуру, описанную в п. 1, к элементам множества $F_1(t)$. Если в результате множество $F_1(t)$ окажется пустым, а ресурсы не будут использованы, то ресурс рабочей силы в количестве $\bar{K}_1$ может быть использован на сборке узлов, а ресурс сборочных площадей останется неиспользованным, так как элементы $F_2(t)$ не могут быть включены в $R(t)$ ввиду условия непрерывности сборки каждого изделия и узла.

3. Среди элементов множеств $M(t)$ и $m(t)$ есть отрицательные. В этом случае сборка всех изделий не может быть закончена к моменту T . Следует исключить из $F(t)$ изделия, имеющие $\tau_i < 0$, или те изделия, для которых узлы имеют $\tau_{ij} < 0$, или увеличить период планирования на такую величину, которая обеспечила бы положительность всех элементов $M(t)$ и $m(t)$.

Планирование сборки узлов ведется параллельно с планированием сборки изделий с малым шагом Δt , соответствующим изменениям множества $r(t)$. Моменты изменения множества $R(t)$ и $r(t)$, вообще говоря, не совпадают, но прежде чем сделать очередной малый шаг следует проанализировать состояние подмножеств $F_1(t)$ и $F_2(t)$ множества $F_1(t)$. Если множество $F_1(t)$ не пусто, алгоритм включения узлов в множество $r(t)$ будет совпадать с алгоритмом включения изделий в $R(t)$, описанным в п. 1, причем ресурс рабочей силы $\bar{K}_2$ в каждый момент времени может быть увеличен на число рабочих $\bar{K}_1$, не занятых на сборке изделий. Алгоритм включения узлов в $r(t)$, когда $F_1(t)$ пусто, требует специального рассмотрения.

Очевидно, что в этом случае нужно исходить из условия наиболее быстрой загрузки ресурсов, предназначенных для сборки изделий.

Для каждого из подмножеств $f_i(t)$, соответствующих элементам множества $F_2(t)$, найдем величину $\tilde{\eta}_i = \min_{ij \in f_i(t)} (\eta_{ij})$. По определению вспомо-

гательного резерва времени, сборка изделия i может быть начата не ранее, чем через η_j тактов от момента t . Найдем номер $\tilde{i}$ изделия, сборка которого может быть начата раньше, чем сборка других изделий из множества $F_2(t)$. Ясно, что $\tilde{i}$ будет определено, если мы найдем $\tilde{\eta}_{\tilde{i}} = \max_{i \in F_2(t)} \tilde{\eta}_i$

Если через $\tilde{\eta}_i$ тактов сборка изделий $\tilde{i}$ может быть обеспечена необходимыми ресурсами, то узлы, входящие в множество $f_i(t)$, будут иметь приоритет при включении в $r(t)$ по сравнению с другими узлами за исключением узлов тех изделий, сборка которых уже начата.

Решение задачи заканчивается, когда множества $F(t)$ и $f(t)$ окажутся пустыми.

Поступила в редакцию
24 III 1969