

## ЗАДАЧА «НАКОПЛЕНИЯ» И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Н. Е. БОРОВОЙ

(Москва)

В практике часто встречаются процессы, характеризующиеся следующими особенностями: к какому-то пункту или рабочему месту с различными интервалами поступают разной величины группы одинаковых элементов; после набора заданного числа элементов (*комплекта*) или не менее этого числа процесс накопления отдельного комплекта считается законченным.

В качестве примера такого процесса можно указать накопление грузовых вагонов до состава поезда на железнодорожной сортировочной станции: вагоны прибывают на станцию с разными поездами и сортируются по назначению; состав грузового поезда отдельного назначения считается накопленным, если вагонов этого назначения набралось не меньше заданного количества. Вагоны каждого назначения поступают в разных количествах и с разными интервалами, по различным законам распределения.

Другим примером из железнодорожной практики может служить накопление порожних вагонов, поступающих для погрузки и отправления целого поезда (маршрута).

Модель указанного процесса графически показана на рис. 1, где  $m_i$  — количество элементов в  $i$ -й группе по порядку;  $\tau_i$  — интервал между прибытием  $i$ -й и следующей группы элементов;  $m_M$  — минимально или точно требуемое количество элементов для комплекта;  $T_{\text{нак}}$  — период накопления комплекта.

В задачах рассматриваемого типа основными характеристиками, необходимыми для анализа и планирования соответствующих процессов, являются затраты времени на накопление, которые в данном случае выражаются *элементо-часами накопления* (например, вагоно-часами накопления на поезд на железнодорожном транспорте)

$$(mt)_{\text{нак}} = \sum_{i=1}^{h-1} \tau_i \sum_{j=1}^i m_j \quad (1)$$

и периодом накопления  $T_{\text{нак}}$ .

Поскольку поступление элементов в пункт «комплектации» может происходить в случайные моменты времени группами случайной величи-

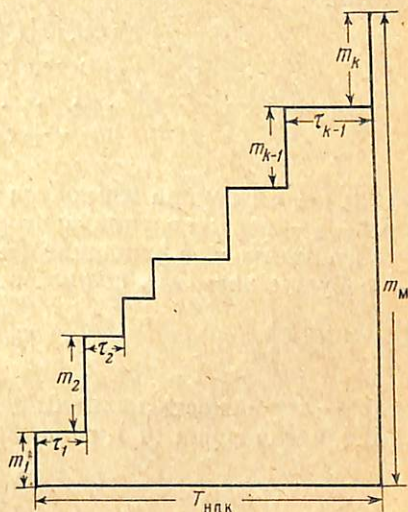


Рис. 1



Но в соответствии с (5) сумма  $\sum_{g=2} (g-1)\Phi^{(g)}$  — не что иное, как м.о. групп, из которых образуется комплект, минус 1. Следовательно,

$$E(T_{\text{нак}}) = a_{\tau}(a_g - 1), \quad (7)$$

иными словами м.о. периода накопления равно произведению м.о. интервала и числа групп, уменьшенного на 1.

В соответствии с (3) имеются также величины м.о. числа элементов в первых поступающих группах —  $\sum_j m_{1,j}p_j$ , во вторых —  $\sum_j m_{2,j}p_j$

и т. д. При этом оказывается, что при образовании комплекта из  $g$  групп м.о. числа элементов во всех группах этого количества, кроме замыкающих, т. е. во всех рядовых группах, равны между собой

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k m_{1,j}p_j &= \sum_{j=1}^k m_{2,j}p_j = \\ &= \dots = \sum_{j=1}^k m_{(g-1),j}p_j. \end{aligned} \quad (8)$$

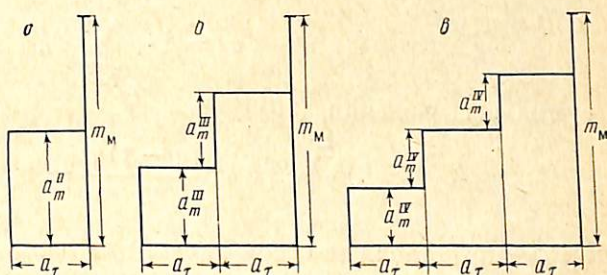


Рис. 2

Это утверждение вытекает из условия, что количества элементов в рядовых группах независимы друг от друга и поэтому в каждой рядовой группе (1-й, 2-й и т. д., кроме замыкающей) с одинаковой вероятностью будут одинаковые количества элементов.

Обозначим м.о. числа элементов в рядовых группах при образовании комплекта из  $g$  групп  $a_m^{(g)}$  и в замыкающей группе  $a_z^{(g)}$ . Пусть далее для определенности комплект может образовываться из  $1, 2, \dots, g, \dots, k$  групп. Тогда можно дать следующую матрицу математических ожиданий числа элементов в группах:

$$\begin{aligned} &a_m', \\ &a_m'', a_z'', \\ &a_m''', a_m''', a_z''', \\ &\dots \dots \dots \\ &a_m^{(g)}, a_m^{(g)}, a_m^{(g)}, \dots, a_m^{(g)}, a_z^{(g)}, \\ &\dots \dots \dots \\ &a_m^{(k)}, a_m^{(k)}, a_m^{(k)}, \dots, a_m^{(k)}, a_m^{(k)}, \dots, a_m^{(k)}, a_z^{(k)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $a_m', a_m'', \dots, a_m^{(g)}$  — м.о. числа элементов в рядовых группах при образовании комплекта соответственно из  $1, 2, \dots, g$  групп.

Поскольку м.о. числа элементов в рядовых группах равны между собой, а м.о. интервалов  $a_{\tau}$  за рядовыми группами также одинаковы, то, например, схема м.о. элементо-часов накопления при образовании комплекта из двух групп будет иметь вид, представленный на рис. 2а, из трех групп — на рис. 2б, из четырех групп — на рис. 2в.

В соответствии с этими схемами м.о. элементо-часов накопления определится следующим образом: при образовании комплекта из двух групп  $a_{\tau}a_m''$ , из трех —  $a_{\tau}3a_m'''$ , из четырех —  $a_{\tau}6a_m^{IV}$  и в общем случае из  $g$  групп —  $a_{\tau}[(g-1)g/2]a_m^{(g)}$ .

Следовательно, общее м.о. элементо-часов накопления на комплект можно представить

$$E(mt)_{\text{нак}} = a_{\tau} \sum_{g=2}^k a_m^{(g)} \Phi^{(g)} \frac{(g-1)g}{2}. \quad (10)$$

Но для любого вариационного ряда числа элементов в группе, состоящего из последовательных чисел  $1, \dots, m_M - 1$ , где  $m_M$  — требуемое количество элементов, можно доказать, что м.о. числа групп, из которых накапливается комплект

$$a_g = 1 + \sum_{i=1}^{m_M-1} B_i, \quad (11)$$

а сумма в выражении (10)

$$\sum_{g=2}^k a_m^{(g)} \Phi^{(g)} \frac{(g-1)g}{2} = 1 \sum_{i=1}^{m_M-1} iB_i, \quad (12)$$

где  $B_i$  — представляют собой параметры для данных расчетов и в общем случае определяются посредством вероятностей числа одновременно поступающих элементов  $p_i$  следующим образом

$$B_i = B_{i-1}p_1 + B_{i-2}p_2 + \dots + B_1p_{i-1} + p_i = \sum_{j=1}^i B_{i-j}p_j. \quad (13)$$

Например,  $B_1 = p_1$ ;  $B_2 = B_1p_1 + p_2$ ;  $B_3 = B_2p_1 + B_1p_2 + p_3$ ;  $B_4 = B_3p_1 + B_2p_2 + B_1p_3 + p_4$  и т. д., где  $p_1, p_2, \dots, p_i$  — вероятности поступления в группу  $1, 2, \dots, i$  элементов.

Вместе с тем, (11)–(13) справедливы для любого вариационного ряда с любым числом разрядов  $r_p$ , в котором число элементов в разрядах  $m_1, m_2, \dots, m_k$  не обязательно последовательные натуральные числа, но находятся в следующей зависимости:  $m_i = im_1$  и  $m_1 = m_M / (r_p + 1)$ , где  $i$  — номер разряда в вариационном ряду,  $m_i$  — число элементов в  $i$ -м разряде,  $m_1$  — число элементов в первом разряде, а суммирование параметров  $B_i$  производится по всем разрядам ряда. В самом деле, любой вариационный ряд, составленный по указанному принципу, можно представить как ряд из последовательных натуральных чисел, добавив в него недостающие числа с вероятностями, равными нулю, при этом получаемые результаты по приведенным зависимостям не изменятся.

Например, для вариационного ряда

$$\begin{matrix} m_1 = \frac{m_M}{5+1}; & m_2 = 2m_1; & m_3 = 3m_1; & m_4 = 4m_1; & m_5 = 5m_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{matrix}$$

(11), (12) имеет вид

$$a_g = 1 + \sum_{i=1}^5 B_i \text{ и } \sum_{g=2}^k a_m^{(g)} \Phi^{(g)} \frac{(g-1)g}{2} = m_1 \sum_{i=1}^5 iB_i,$$

а параметры  $B_i$  определяются в пределах от  $B_1$  до  $B_5$  включительно.

Благодаря последним установленным зависимостям можно получить окончательно следующие формулы для расчета затрат времени на накопление:

а) на основе (7) и (11) — для расчета м.о. периода накопления элементов на комплект

$$E(T_{\text{нак}}) = a_{\tau} \sum_{i=1}^{r_p} B_i; \quad (14)$$

б) на основе (10) и (12) — для расчета м.о. элементо-часов накопления на комплект

$$E(mt)_{\text{нак}} = \frac{m_m}{r_p + 1} a_{\tau} \sum_{i=1}^{r_p} i B_i. \quad (15)$$

Таким образом, для определения этих затрат требуется получить представительную статистическую выборку поступления элементов (число элементов в группах и интервалы). На основе этой выборки составить вариационный ряд количества элементов в группе с соблюдением указанных условий и с числом разрядов, минимально требующимся для обеспечения необходимой точности расчетов.

По выборке вычислить м.о. интервала  $a_{\tau}$  между поступлениями групп элементов. Затем по этим данным на основе (13) — (15) определить окончательно м.о. затрат на накопление одного комплекта: периода и элементо-часов накопления.

**Пример расчета.** Определим м.о. затрат времени на накопление порожних вагонов для погрузки маршрута с углем, состоящего из  $m_m = 115$  вагонов. Для этой цели используем представительную выборку о поступлении порожних вагонов на соответствующий пункт (см. таблицу).

| № пп | Число и месяц | Число вагонов | Время поступления | Интервал | № пп | Число и месяц | Число вагонов | Время поступления | Интервал |
|------|---------------|---------------|-------------------|----------|------|---------------|---------------|-------------------|----------|
| 1    | 1.IX          | 20            | 5.00              |          | 18   | 4.IX          | 36            | 11.30             | 3,5      |
| 2    |               | 32            | 10.00             | 5,0      | 19   |               | 37            | 16.30             | 5,0      |
| 3    |               | 84            | 14.00             | 4,0      | 20   |               | 46            | 20.00             | 3,5      |
| 4    |               | 28            | 21.00             | 7,0      | 21   |               | 8             | 22.00             | 2,0      |
| 5    | 2.IX          | 40            | 2.00              | 5,0      | 22   | 5.IX          | 44            | 4.00              | 6,0      |
| 6    |               | 89            | 8.00              | 6,0      | 23   |               | 24            | 12.00             | 8,0      |
| 7    |               | 36            | 14.30             | 6,5      | 24   |               | 18            | 17.00             | 5,0      |
| 8    |               | 48            | 16.00             | 1,5      | 25   |               | 89            | 1.00              | 8,0      |
| 9    | 3.IX          | 48            | 1.00              | 9,0      | 26   | 6.IX          | 10            | 2.00              | 1,0      |
| 10   |               | 28            | 2.00              | 1,0      | 27   |               | 22            | 8.00              | 6,0      |
| 11   |               | 40            | 8.00              | 6,0      | 28   |               | 28            | 11.30             | 3,5      |
| 12   |               | 34            | 10.00             | 2,0      | 29   |               | 62            | 13.00             | 1,5      |
| 13   | 4.IX          | 50            | 16.00             | 6,0      | 30   | 7.IX          | 86            | 15.00             | 2,0      |
| 14   |               | 46            | 21.00             | 5,0      | 31   |               | 28            | 17.30             | 2,5      |
| 15   |               | 32            | 0.30              | 3,5      | 32   |               | 64            | 3.00              | 9,5      |
| 16   |               | 62            | 4.00              | 3,5      | 33   |               | 60            | 6.30              | 3,5      |
| 17   |               | 48            | 8.00              | 4,0      |      |               |               |                   |          |

Составляем вариационный ряд количеств порожних вагонов в группах, при этом количество разрядов  $r_p$  принимаем равным 5, поскольку, как показывает большое число опытных расчетов, такой ряд в данном случае является оптимальным (при большем количестве разрядов объем расчетов увеличивается, а при меньшем — точность получаемых результатов ниже требуемой). Для составления этого ряда определяем нижнюю границу для

каждого разряда

$$m_i^H = m_i - \frac{1}{2} m_1 \quad \text{и} \quad m_1 = \frac{115}{6} \approx 19.$$

|                                        |              |              |              |              |              |
|----------------------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Число вагонов в группах                | до 29        | 29 — 48      | 48 — 67      | 67 — 86      | 86 и более   |
| Число групп                            | 10           | 11           | 8            | 1            | 3            |
| Среднее число вагонов в группах, $m_i$ | $m_i = 19$   | $m_2 = 38$   | $m_3 = 57$   | $m_4 = 76$   | $m_5 = 95$   |
| Частость (вероятность), $p_i$          | $p_1 = 0,30$ | $p_2 = 0,34$ | $p_3 = 0,24$ | $p_4 = 0,03$ | $p_5 = 0,09$ |

М.о. интервала определяется по выборке как сумма всех интервалов, деленная на их число в выборке

$$a_\tau = 4,55 \text{ час.}$$

Далее определяются параметры  $B_i$  — по (13):

$$B_1 = 0,300;$$

$$B_2 = 0,300^2 + 0,340 = 0,430;$$

$$B_3 = 0,430 \cdot 0,300 + 0,300 \cdot 0,340 + 0,240 = 0,471;$$

$$B_4 = 0,471 \cdot 0,300 + 0,430 \cdot 0,340 + 0,300 \cdot 0,240 + 0,030 = 0,390;$$

$$B_5 = 0,390 \cdot 0,300 + 0,471 \cdot 0,340 + 0,430 \cdot 0,240 + 0,300 \cdot 0,030 + 0,090 = 0,479.$$

М.о. периода накопления порожних вагонов на маршрут в соответствии с (14) равно

$$E(T_{\text{нак}}) = 4,55(0,300 + 0,430 + 0,471 + 0,390 + 0,479) = 9,4 \text{ час.}$$

М.о. вагоно-часов накопления порожних вагонов на маршрут по (15):

$$E(mt)_{\text{нак}} = 19 \cdot 4,55(1 \cdot 0,300 + 2 \cdot 0,430 + 3 \cdot 0,471 + 4 \cdot 0,390 + 5 \cdot 0,479) = 564 \text{ вагоно-часа.}$$

Поступила в редакцию  
28 VII 1969