ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1970 том VI, вып. 4

# ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ СЕТЕВУЮ ПОСТАНОВКУ

Б. Г. ЛИТВАК, А. М. РАППОПОРТ

*(Москва)*

Важное место среди задач линейного программирования занимают задачи, допускающие сетевую постановку. К их числу относится задача о циркуляции минимальной стоимости

$$\sum_{(s,\,p)\in Q} d(s,p)f(s,p)\to \min \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{(s,\,p)\in Q} f(s,p)-\sum_{(r,\,s)\in Q} f(r,s)=0,\quad s=1,\ldots,N, \tag{2}$$

$$0\leqslant l(s,\,p)\leqslant f(s,\,p)\leqslant c(s,\,p),\qquad (s,\,p)\in Q, \tag{3}$$

где $l(s,\,p)$, $c(s,\,p)$ — целые числа (не уменьшая общности, можно считать целыми числами и $d(s,\,p)$), $Q$ — множество дуг сети; $N$ — число узлов сети; $d(s,\,p)$ — дуговая стоимость дуги $(s,\,p)$; $c(s,\,p)$ — верхняя граница потока по дуге $(s,\,p)$; $l(s,\,p)$ — нижняя граница потока по дуге $(s,\,p)$; $f(s,\,p)$ — поток по дуге $(s,\,p)$.

Для этих задач, имеющих важную практическую интерпретацию, разработаны эффективные методы решения (см. [1]).

При рассмотрении некоторой задачи линейного программирования естественно попытаться выяснить, не сводится ли она к известной сетевой задаче. Этот вопрос изучался авторами в [2] для задач с матрицами ограничений специального типа. Используемое в ней определение сводимости позволяет также сделать вывод о вполне унимодулярности* матриц ограничений рассматриваемых задач.

Известно, что если матрица ограничений задачи линейного программирования вполне унимодулярна, то она имеет целочисленное решение при любых целочисленных значениях компонент вектора ограничений (см. [3, 4]). Изучению матриц, обладающих свойством вполне унимодулярности, посвящены соответствующие разделы в [4—7].

В настоящей работе приводятся условия сводимости задачи линейного программирования к задаче о циркуляции минимальной стоимости и описывается процесс построения соответствующей сетевой задачи.

Под сводимостью понимается следующее: задача $P_1$ с переменными $x_1,\ldots,x_n$ сводится к задаче $P_2$ с переменными $y_1,\ldots,y_m$, $n\leqslant m$, если можно указать такие номера $\psi(1),\ldots,\psi(n)$, $(\psi(i)\neq\psi(j))$, что из оптимальности вектор-решения $(y_1{}^0,\ldots,y_m{}^0)$ задачи $P_2$ следует оптимальность вектор-решения $(x_1{}^0,\ldots,x_n{}^0)=(y^0_{\psi(1)},\ldots,y^0_{\psi(n)})$ задачи $P_1$.

* Вполне унимодулярной называется матрица, каждый минор который равен либо $\pm1$, либо 0.

Приводятся более общие, чем в [6], достаточные условия вполне унимодулярности матриц.

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования $P$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \to \min \tag{4}$$

при ограничениях

$$b_i' \leqslant \sum_{j=1} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

где $a_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0, \\ -1, \end{cases}$ $b_i'$, $b_i$ — целые числа

(не уменьшая общности, можно считать, что $a_j$ — также целые числа), и соответствующую ей задачу о циркуляции минимальной стоимости $T(P)$, к которой, как будет показано, сводится задача $P$.

Перейдем к определению задачи $T(P)$.

Множество дуг $Q$ сети задачи $T(P)$ состоит из трех попарно непересекающихся подмножеств $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$; $Q_1$ состоит из $n$ дуг $(s_j, p_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, с дуговыми стоимостями $a_j$, $j = 1, \ldots, n$, и пропускными способностями $\infty$. Такую дугу $(s_j, p_j)$ будем иногда обозначать через $(s, p)_j$, а поток по ней — через $f_j$, где $f_j = f(s, p)_j$.

Между переменными $x_j$ и дугами $(s, p)_j$ установим взаимно-однозначное соответствие: $x_j \leftrightarrow (s, p)_j$, положим $f_j = x_j$. Дугу $(s, p)_j$ назовем дугой, соответствующей переменной $x_j$. Уравнения (2) обычно называются уравнениями сохранения в узлах $1, \ldots, N$; обозначим их через $U_s$, $s = 1, \ldots, N$. С помощью уравнений сохранения поток по любой дуге $(s', p')$ можно выразить через потоки по некоторым другим дугам сети

$$f(s', p') = \sum_{(s,\, p) \in Q} \alpha(s, p) f(s, p),$$

где $\alpha(s, p)$ — целые числа, $\alpha(s', p') = 0$. Правую часть этого соотношения назовем **промежуточным** представлением потока $f(s', p')$ и обозначим $\Pi p f(s', p')$. Промежуточное представление потока $f(s', p')$ через потоки по дугам, соответствующим переменным, назовем представлением потока $f(s', p')$ и обозначим $\Pi f(s', p')$. Чтобы подчеркнуть, что первым применялось уравнение сохранения $U_{s'}$ или $U_{p'}$, будем писать соответственно $\Pi p^{s'} f(s', p')$ или $\Pi^{p'} p f(s', p')$, $\Pi^{s'} f(s', p')$ или $\Pi^{p'} f(s', p')$).

Узел $s'(p')$ будем иногда называть представляющим узлом для дуги $(s', p')$.

С каждым представлением свяжем $n$-мерный вектор коэффициентов, который также обозначим через $\Pi f(s', p')$.

Заметим, что ограничения (5) задачи $P$ могут быть двух типов в зависимости от соотношений между $b_i$ и $b_i'$: 1) $b_i \geqslant b_i' \geqslant 0$, 2) $b_i > 0$, $b_i' < 0$.

Случай $0 \geqslant b_i \geqslant b_i'$ сводится к случаю 1) умножением неравенства на $-1$.

Дугой, соответствующей $i$-му ограничению типа 1), назовем дугу $(s, p)$, для которой существует представление потока

$$\Pi f(s,p) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j \quad \text{и}$$

$$c(s, p) = b_i, \quad l(s, p) = b_i', \quad d(s, p) = 0.$$

Пару дуг $(s, p)$ и $(p, s)$ назовем дугами, соответствующими $i$-му ограничению типа 2), если существует

$$\Pi f(s,p) = \sum_{j=1} \alpha_{ij} x_j \quad \text{и}$$

$$c(s, p) = b_i, \quad l(s, p) = 0, \quad c(p, s) = -b_i', \quad l(p, s) = 0,$$
$$d(s, p) = d(p, s) = 0.$$

Считаем, что для каждого ограничения в $Q$ имеется точно одна дуга (пара дуг), соответствующих ему. Не уменьшая общности, можно также считать, что $f(s, p) \cdot f(p, s) = 0$.

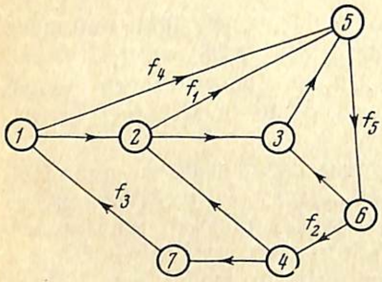


Рис. 1

Дуги, соответствующие ограничениям типа 1) или типа 2), образуют подмножество дуг $Q_2$ *.

Дуги, не соответствующие переменным или ограничениям, образуют подмножество дуг $Q_3 : Q_3 = Q \setminus (Q_1 \cup Q_2)$.

**Пример 1.** Рассмотрим сеть $S$, изображенную на рис. 1, где дуги (1,2), (2,3), (3,5), (6,3), (4,2), (4,7) $\in Q_2$, а дуги (2,5), (6,4), (7,1), (1,5), (5,6) соответствуют переменным $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, например $f(2,5) = f(2,5)_1 = f_1$. Не трудно видеть, что для потока по дуге (2,3) существуют следующие промежуточные представления потока: $\Pi_p^2 f(2,3) = -f_1 + f(1,2) + f(4,2) = -f_1 + f_3 - f_4 + f(4,2) = -f_1 + f_3 - f_4 + f_2 - f(4,7) = -f_1 + f_2 - f_4$; $\Pi^2 f(2,3) = -f_1 + f_2 - f_4$; $\Pi_p^3 f(2,3) = f(3,5) - f(6,3) = -f_1 + f_5 - f_4 - f(6,3) = -f_1 + f_2 - f_4$; $\Pi^3 f(2,3) = -f_1 + f_2 - f_4$.

Вектор (—1,1, 0—1,0) есть вектор коэффициентов представления потока по дуге (2,3).

Будем говорить, что задача о циркуляции минимальной стоимости $T(P)$ является соответствующей для задачи линейного программирования $P$, если для каждой переменной $x_j$, $j = 1, \ldots, n$, и каждого из ограничений (5) существуют дуги сети задачи $T(P)$, соответствующие им **.

Рассмотрим совокупность векторов $E$:
$e_1 = \{e_{11}, \ldots, e_{1n}\}, \ldots, e_m = \{e_{m1}, \ldots, e_{mn}\}$, компонентами которых являются элементы $0, 1, -1, \otimes$.

* Не следует путать $\alpha(s, p)$ с $\alpha_{ij}$, хотя в представлении потока по дугам, соответствующим $i$-му ограничению $\alpha_{ij} = \alpha(s, p)_j$.

** Две задачи, отличающиеся лишь целочисленными векторами ограничений $(b_1, \ldots, b_m, b_1', \ldots, b_m')^T$ и $(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m, \bar{b}_1', \ldots, \bar{b}_m')^T$, не нарушающими тип ограничений, и векторами коэффициентов линейной формы, не различаются.

Введем отношение $<$ между элементами

$$\begin{array}{llll} 0<0; & 1<1; & -1<-1; & \otimes<\otimes; \\ 0<1; & 1<\otimes; & -1<\otimes; & \\ 0<-1; & & & \\ 0<\otimes & & & \end{array}$$

и между векторами $e_{i_1} < e_{i_2}$, если $e_{i_1j} < e_{i_2j}$, $j = 1, \ldots, n$. Это отношение, как легко видеть, является отношением порядка.

Два вектора $e_{i_1}$ и $e_{i_2}$ назовем сильно несравнимыми, если их соответствующие одновременно не равные 0 компоненты несравнимы.

Введем операции $(*)$, $(**)$, $(***)$, применяемые к векторам $e_i \in E$. Операция $(*)$ состоит в замене каждой компоненты из некоторого подмножества нулевых компонент вектора $e_i$ на $\otimes$. Операция $(**)$ состоит в умножении $e_i$ на $-1$, при этом $(-1)\cdot\otimes=\otimes$; $(-1)\cdot 1=-1$; $(-1)\cdot(-1) = 1$, $(-1)\cdot 0 = 0$. Операция $(***)$ состоит в замене каждой компоненты из некоторого подмножества компонент вектора $e_i$, равный $\otimes$, на 0.

Совокупность векторов $E$: $e_1, \ldots, e_m$ образует нормальное $M$-семейство, если $E$ содержит максимальный вектор $e_{i_1}$ $(e_i < e_{i_1},\ i = 1, \ldots, m)$ и любые два вектора из $E$ либо сравнимы, либо сильно несравнимы.

Совокупность векторов $E$: $e_1, \ldots, e_m$ образует $M$-семейство, если $E$ операциями $(*)$, $(**)$, $(***)$ может быть приведена к нормальному $M$-семейству.

**Пример 2.**

$$\begin{array}{llll} E: & e_1 = (1, 1, 1, 1) & E': & e_1' = (\otimes, 1, \otimes, 1), \\ & e_2 = (0, 1, 0, 1) & & e_2' = (1, 1, 1, 1,) \\ & e_3 = (1, 1, 0, 0) & & e_3' = (1, 1, 0, 0) \\ & e_4 = (0, 0, -1, -1) & & e_4' = (0, 0, 1, 1). \end{array}$$

Совокупность векторов $E'$ является нормальным $M$-семейством, $e_1'$ получен из $e_2$ с помощью операции $(*)$, $e_2' = e_1$, $e_3' = e_3$, $e_4'$ получен из $e_4$ с помощью операции $(**)$, т. е. $e_4' = -e_4$. Следовательно, совокупность векторов $E$ является $M$-семейством.

**Пример 3.**

$$\begin{array}{ll} E: & e_1 = (1, 1, 0), \\ & e_2 = (1, 0, 1), \\ & e_3 = (0, 1, 1). \end{array}$$

Совокупность векторов $E$ не является $M$-семейством, так как при помощи операций $(*)$, $(**)$, $(***)$ нельзя получить нормальное $M$-семейство.

Напомним ряд определений теории графов, используемых в работе.

Цепью называется последовательность дуг $(s_1, p_1), \ldots, (s_r, p_r)$, каждые две соседние дуги которой имеют общий узел и ни один узел не встречается дважды.

Циклом называется последовательность дуг $(s_1, p_1), \ldots, (s_r, p_r)$, отличающаяся от предыдущей только тем, что она начинается и заканчивается в одном и том же узле.

Сеть, два любые узла которой соединены цепью, называется связной.

Деревом называется связная сеть без циклов, деревом-остовом сети — дерево, дуги которого инцидентны всем узлам сети.

Для удобства изложения сеть задачи $T(P)$ обозначим через $S$, ее подсеть, состоящую из дуг подмножества $Q_i$, $i = 1, 2, 3$, через $S_i$.

Не уменьшая общности, сеть $S$ будем считать связной, конечной, не содержащей петель, т. е. дуг вида $(s, s)$ и висячих узлов.

**Теорема 1.** *Для задачи линейного программирования P существует соответствующая задача о циркуляции минимальной стоимости $T(P)$ тогда и только тогда, когда строки ее матрицы ограничений $A = \|a_{ij}\| i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$, образуют М-семейство.*

Необходимость. Доказательство необходимости содержит 5 лемм. Леммы 1—4 доказывают утверждение в случае, когда подмножество дуг $Q_3$ сети задачи $T(P)$ пусто. Лемма 5 позволяет отказаться от этого допущения.

Тип ограничений задачи $P$ для каждого $i$, $i = 1, \ldots, m$, известен. Пусть задача $P$ имеет соответствующую задачу о циркуляции минимальной стоимости $T(P)$. Для любой допустимой циркуляции потоки по дугам сети задачи $T(P)$ определены, а значит и определены дуги, соответствующие ограничениям, потоки по которым отличны от нуля. Одну дугу из каждой пары дуг, соответствующих ограничению типа 2), поток по которой равен нулю, удаляем из сети. Поэтому в дальнейших рассуждениях будем предполагать, что у нас вместо пары дуг, соответствующих ограничениям типа 2), одна — ориентированная дуга.

**Лемма 1.** *Подсеть $S_2$ является деревом-остовом сети $S$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что в любом промежуточном представлении потока по дуге цикла число потоков по другим дугам цикла всегда нечетно. Поэтому, если бы в подсети $S_2$ имелся цикл, то в любое промежуточное представление потока по дуге цикле $(s, p)$ входил бы поток по некоторой другой дуге, также принадлежащей циклу; это противоречит тому, что $(s, p) \in Q_2$.

Таким образом, подсеть $S_2$ не содержит циклов; покажем теперь, что она связна.

Предположим противное, тогда найдутся дуги $(s, p) \in Q_2$ и $(s', p') \in Q_2$, не соединеные в $S_2$ цепью. Рассмотрим подсеть, узлы которой соединены цепями с узлом $s$ в $S_2$, а дуги принадлежат $Q_2$. Как доказано выше, эта подсеть является деревом. Висячим узлам этого дерева инцидентны в сети $S$ дуги из $Q_1$ (соответствующие переменным), поэтому в результате применения уравнений сохранения в узлах дерева получим $\sum_{l=1}^{k_s} a_{j_l} f_{j_l} = 0$ (тождественное равенство нулю невозможно, так как сеть $S$ связна). Полученное соотношение означает, что среди ограничений задачи $P$ всегда должно быть ограничение с $b_i = b_i' = 0$, и противоречит тому, что $b_i$, $b_i'$ — любые (см. сноску на стр. 596).

По тем же соображениям любому узлу сети $S$ инцидентны дуга из $Q_2$. Отсюда заключаем, что подсеть $S_2$ является деревом-остовом сети $S$.

**Лемма 2.** *Для потока по любой дуге $(s, p) \in Q_2$ существуют $\Pi^p f(s, p)$ и $\Pi^s f(s, p)$, при этом $\Pi^p f(s, p) = \Pi^s f(s, p)$.*

Доказательство. Задача $T(P)$ является соответствующей для задачи $P$, поэтому для всякой дуги $(s, p) \in Q_2$ существует представление потока. Пусть для определенности $\Pi^s f(s, p)$. Покажем, что тогда существует $\Pi^p f(s, p)$ и $\Pi^p f(s, p) = \Pi^s f(s, p)$. Рассмотрим узлы сети $S$, которые соединены с узлом $p$ в подсети $S_2$ цепями, не содержащими дуги $(s, p)$. Эти узлы и дуги из $Q_2$, им инцидентные, образуют по лемме 1 дерево. Нетрудно видеть, что, применяя все уравнения сохранения в узлах этого дерева и переходя от одного промежуточного представления $\Pi_p{}^p f(s, p)$ к другому, получим искомое представление $\Pi^p f(s, p)$.

Единственность $\Pi f(s, p)$ следует из того, что определитель порядка $m$ матрицы инциденций сети $S$ со столбцами, соответствующими дугам из $Q_2$, отличен от нуля (см. [6]), а значит в силу уравнений сохранения потоки по этим дугам однозначно представимы через потоки по дугам из $Q_1$.

Таким образом, потоки по дугам подсети $S_2$, являющейся деревом-остовом, имеют единственные представления. Покажем теперь, что векторы коэффициентов этих представлений приводятся операциями (*), (**) к нормальному $M$-семейству, т. е. образуют $M$-семейство.

**Лемма 3.** *Для дуг подсети $S_2$ можно так выбрать представляющие узлы, чтобы каждый узел, кроме некоторого узла $s_0$, был представляющим для одной и только одной дуги из $S_2$, а узел $s_0$ ни для одной дуги из $S_2$.*

Доказательство. Подсеть $S_2$ является деревом, поэтому найдется такая дуга $(s_0, p_0) \in Q_2$, что узлу $s_0$ инцидентны, за исключением дуги $(s_0, p_0)$, только дуги из подсети $S_1$. Будем считать узел $p_0$ представляющим для дуги $(s_0, p_0)$ (любой узел $p$ соединен единственной цепью в $S_2$ с узлом $p_0$), а узел $p$ — представляющим для дуги $(s, p)$, где $s$ предшествует $p$ в цепи, соединяющей $p_0$ с $p$. Тогда узел $s_0$ не является представляющим ни для одной дуги из $S_2$. Лемма доказана.

Если в сети $S$ все дуги из $S_2$ направим от непредставляющего узла к представляющему, то получим новую сеть, которую обозначим через $S^*$. При этом, если ориентация дуги при переходе от $S$ к $S^*$ изменилась, то к вектору коэффициентов представления потока по этой дуге применена операция (**) и представление потока обозначается в $S^*$ через $\Pi^* f(s, p)$.

**Лемма 4.** *Векторы коэффициентов представлений потоков по дугам подсети $S_2$ образуют $M$-семейство.*

Доказательство. Пусть дуга $(s_1, p_1)$ предшествует дуге $(s_2, p_2)$ в направленной цепи $C$, соединяющей узел $s_0$ с узлом $p_2$ в подсети $S_2^*$, и для дуги $(s_2, p_2)$ имеется в $S^*$ представление потока

$$\Pi^* f(s_2, p_2) = \sum_{(s,\,p) \in Q_1} \alpha(s, p) f(s, p),$$

где $\alpha(s, p) = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \\ \otimes \end{cases}$ Нетрудно видеть, что тогда поток по дуге $(s_1, p_1)$ допускает в $S^*$ представление

$$\Pi^* f(s_1, p_1) = \sum_{(s,\,p) \in Q_1} \alpha(s, p) f(s, p) + \sum_{(s,\,p) \in Q_1} \beta(s, p) f(s, p),$$

где $\beta(s, p) = .\begin{cases} 0 \\ \pm 1 \\ \otimes \end{cases}$ и в $\Pi^* f(s_2, p_2)$ некоторые $\alpha(s, p)$ заменены на $\otimes$; $\alpha(s, p)$ заменяется на $\otimes$, если в $\Pi^* f(s_2, p_2)$ входил поток с коэффициентом 1 или $-1$, и дуга $(s, p)_j$ инцидентна узлам, отличным от узлов, принадлежащих хоть одной направленной цепи в подсети $S_2^*$, начинающейся в узле $s_0$ и не содержащей дуги $(s_1, p_1)$. Поэтому получаем

$$\Pi^* f(s_1, p_1) > \Pi^* f(s_2, p_2).$$

Последовательно выпишем представления потоков для дуг всех цепей, соединяющих узел $s_0$ с висячими узлами в $S_2^*$, начиная в каждой цепи с дуг, инцидентных висячим узлам. При этом, как описано выше, некоторые $\alpha(s, p)$ будут заменяться на $\otimes$, что и означает применение операции (*). Таким образом, вектор коэффициентов представления потока по дуге $(s_0, p_0)$ является максимальным и $\Pi^* f(s_1, p_1) > \Pi^* f(s_2, p_2)$, где $(s_1, p_1)$, $(s_2, p_2)$ — любые дуги из $Q_2^*$ и $(s_1, p_1)$ предшествует $(s_2, p_2)$ в направленной цепи $C$ в подсети $S_2^*$.

Покажем теперь, что если дуги $(s_1, p_1)$, $(s_2, p_2)$ не соединены в подсети $S_2^*$ направленной цепью, то векторы коэффициентов представлений $\Pi^*f(s_1, p_1)$ и $\Pi^*f(s_2, p_2)$ сильно несравнимы. Дуги $(s_1, p_1)$, $(s_2, p_2)$ не принадлежат одной направленной цепи в $S_2^*$, начинающейся в узле $s_0$, иначе и между ними в $S_2^*$ была бы направленная цепь. Пусть нашлась дуга, соответствующая переменной $x_j$, поток по которой $f_j$ входит в $\Pi^*f(s_1, p_1)$ и в $\Pi^*f(s_2, p_2)$ с одинаковым знаком. Тогда $\Pi^*f(s_0, p_0) = \Pi^*f(s_1, p_1) + \Pi^*f(s_2, p_2) + \ldots$ и $f_j(-f_j)$ входит в $\Pi^*f(s_0, p_0)$ с коэффициентом, отличным от 0, $\otimes$, $\pm 1$. Это противоречит тому, что дуга $(s_0, p_0) \in Q_2^*$ и представление потока единственно.

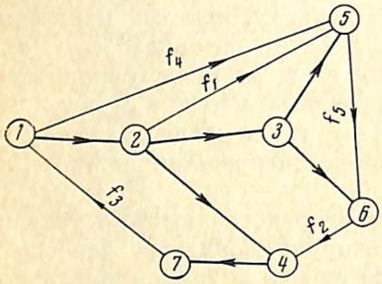


Рис. 2

Таким образом, векторы коэффициентов полученных представлений потоков $\Pi^*f(s, p)$ по дугам подсети $S_2^*$ образуют нормальное $M$-семейство, а векторы коэффициентов представлений потоков по дугам подсети $S_2$ операциями (*), (**) приводятся к нему, что и требовалось доказать.

**Пример 4.** Рассмотрим сеть $S^*$, изображенную на рис. 2, она отличается от сети $S$ (рис. 1) ориентациями дуг. Выписывая векторы коэффициентов представлений потоков по дугам $S_2^*$, в соответствии с леммой 4, получаем нормальное $M$-семейство.

$$
\begin{array}{lrrrrr}
\Pi^*f\,(1,2): & \otimes & \otimes & 1 & -1 & \otimes \\
\Pi^*f\,(2,3): & -1 & 1 & 0 & -1 & \otimes \\
\Pi^*f\,(3,6): & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
\Pi^*f\,(3,5): & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\Pi^*f\,(2,4): & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
\Pi^*f\,(4,7): & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

**Лемма 5.** *Векторы коэффициентов представлений потоков по дугам из $S_2$ в сети $S$ с $Q_3 \neq \varnothing$ образуют $M$-семейство.*

Доказательство. По сети $S$ задачи $T(P)$ построим сеть $S'$ задачи $T'(P)$, в которой $Q_3' = \varnothing$. Так как задачи $T(P)$ и $T^1(P)$ являются соответствующими для задачи $P$, то для любой дуги $(s, p)$, принадлежащей $Q_2$, должна найтись дуга $(s', p')$, принадлежащая $Q_2'$, для которой $\Pi f(s', p') = \Pi f(s, p)$. Для этого введем операцию стягивания дуги $(s, p) \in Q$: дуга $(s, p)$ удаляется из сети $S$, узлы $s$ и $p$ заменяются новым узлом, которому инцидентны дуги, инцидентные $s$ или $p$. Ориентация дуг сохраняется.

Перейдем от сети $S$ к сети $S^1$, полученной в результате стягивания произвольной дуги $(s, p) \in Q_3$. Произвольной дуге $(\bar{s}, \bar{p}) \in Q_2$ в подсети $S_2^1$ соответствует дуга $(\bar{s}^1, \bar{p}^1) \in Q_2^1$, где узлы $\bar{s}^1$, $\bar{p}^1$ совпадают с прежними узлами $\bar{s}$, $\bar{p}$, либо один из них $\bar{s}^1(\bar{p}^1)$ является новым узлом, полученным применением операции стягивания дуги $(s, p) \in Q_3$. Сеть $S^1$ является сетью задачи о циркуляции минимальной стоимости, соответствующей задаче $P$. В самом деле, для получения $\Pi f(\bar{s}^1, \bar{p}^1)$ либо были применены и $U_s$ и $U_p$, либо ни одно из них. В противном случае в любое $\Pi pf(\bar{s}^1, \bar{p}^1)$ входит поток по дуге $(s, p) \in Q_3$. Ясно, что в обоих случаях $\Pi f(\bar{s}^1, \bar{p}^1) = \Pi f(\bar{s}, \bar{p})$.

Применяя последовательно операцию стягивания дуг, принадлежащих подмножеству $Q_3^1$ сети $S^1$, получим сеть $S'$ задачи $T'(P)$, в которой $Q_3' = \varnothing$. По лемме 4 векторы коэффициентов представлений потоков по дугам подсети $S_2'$ сети $S'$ образуют $M$-семейство, откуда непосредственно следует утверждение леммы.

Из леммы 5 и определения представлений потоков по дугам, соответствующим ограничениям сети $S$ задачи $T(P)$, непосредственно следует, что строки матрицы ограничений задачи $P$ также образуют $M$-семейство. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть строки матрицы ограничений $A$ задачи $P$ образуют $M$-семейство. Применяя операции (*) и (**) к строкам матрицы $A$, получим нормальное $M$-семейство векторов $A'$, т. е. частично упорядоченное множество векторов, среди которых есть максимальный, и любые два из них либо сравнимы, либо сильно несравнимы.

Максимальным подвектором вектора $e_{i_1}$ будем называть вектор $e_{i_2}$, $e_{i_2} < e_{i_1}$ такой, что не существует вектора $e_{i_3} \in A'$, для которого $e_{i_1} > e_{i_3} > e_{i_2}$.

Построим сеть задачи $T(P)$. Для этого построим сначала подсеть дуг $S_2$, соответствующих ограничениям, используя структуру $A'$, по каждому вектору которого однозначно определяется строка матрицы $A$.

Векторы из $A'$ и ограничения задачи $P$ (строки матрицы $A$) будем нумеровать в процессе построения подсети $S_2$. Построение проводится по шагам.

**0-й шаг.** Строим два узла 0 и 1. Если максимальный вектор $e_1$ образует ограничение 1 типа 1), то проводим дугу $(1, 0)$, полагая $c\ (1, 0) = b_1$, $l(1, 0) = b_1'$, $d(1, 0) = 0$. Если же его образует ограничение 1 типа 2), то проводим пару дуг $(1, 0)$ и $(0, 1)$, полагая $c(1, 0) = b_1$, $l(1, 0) = 0$, $d(1, 0) = 0$, $c(0, 1) = -b_1'$, $l(0, 1) = 0$, $d(0, 1) = 0$. Таким образом построена дуга (дуги), соответствующая ограничению 1.

**1-й шаг.** Выделим максимальные подвекторы вектора $e_1$: $e_2, e_3, \ldots, e_{r_1}$. Строим узлы $2, 3, \ldots, r_1$.

Возможны следующие случаи 1а, 1в, 2а, 2в.

1. Вектор $e_r$, $r \in \{2, 3, \ldots, r_1\}$ образован ограничением $r$ типа 1).
2. Вектор $e_r$, $r \in \{2, 3, \ldots, r_1\}$ образован ограничением $r$ типа 2).

a) Для получения $e_r$ не применялась операция (**).

b) Для получения $e_r$ применялась операция (**).

В случае 1а проводим дугу $(r, 1)$, полагая $c(r, 1) = b_r$, $l(r, 1) = b_r'$, $d(r, 1) = 0$.

В случае 2а проводим дугу $(1, r)$, полагая $c(1, r) = b_r$, $l(1, r) = b_r'$, $d(1, r) = 0$.

В случае 2а проводим пару дуг $(r, 1)$ и $(1, r)$, полагая $c(r, 1) = b_r$, $l(r, 1) = 0$, $d(r, 1) = 0$, $c(1, r) = -b_r'$, $l(1, r) = 0$, $d(1, r) = 0$.

В случае 2b проводим пару дуг $(r, 1)$ и $(1, r)$, полагая $c(r, 1) = -b_r'$, $l(r, 1) = 0$, $d(r, 1) = 0$, $c(1, r) = b_r$, $l(1, r) = 0$, $d(1, r) = 0$.

Таким образом построены дуги (пары дуг), соответствующие ограничениям $2, 3, \ldots, r_1$.

**k-й шаг.** Рассмотрим максимальные подвекторы вектора с номером $r_{k-2} + 1$: векторы с номерами $r_{k-1} + 1, \ldots, r_{k-1} + r_{k_1}$, где $r_{k_1}$ — число максимальных подвекторов вектора $r_{k-2} + 1$. Строим узлы $r_{k-1} + 1, \ldots$ $\ldots, r_{k-1} + r_{k_1}$.

Для каждого вектора с номером $r \in \{r_{k-1} + 1, \ldots, r_{k-1} + r_{k_1}\}$ возможен один из четырех случаев 1а, 1b, 2а, 2b, описанных выше. В каждом из них поступаем так же, как и на 1-м шаге, но вместо узла 1 берется узел $r_{k-2} + 1$.

После этого так же, как с вектором, имеющим номер $r_{k-2} + 1$, и его максимальными подвекторами поступаем с векторами, имеющими номера $r_{k-2} + 2$, $r_{k-2} + 3, \ldots, r_{k-1}$, и с их максимальными подвекторами.

Таким образом, построены дуги (пары дуг), соответствующие ограничениям $r_{k-1}+1, \ldots, r_k$.

Процесс заканчивается, когда построены дуги (пары дуг), соответствующие всем ограничениям (5) задачи $P$, т. е. когда $r_k = m$. Последнее будет осуществлено, так как строки матрицы ограничений $A$ образуют $M$-семейство.

После того как построена подсеть $S_2$, строим подсеть $S_1$ дуг, соответствующих переменным.

Рассмотрим векторы $e_1, \ldots, e_m$.

Если $j$-й компонентой максимального вектора $e_1$ является элемент $\otimes$, то оба узла дуги, соответствующей переменной $x_j$, принадлежат множеству узлов $\{1, \ldots, m\}$. Если среди векторов из $A'$ есть векторы с $j$-й компонентой 1 и векторы с $j$-й компонентой $-1$, то проводим дугу $(i_1, i_2)$, где $i_1 = \max\{i : e_{ij} = 1\}$; $i_2 = \max\{i : e_{ij} = -1\}$, полагая $d(i_2, i_1) = a_j$, $c(i_2, i_1) = \infty$, $l(i_2, i_1) = 0$. Если среди векторов из $A'$ есть векторы с $j$-й компонентой 1, но отсутствуют векторы с $j$-й компонентой $-1$, то проводим дугу $(i_2, i_1)$, где $i_1 = \max\{i : e_{ij} = 1\}$, $i_2 = \max\{i : e_{ij} = \otimes\}$, полагая $d(i_2, i_1) = a_j$, $c(i_2, i_1) = \infty$, $l(i_2, i_1) = 0$. Если среди векторов из $A'$ есть векторы с $j$-й компонентой $-1$, но отсутствуют векторы с $j$-й компонентой 1, то проводим дугу $(i_1, i_2)$, где $i_1 = \max\{i ; e_{ij} = -1\}$, $i_r = \max\{i : e_{ij} = \otimes\}$, полагая $d(i_1, i_2) = a_j$, $c(i_1, i_2) = \infty$, $l(i_1, i_2) = 0$.

Если $j$-й компонентой максимального вектора $e_1$ является 1, то проводим дугу $(0, i_1)$, где $i_1 = \max\{i : e_{ij} = -1\}$, полагая $d(0, i_1) = a_j$, $c(0, i_1) = \infty$, $l(0, i_1) = 0$.

Если $j$-й компонентой максимального вектора $e_1$ является $-1$, то проводим дугу $(i_1, 0)$, где $i_1 = \max\{i : e_{ij} = -1\}$, полагая $d(i_1, 0) = a_j$, $c(i_1, 0) = \infty$, $l(i_1, 0) = 0$.

Заметим, что если $e_{ij} \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$, так как в противном случае переменная $x_j$ входит во все $m$ ограничений (5) задачи $P$ с коэффициентом 0.

Построенная сеть является сетью задачи $T(P)$, соответствующей задаче $P$, так как по построению для каждой переменной и каждого ограничения задачи $P$ найдутся дуги, им соответствующие. Достаточность доказана. Заметим, что в построенной сети $Q_3 = \phi$.

Пусть строки матрицы ограничений $A$ задачи $P$ образуют $M$-семейство. Построим сеть $S$ соответствующей ей задачи $T(P)$. Покажем, что в этом случае оптимальным решением задачи $P$ будет $x_j{}^0 = f_j{}^0$, $j = 1, \ldots, n$, где $f_1{}^0, \ldots, f_n{}^0$ — потоки по дугам, соответствующим переменным в оптимальном решении задачи $T(P)$. Действительно, пусть в результате решения задачи $T(P)$ найдена циркуляция минимальной стоимости $f^0(s, p)$, $(s, p) \in Q$, минимизирующая линейную форму $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j f_j$. Линейная форма задачи $T(P)$ записывается в таком виде, поскольку дуговые стоимости дуг из $Q \setminus Q_1$ равны 0.

Перейдем к новой циркуляции минимальной стоимости $f^{0\prime}(s, p)$, $(s, p) \in Q$: $f^{0\prime}(s, p) = f^0(s, p) - \min\{f^0(s, p), f^0(p, s)\}$; $f^{0\prime}(p, s) = f^0(p, s) - \min\{f^0(s, p), f^0(p, s)\}$, если $(s, p)$, $(p, s)$ — пара дуг, соответствующих ограничениям типа 2), $f^{0\prime}(s, p) = f^0(s, p)$ для всех остальных дуг сети.

Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_j f_j{}^{0\prime} = \sum_{j=1}^{n} a_j f_j{}^0.$$

Покажем, что вектор $X^0$ с компонентами $x_j^0 = f_j^{0\prime}$, $j = 1, \ldots, n$, является оптимальным решением задачи $P$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j^{0\prime} = \begin{cases} f^{0\prime}(s, p), & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} f_j^{0\prime} \geqslant 0, \\ f^{0\prime}(p, s), & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} f_i^{0\prime} < 0, \end{cases}$$

где $(s, p)$ и $(p, s)$ — пара дуг, соответствующих $i$-му ограничению, если оно является ограничением типа 2)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j^{0\prime} = f^{0\prime}(s, p),$$

где $(s, p)$ — дуга, соответствующая $i$-му ограничению, если оно является ограничением типа 1).

Отсюда непосредственно следует выполнение неравенств: $b_i' \leqslant \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 \leqslant b_i$, $i = 1, \ldots, m$, т. е. $X^0$ является допустимым решением задачи $P$ ($x_j^0 \geqslant 0$, так как $f_j^{0\prime} \geqslant 0$). Пусть $X^0$ неоптимальное решение задачи $P$, т. е. существует допустимое решение $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\tilde{x}_j < \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^0.$$

Тогда допустимой будет циркуляция $\tilde{f}_j = \tilde{x}_j$, $j = 1, \ldots, n$, потоки которой по дугам, соответствующим ограничениям, определяются через уравнения сохранения, причем так, что не более чем один из пары потоков по дугам $(s, p)$ и $(p, s)$, соответствующим ограничениям типа 2), положителен. Это противоречит оптимальности циркуляции $f^{0\prime}$. Следовательно, $X^0$ — оптимальное решение задачи $P$.

Тем самым доказана теорема 2.

**Теорема 2.** *Задача линейного программирования $P$, строки матрицы ограничений которой образуют $M$-семейство, сводится к задаче о циркуляции минимальной стоимости, а именно к задаче $T(P)$.*

**Лемма 6.** *Для того чтобы задача линейного программирования $P$ сводилась к задаче о циркуляции минимальной стоимости $T(P)$, необходимо, чтобы матрица ограничений задачи $P$ была вполне унимодулярна.*

Из леммы 6 и теоремы 2 непосредственно следует

**Теорема 3.** *Матрица, строки которой образуют $M$-семейство, вполне унимодулярна.*

Заметим, что из теоремы 3 следуют некоторые теоремы о вполне унимодулярных матрицах, например теорема Хеллера — Томпкинса — Гейла, (достаточность), теорема Хеллера (см. [7]), поскольку строки матриц, рассматриваемых в этих теоремах, образуют $M$-семейство.

Но класс матриц, удовлетворяющих условиям теоремы 3, шире класса матриц, удовлетворяющих условиям теорем из [7], например матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ не удовлетворяет условиям теорем из [1], но строки ее образуют $M$-семейство

$$\begin{array}{c}(1, 1, \otimes, \otimes)\\(1, 0, 1, \otimes)\\(1, 0, 0, \ \ 1)\end{array}$$

В заключение авторы выражают большую признательность А. А. Фридману за постановку задач о сводимости и постоянное внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Форд, Д. Фалкерсон. Потоки в сетях. М., «Мир», 1966.
2. Б. Г. Литвак, А. М. Раппопорт. О сводимости одной задачи линейного программирования к задаче о потоке минимальной стоимости. В сб. Математические вопросы управления производством, вып. 1. М., 1969 (МГУ им. М. В. Ломоносова, Мех.-матем. факультет).
3. Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. Новые направления в линейном программировании. М., «Сов. радио», 1966.
4. А. Гофман, Дж. Краскал. Целочисленные граничные точки выпуклых многогранников. В сб. Линейные неравенства и смежные вопросы. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
5. И. Хеллер, Ч. Томпкинс. Обобщение одной теоремы Данцига. В сб. [4].
6. К. Берж. Теория графов и ее применения. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
7. А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. Дискретное программирование. М., «Наука», 1969.

Поступила в редакцию
18 XII 1969